高等学校教材

粘性流体力学

（第2版）

上海机械学院　赵学端　廖其奠　主编

机械工业出版社

高 等 学 校 教 材

粘 性 流 体 力 学

（第 2 版）

上海机械学院 赵学端 廖其奠 主编

机 械 工 业 出 版 社

(京)新登字054号

本书共分十一章，主要内容有：粘性流体运动的基本概念、基本方程和基本性质；粘性流体力学方程的基本解；不可压缩流体层流边界层；过渡理论；湍流与工程模式理论；不可压缩流体湍流边界层；不可压缩流体温度边界层；可压缩流体轴对称层流边界层；粘性流体力学方程的数值解法等。各章附有较多的题例和习题，更能加深对理论的理解和应用。

本书为高等学校力学、工程热物理、传热传质、动力机械、流体工程、能源等专业的本科生和研究生教材，也可供航空、船舶、化工、水利、气象、环保及有关专业的教学和从事实际工程的技术人员参考。

粘性流体力学

(第 2 版)

上海机械学院 赵学端 廖其奠 主编

*

责任编辑：钱飒飒　责任校对：马志正

封面设计：郭景云　版式设计：胡金瑛

责任印制：王国光

*

机械工业出版社出版(北京阜成门外百万庄南街一号)

邮政编码：100037

(北京市书刊出版业营业许可证出字第117号)

机械工业出版社京丰印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16・印张22 1/2・字数549千字

1983年6月北京第1版

1993年5月北京第2版・1993年5月北京第4次印刷

印数 12 851—14 350　定价：6.20元

*

ISBN 7-111-03362-0/TK・135(课)

第1版 前 言

本书是根据1978年 月原第一机械工业部在天津召开的高等院校对口专业座谈会的规划和同年10月在杭州召开的对口流体力学专业教材大纲编审会议对本教材大纲的原则意见，以及1979年6月在上海由浙江大学、清华大学和上海机械学院共同商定的大纲编写的。

全书共分十章。内容包括三部分：基础部分、边界层理论部分、湍流与数值解部分。书中前四章是基础部分，着重讨论了粘性流体运动的基本概念、基本方程与基本性质、以及粘性流体力学方程的基本解，对粘性流体力学问题的建立过程和数学处理方法作了详尽的叙述。第五、七、八、九章是边界层理论部分，内容主要包括不可压缩流体的层流边界层、湍流边界层与温度边界层，以及可压缩流体的层流边界层和湍流边界层等。对二维和轴对称边界层问题的相似性解法及积分关系式解法作了系统的介绍。第六章湍流，在建立湍流基本物理概念和基本方程的基础上，着重阐明两种湍流模式理论、壁面湍流的流动特性、以及管内湍流和渠道湍流，同时对湍流润滑理论、湍流猝发与拟序结构也作了简要介绍。第十章数值解，对粘性流体流动和边界层方程的差分解法作了精简扼要的叙述，并提供了一定的计算实例。

考虑到本学科的发展近况，本书在叙述方法和取材上均比以往有所更新。书中内容比较广泛，在深度上也有一定的伸缩性，根据各院校专业的需要和不同类型专业的要求，在讲授中可以作适当的调整或选择（书中部分章节附有“*”号，仅供参考)。

本书出版前曾在浙江大学、上海交通大学、华中工学院、武汉水运工程学院和上海机械学院等院校的流体力学专业和有关专业的学生或研究生中试用过。

本书可作为高等工科院校的流体力学专业学生以及工程热物理等相近专业的学生或研究生的试用教材，也可供有关专业的教师、科学工作者和工程技术人员参考。

本书第一、二、三、四章由赵学端编写，应启戛协助整理；第五、七、八、九章由廖其奠编写；第六章由葛景信编写；第十章由陈月林编写。全书由浙江大学许学谘、陈邦国主审。本书责任编辑是孙祥根。

