现代数学丛书

陆启铿 著

典型流形与典型域

新篇

THE NEW RESULTS OF THE CLASSICAL MANIFOLDS AND THE CLASSICAL DOMAINS

LU QIKENG

上海科学技术出版社

·现 代 数 学 丛 书·

典型流形与典型域

新 篇

陆启铿 著

上海科学技术出版社

陆启铿教授赠书

97.7

责任编辑　赵序明

·现代数学丛书·

典型流形与典型域

新　篇

陆启铿　著

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所经销　常熟市第六印刷厂印刷

开本 787×1092　小 16 开　印张 24　插页 4　字数 312,000

1997 年 5 月第 1 版　1997 年 5 月第 1 次印刷

印数　1—1,200

ISBN 7-5323-3916-5/O·198

定价：44.00 元

出版说明

从 60 年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价. 原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念. 由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作. 充实编委会的力量. 考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于 1990 年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18 位著名数学家任委员. 编委会负责推荐（或审定）选题和作者，主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》,我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导,并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

序

自 1963 年拙著《典型流形与典型域》出版之后，30 年来发生了巨大变化. 由于众所周知的客观原因，1966 年以后，多复变数函数论方面的研究工作停顿了十多年，这个领域的专家学者，包括华罗庚教授的学生和他的学生的学生全部转了行. 改革开放之后，研究多复变数函数论的队伍不但复苏，而且更加壮大，研究范围也更加宽广而深入. 作者认为，现在到了有必要把作者在典型流形与典型域方面自 1963 年到 1994 年的工作做一个总结的时候了，此书称为新篇，因为内容上与旧书《典型流形与典型域》没有重复之处，但经常引用旧书的符号与结果.

本书中所反映的 1991 年以后发表的及尚未发表的研究工作，得到国家自然科学