在本书编写过程中，清华大学章光华，以及在出版前曾试用过本教材的各兄弟院校的任课教师均对本书提过许多宝贵意见。对以上同志的热情支持和帮助，在此表示衷心感谢。

粘性流体力学内容极为丰富，应用也十分广泛，是一门理论性和实用性都很强的学科。目前，随着科学技术的发展，在许多高等院校的力学、工程热物理、传热传质、动力机械、能源、航空、船舶、水利、化工、气象及环境保护等专业的学生或研究生中都陆续开设这门课程。为了满足教学上的需要，我们参考了国内外有关书刊文献，包括一些兄弟院校的讲义，编写了这份教材。由于编者水平有限，教学经验不足，加之时间仓促，书中可能会有这样或那样的缺点和错误，望广大读者批评指正。

编 者

1981年11月

第2版 前 言

原书自1983年6月问世以来，承蒙广大读者关注，得以多次重印。根据多年来教学实践以及学科本身的发展，编者和审者认为对原书作一次修订是必要的。对口流体力学专业教学指导委员会和机械工业出版社根据历年使用情况，决定将该书进行必要的修改后作为全国高等学校教材。

第2版尊重原书的体系，尽量保留原书内容安排的优、特点。温度边界层、可压缩流边界层和数值计算仍单独设章，这样既照顾到该内容自身体系，又便于各校根据需要选讲。第2版由原书的十章改为十一章，根据学科内容增设了过渡理论作为第六章，对层流稳定性及其向湍流的过渡作了简要的叙述。原书的六至十章按顺序相应改为七至十一章。修订本对原书各章节内容作了程度不等的增删和缩并，其中湍流、湍流边界层和数值解等章节在内容上作了较多的调整，使之更适合于教学和读者自学。第2版适当增加了题例内容并附有一定数量的习题，以利于学生加深对理论的理解和应用，此外，还列出了主要参考书目及人名索引，以便读者必要时查证。

负责本书修订工作的是廖其奠副教授和葛景信副教授，吴玉刚讲师也参加了部分章节的修订工作，全书由赵学端教授和廖其奠副教授主编，浙江大学许学谘教授和陈邦国副教授主审。乘此机会，我们对在本书使用过程中曾给予关心、支持和提出过宝贵意见的诸多同行专家教授和读者表示诚挚的谢意。书中有不妥或错误之处，恳请读者给予指正。

编 者

1992年2月

主 要 符 号 表

1. 拉丁字母

$\boldsymbol{A}$	面积矢量
A	面积，常数
$\boldsymbol{a}$	加速度矢量
a	加速度，声速，
B	常数
C、c	常数
c_p	定压比热
c_v	定容比热
D	耗散积分
D	扩散系数
F_D	壁面摩擦阻力
e	比内能
$\boldsymbol{F}$	力矢量
F	力，单位质量的质量力
f	无量纲流函数
G	亏损形状因子
$\boldsymbol{g}$	重力加速度矢量
g	重力加速度
H	形状因子
H	总焓
h	比焓
I	涡通量
$[I]$	单位张量
K	湍动能
k	导热系数，壁面平均粗糙度
k_t	湍流导热系数
L	(特征)长度
l_m	普朗特混合长度
N	粘性系数-密度比
$\boldsymbol{n}$	法线方向的单位矢量
P	正压函数
P	轴端负荷
p	压力(单位面积上的压力)
Q	热量，对流换热量
$\boldsymbol{q}$	热流矢量密度
q_V	体积流量
q_m	质量流量
r	复温因子
$\boldsymbol{r}$	矢径，位移矢量
S	分离点
s	雷诺比拟因子，熵
T	温度，相对湍流度
t	时间
U_e	边界层外部势流速度
U_∞	自由来流速度，无穷远处流速
u	速度分量
u_{av}	断面平均速度
V	体积
$\boldsymbol{v}$	速度矢量
v	速度分量
v^*	壁面切应力速度
W	尾迹函数
w	速度分量

2. 希腊字母

α	角度，内层压力梯度参数，扰动波数
β	膨胀系数，压力梯度参数
Γ	速度环量
γ	比热比，间歇因子
Δ	耗散厚度
Δ_1	亏损厚度
Δ_2	平方亏损厚度
δ	厚度，间隙，边界层厚度
δ_e	导热厚度
δ_h	热焓厚度
δ_T	温度边界层厚度
δ_u	速度边界层厚度
δ^*	排移厚度
ε	湍动能的耗散率
$[\varepsilon]$	变形率张量
ε_{ij}	变形率张量的分量
η	相似性变量
Θ^*	无量纲温度
θ	角度，柱坐标系和球坐标系的坐标轴之一
θ	动量损失厚度

κ 卡门常数，$\kappa=0.40\sim0.41$

λ 膨胀粘性系数，沿程阻力系数，扰动波长

μ 粘性系数(动力粘性系数)

μ_t 湍流(动力)粘性系数

ν 运动粘性系数

ν_t 湍流(运动)粘性系数

Π 尾迹参数

ρ 密度

τ 切应力

τ_t 湍流切应力

τ_w 壁面切应力

$[\tau]$ 应力张量

τ_{ij} 应力张量的分量

Φ 耗散函数

φ 速度势函数，扰动振幅

X 湿周，相对总焓

ψ 流函数

$\boldsymbol{\Omega}$ 涡量矢量

Ω 涡量

$\boldsymbol{\omega}$ 旋转角速度矢量

ω 旋转角速度

3. 坐标系及其速度分量

x, y, z 直角坐标系

x_1, x_2, x_3 直角坐标系

q_1, q_2, q_3 正交曲线坐标系

r, θ, z 柱坐标系

r, θ, ψ 球坐标系

i, j, k 直角坐标轴方向的单位矢量

e_1, e_2, e_3 正交曲线坐标轴方向的单位矢量

e_r, e_θ, e_z 柱坐标轴方向的单位矢量

e_r, e_θ, e_ψ 球坐标轴方向的单位矢量

u, v, w 直角坐标轴方向的速度分量

u_1, u_2, u_3 直角坐标轴方向的速度分量

V_1, V_2, V_3 正交曲线坐标轴方向的速度分量

$u_r\ u_\theta, u_z$ 柱坐标轴方向的速度分量

$u_r\ u_\theta, u_\psi$ 球坐标轴方向的速度分量

ξ, η, ζ 变换坐标轴系

4. 无量纲组合数、准则数

Φ_V 负荷系数

Ψ_L 摩擦系数

Br 布伦克曼数

C_D 耗散积分系数

C_{D_m} 混合边界层平均壁面摩擦阻力系数

C_{D_f} 平均壁面摩擦阻力系数

C_{D_s} 阻力系数

C_M 扭矩系数

Ec 埃克尔特数

Fr 弗劳德数

Gr 格拉晓夫数

Nu 努塞尔特数

Pe 贝克来数

Pr 普朗特数

Pr_t 湍流普朗特数

Pr_m 混合普朗特数

Re 雷诺数

Sr 斯特劳哈数

St 斯坦顿数

Ma 马赫数

We 韦伯数

5. 下角标

a 绝热

av 平均

aw 绝热壁面

cr 临界

e 外部势流

l 层流

n 法线方向

o 起始点，驻点(滞止点)，坐标原点

s 分离点

t 湍流

tr 过渡(点)

w 壁面

∞ 无穷远，自由来流

6. 上角标

$-$ 时平均

$\sim$ 坐标变换，湍流度

$'$ 微分，相对于时均值的湍流脉动

$*$ 无量纲量，参考温度

$+$ 内层壁面律无量纲量

目　录

第一章　粘性流体运动的基本概念

在自然界中，真实的流体都具有粘性。但是对于每一个具体的流动问题来讲，粘性所起的作用并不一定相同。对某些问题，例如求解流体作用于被绕流物体上的升力、表面波的运动等，粘性的作用并不占支配地位，因而利用非粘性流体力学理论，可以获得满意的结果。而对另一些问题，例如求解运动流体中的粘性阻力、涡旋的扩散以及热量的传递等，粘性的作用已占主导的地位，如再忽略粘性的存在将会导致完全不符合实际的结果。粘性流体力学就是研究在粘性不能忽略不计的情况下流体的宏观运动，以及流体和在该流体中运动的物体之间的相互作用所遵循的规律。

流体中粘性切应力的存在以及物面上的粘附条件（无滑移条件），是粘性流体运动有别于非粘性流体的主要标志。由于这一差别导致了它们之间在运动性质上的重大差异。至于谈到研究流体运动的基本方法（如：拉格朗日方法、欧拉方法），许多基本概念（如：流体的连续介质假定、压缩性等），建立流体运动的数学模型（如推导运动方程组的方法等），以及不涉及到粘性作用的问题均可沿用非粘性流体力学中所阐述的内容。本书就是在已学习过非粘性流体力学的基础上，进一步研究粘性流体力学理论，以及研究讨论如何在实际中应用这些理论。

本章将重点阐述一些和粘性密切相关的基本概念，为今后章节的学习打下基础。

§1-1　变形率张量

由柯西-海姆霍茨定理知道，流体微团的运动可以分解成三个部分：位移、旋转与变形（线变形与剪切变形）。

设在某一固定时刻，流体微团内一点M_0的速度为$\boldsymbol{v}_0$，则M_0点邻域内各点的速度$\boldsymbol{v}$可以表示为

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}+[\varepsilon]\cdot\delta\boldsymbol{r} \tag{1-1}$$

式中，$\boldsymbol{\omega}$是旋转角速度矢量，$\delta\boldsymbol{r}$为微团上任意点到M_0的矢径。

1. 位移速度

位移速度$\boldsymbol{v}_0$是由M_0点作平移运动引起的。

2. 旋转速度

旋转速度$\boldsymbol{\omega}\times\delta\boldsymbol{r}$是由于流体微团绕通过$M_0$的瞬时转动轴旋转引起的。在直角坐标系中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}&=\omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{1-2}$$

定义涡量

$$\boldsymbol{\Omega}=2\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}=\nabla\times\boldsymbol{v} \tag{1-3}$$

并由涡量是否为零，定义无旋流动与有旋流动。对无旋流动，有$\boldsymbol{\Omega}=0$。应着重指出，流体

微团是否作有旋运动，需视微团是否绕着通过流体微团的瞬时轴旋转，而并非决定于流体微团轨迹（迹线）的几何形状。

3。变形速度

变形速度$[\varepsilon]\cdot\delta r$是由于流体在$M_0$点邻域内变形所引起的，它可分为线变形速度和剪切变形速度两种。在直角坐标系中，线变形速率为

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1-4a}$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1-4b}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{1-4c}$$

剪切变形速率为

$$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{1-5a}$$

$$\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{1-5b}$$

$$\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{1-5c}$$

上述九个变形速率分量构成一个二阶对称张量

$$[\varepsilon]=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix} \tag{1-6}$$

称它为变形率张量。它的分量与坐标系的选择有关，但有三个与坐标系选择无关的不变量，即

$$I_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz} \tag{1-7a}$$

$$I_2=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}-\varepsilon^2_{xy}-\varepsilon^2_{yz}-\varepsilon^2_{zx} \tag{1-7b}$$

$$I_3=\begin{vmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{vmatrix} \tag{1-7c}$$

根据对称张量的性质，存在着一个使得非主对角线的分量均为零的坐标系位置。此位置的三个坐标轴称为主轴。此时变形率张量变为

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

ε_1，ε_2，ε_3称为变形率的主值，也称为主伸长速率。因此三个张量不变量又可以写成

$$I_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{1-8a}$$

$$I_2=\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_2\varepsilon_3+\varepsilon_3\varepsilon_1 \tag{1-8b}$$

$$I_3=\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \tag{1-8c}$$

当三个不变量为已知时，即可解出变形率的主值。

最后，再来看一下I_1的物理意义。根据式(1-7a)及(1-4)可以得出

$$I_1=\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{1-9}$$

此即为连续性方程式中的相对体积膨胀率项。

§1-2 应力张量

在静止流体中，作用于单位面积上的表面力（应力）永远沿着作用的内法线方向，而且其大小与作用面所处的方位无关。也就是说一点的静压力各方向相等。对于非粘性流体由于不计粘性，没有切向力，因而动压力也垂直于作用面，而且各方向相等，但是对于粘性流体来讲就不一样了。由于粘性的存在，可以有切向力，因而单位面积上的表面力（应力）就不一定垂直于作用面，而且各方向的大小也不一定相等。

在给出应力张量以前，先规定一下作用面的法线方向与一些下标。如微元曲面dA是闭曲面的一部分，则取外法线方向为dA的正方向。如dA所在的曲面不封闭，则可以规定某一法线方向为正。正方向所指的流体作用于dA上的应力以τ_{-n}表示。见图1-1。显然

$$\tau_{-n}=-\tau_n \tag{1-10}$$

如果作用面垂直于坐标系上的任一坐标轴，则应力可以分解成三个分量。其中，一个垂直于作用面的为法向应力；另外两个与作用面相切的为切向应力（切应力），它们分别平行于另外两个坐标轴，是切应力在坐标轴向的分量。见图1-2。这里，用两个下标来表示这些应力，第一个下标表示与应力作用面垂直的坐标轴，即应力作用面的法线方向，第二个下标表示应力在那一个坐标轴向的分量，即应力投影方向。

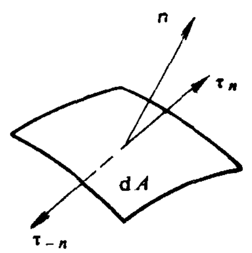


图1-1 作用于微元曲面上的应力

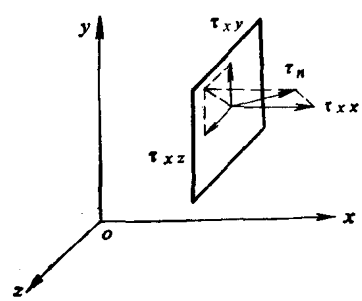


图1-2 作用在垂直于x轴面上的应力

由上述分析知道，作用在空间点以$\boldsymbol{n}$为法线方向的微元面dA上的应力τ_n，可以由通过该点作用在三个垂直于坐标轴的平面上的应力τ_x，τ_y，τ_z的九个分量完全确定。这九个分量也构成一个二阶对称张量，即$\tau_{ij}=\tau_{ji}$，以及

$$[\tau]=\begin{pmatrix}\tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz}\end{pmatrix} \tag{1-11}$$

称它为应力张量。它的法向应力之和$\tau_{xx}+\tau_{yy}+\tau_{zz}$为一张量不变量。因此，粘性流体中作用在任一法线方向为$\boldsymbol{n}$的面上的应力τ_n可表示为

$$\tau_n=\boldsymbol{n}\cdot[\tau] \tag{1-12}$$

§1-3 广义牛顿定律

如图1-3所示，牛顿提出了关于粘性流体作直线层状运动时，两流体层间的切应力的假设。认为切应力与层间速度成正比，即

$$\tau_{yx}=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-13}$$

μ 为动力粘性系数，其值取决于流体的物理性质。通常称式(1-13)为牛顿内摩擦定律。

根据前两节所述的变形率张量和应力张量，式(1-13)左边对应于平面直线运动特殊情况下的应力张量的一个切向分量，右边的导数项对应于变形率张量的一个分量。因此，可以理解为 τ_{yx} 与 ε_{yx} 成正比例

$$\tau_{yx}=2\mu\varepsilon_{yx} \tag{1-14}$$

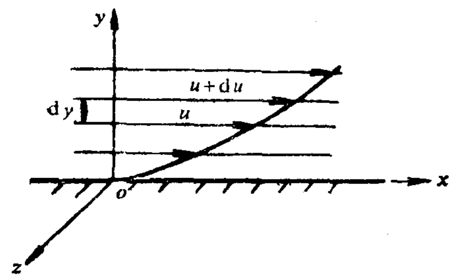


图1-3 流体作直线层状运动时壁面附近速度分布

斯托克斯将广义牛顿内摩擦定律推广到粘性流体的任意流动情形中去，假设：

1）流体是连续的，它的应力张量是变形率张量的线性函数。

2）流体是各向同性的，也就是它的性质与方向无关。因此，无论坐标系如何选取，它的应力与变形率的关系是相同的。

3）当流体静止，即变形率为零时，流体中的应力就是流体静压力

$$\tau_{ij}=-p_0\delta_{ij} \qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{1-15a}$$

或

$$[\,\tau\,]=-p_0[\,I\,] \tag{1-15b}$$

$[\,I\,]$ 为单位张量

$$[\,I\,]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{1-16}$$

实验证明，对大多数常见的液体和气体，上述假设是对的。

根据应力张量与变形率张量是线性关系以及流体是各向同性的假设，可以将应力张量 $[\,\tau\,]$ 与变形率张量 $[\,\varepsilon\,]$ 的线性关系式写成

$$[\,\tau\,]=a[\,\varepsilon\,]+b[\,I\,] \tag{1-17}$$

式中的系数 a 和 b 应该是标量。

由于关系式是线性的，因此系数 a 不可能与张量 $[\,\tau\,]$ 和 $[\,\varepsilon\,]$ 中的分量有关，应该与流体运动形态无关，它是取决于流体的物理属性的系数。参照牛顿内摩擦定律(1-14)，令

$$a=2\mu \tag{1-18}$$

至于系数 b：由于在式(1-17)中右边第二项是 b 与单位张量 $[\,I\,]$ 的乘积，要保持该式的线性关系，b 只能由张量 $[\,\tau\,]$ 与 $[\,\varepsilon\,]$ 的分量线性地组成。又由于 b 是标量，因此它应该由张

量〔τ〕与〔ε〕的分量中，那些当坐标系转换时其值不变的分量组合来构成。对二阶张量来讲，主对角线上三个分量的和为它的线性不变量。如以下标11，22，33代替xx，yy，zz则对于应力张量的线性不变量为$\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33}$
对于变形率张量的线性不变量为

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}$$

于是可写出标量b的一般关系式

$$b=b_1(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})+b_2\nabla\cdot\boldsymbol{v}+b_3 \tag{1-19}$$

式中的b_1、b_2、b_3为待定常数。将式(1-18)、(1-19)代入式(1-17)，得到

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]+[b_1(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})+b_2\nabla\cdot\boldsymbol{v}+b_3][I] \tag{1-20}$$

取等式两边主对角线上三个分量之和，可得

$$(-3b_1)(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})=(2\mu+3b_2)\nabla\cdot\boldsymbol{v}+3b_3 \tag{1-21}$$

在静止状态下，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，而且$\tau_{11}=\tau_{22}=\tau_{33}=-p_0$，则上式可以写成

$$-p_0(1-3b_1)=b_3$$

由于b_1，b_3均为常数，而且要求在静压力p_0值为任意情况下均成立，则只有

$$b_3=0\text{，}\quad b_1=\frac{1}{3} \tag{1-22a}$$

再以此代回式(1-21)，可得

$$b_2=-\frac{2}{3}\mu \tag{1-22b}$$

这三个系数确定以后，就可得出应力张量与变形率张量之间的一般线性关系式

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]+\left[\frac{1}{3}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})\right]-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\Big][I] \tag{1-23}$$

$\frac{1}{3}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})$是粘性流体运动平均法应力，所以表示为

$$\frac{1}{3}(\tau_{11}+\tau_{22}+\tau_{33})=-p+\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{v} \tag{1-24}$$

其中，p是非粘性流体平衡态压力，$\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{v}$是由于粘性效应由相对体积膨胀率引起的附加平均法应力，μ'称为膨胀系数。将式(1-24)代入式(1-23)，并令$\lambda=\mu'-\frac{2}{3}\mu$，就得到

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]-(p-\lambda\nabla\cdot\boldsymbol{v})[I] \tag{1-25}$$

通常称此式为广义牛顿定律，λ仍称为膨胀粘性系数或称第二粘性系数。$\mu'\nabla\cdot\boldsymbol{v}$实质上是一种内耗，在绝大多数情况下其数值很小，因此可以近似认为$\lambda=-\frac{2}{3}\mu$。此时，式(1-25)可写成

$$[\tau]=2\mu[\varepsilon]-\left(p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v}\right)[I] \tag{1-26}$$

如以u_i和x_i($i=1，2，3$)分别代替u，v，w和x，y，z，则可以写出在直角坐标系中应力张量与变形率张量各分量之间的关系式

$$\tau_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\\ -p+2\mu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}-\dfrac{2}{3}\mu\nabla\cdot\boldsymbol{v} & \text{当 } i=j \text{ 时}\end{cases} \tag{1-27}$$

对于不可压缩流体，$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$，则

$$\tau_{ij}=\begin{cases}\mu\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & \text{当 } i\neq j \text{ 时}\\ -p+2\mu\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} & \text{当 } i=j \text{ 时}\end{cases} \tag{1-28}$$

广义牛顿定律建立了在一般情况下应力张量与变形率张量之间的关系，它是粘性流体力学的一个理论基础。虽然在推广的过程中采用了一些无法用实验验证的不很严格的假定，但是根据这一关系所得出的粘性流体力学方程组对许多问题的解，均被实验所证实。因此间接地证明了这些推广的可靠性。

凡是应力张量与变形率张量的关系满足广义牛顿定律式(1-25)或(1-26)的流体，称之为牛顿流体，例如水、空气等。反之，不满足上述定律的流体称为非牛顿流体。非牛顿流体通常可分为三类：

1）纯粘性非牛顿流体　此类流体当静止时呈现各向同性，当受剪切时应力的合力仅与变形率有关，与时间或剪切的持续时间无关。如宾汉塑性体（油漆、泥浆等），伪塑性体与胀塑性体（橡胶、纸浆、颜料、淀粉等）以及雷讷-里伍林体（胶质炼乳、熔化沥青等）都属于这一类流体。

2）时间依存流体　此类流体在等温的条件下，保持固定的变形率，随着时间的推移，应力（粘性）逐渐增大或减小；或者是在固定的应力作用下，随着时间的推移变形率逐渐减小或增加。如油墨即属于这一类流体。

3）粘弹性流体　是一个既具有弹性，又具有粘性的流体。它既有固体的特性，同时，流动时又象流体那样，由于摩擦损失而耗散能量。如某些高分子聚合物溶液即具有这种粘弹特性。

随着科学的发展，工程中越来越多的流体力学问题已超出了牛顿流体的范畴。鉴于本书的任务，我们仅限于研究牛顿流体，对于非牛顿流体，可以阅读近年来出版的“非牛顿流体力学”，“粘弹性流体力学”，“流变学”以及更专门的著作。

习　　题

1-1　已知流体运动的速度分布为：$u=0$，$v=A(xy-z^2)e^{-Bt}$，$w=A(y^2-xz)e^{-Bt}$，其中A，B为常数。试计算点$M(1,0,3)$，当$t=0$时的变形率张量各分量及旋转角速度矢量。

1-2　已知点$P(0,0,0)$的应力张量为

$$[\tau]=\begin{pmatrix}7 & -5 & 0\\ -5 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

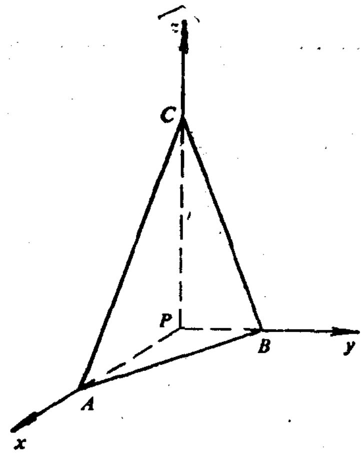
试求如图所示穿过P点平行于ABC平面上的应力矢量。平面ABC的方程是$3x+6y+2z=12$

1-3　流体中某点的应力张量为

$$[\tau]=\begin{pmatrix}\sigma & a\sigma & b\sigma\\ a\sigma & \sigma & c\sigma\\ b\sigma & c\sigma & \sigma\end{pmatrix}$$

式中，a、b、c是常数，σ是某应力值。试求a、b、c的值以使八面体面上的应力矢量为零。八面体面

的$n=\frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$。



题1-2图

1-4　有一5cm直径的轴，在直径为5.06cm的圆筒中同心旋转，轴长为30cm，轴与圆筒间隙之间充满了润滑油，粘性系数$\mu=35.5\times10^{-3}$Pa·s，计算轴以800r/min的速度旋转时所需的功率。

1-5　设某一流体流动为$u=2y+3z$，$v=3z+x$，$w=2x+4y$，该流体的粘性系数$\mu=0.08$Pa·s，求其切应力。

1-6　设物体在不可压缩粘性流体中运动，试证明流体作用在物体表面上的合力为

$$R=-\int_A p\boldsymbol{n}\mathrm{d}A+\mu\int_A\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial n}\mathrm{d}A$$

1-7　一活塞油压缸内径$D=12$cm，活塞直径$d=11.96$cm，活塞厚度$L=14$cm，油液粘性系数$\mu=65\times10^{-3}$Pa·s，当活塞回程的速度为0.5m/s时，试求拉回活塞所需的力为多少？(不计油液的压力影响)。

1-8　一平板距离另一固定平板0.5mm，两板间充满不可压缩粘性流体。上板在2Pa的力作用下以0.25m/s的速度移动，求该流体的粘性系数。

1-9　设某一流动的拉格朗日流场为$x=ae^{-\frac{2t}{k}}$，$y=b\left(1+\frac{t}{k}\right)^2$，$z=ce^{\frac{2t}{k}}\left(1+\frac{t}{k}\right)^{-2}$，式中$k$为常数，$k\neq0$，$a$、$b$、$c$为常参数。试判别：(1)是否是定常流动？(2)是否是不可压缩流动？(3)是否是有旋流动？

1-10　下列两流场哪个是有旋运动？哪个是无旋运动？

(1) $u=y+z$，$v=z+x$，$w=x+y$

(2) $u_r=2r\sin\theta\cos\theta$，$u_\theta=-2r\sin^2\theta$，$u_z=0$　(r，θ，z)为柱坐标

1-11　粘性系数为$\mu=35.5\times10^{-3}$Pa·s的油在管径为$d=15$cm的管内流动，管中心速度为3m/s，速度分布为

$$u=u_{max}(r_0^2-r^2)/r_0^2$$

问此运动是层流、还是湍流？(油的密度为0.86kg/m³)

第二章 粘性流体力学的基本方程

在非粘性流体力学中，曾经得出过一系列的基本方程。对于那些不涉及到力的纯属运动学的方程，或者在方程虽包含力的项，但并未具体规定力的内容，对这样一些方程仍可适用于粘性流体力学。除此以外，就必须计及粘性力的作用。在本章里将具体推导粘性流体的动力学方程，建立粘性流体运动的数学模型。

§2-1 连续性方程

连续性方程式是质量守恒定律对于运动流体的表达式。由于不涉及力的问题，因此不存在粘性流体与非粘性流体的区别。连续性方程在非粘性流体力学中已经得出，这里不准备再进行详尽的推导，只将结果列出。

如图2-1所示，在充满运动流体的空间中，任取一控制闭曲面A，其所包围的空间体积为V。根据质量守恒的概念，在单位时间内，经闭曲面A流入和流出的流体质量的总和应等于在同一时间段内，该闭曲面内流体质量的变化。因此立即可以得到积分形式的连续性方程

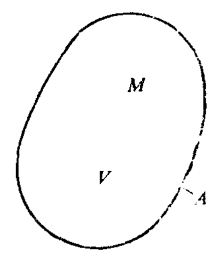


图2-1 推导连续性方程用图

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V + \int_A \rho v_n \mathrm{d}A = 0 \tag{2-1}$$

根据奥斯特罗格拉德斯基-高斯公式，上式可改写为

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) \right] \mathrm{d}V = 0 \tag{2-2}$$

由于被积函数连续，以及体积V是任意选取的，因此

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2-3}$$

或

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2-4}$$

式(2-3)、(2-4)为微分形式的连续性方程式。

对于定常流动，此时$\partial \rho / \partial t = 0$，则由式(2-3)可得

$$\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{2-5}$$

对于不可压缩均质流体（以后我们讨论的不可压缩流体都是指不可压缩匀质流体），此时$\rho=$常数，$\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t = 0$，由式(2-4)可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{2-6}$$

当写成直角坐标系形式时，连续性方程式为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] = 0 \tag{2-7}$$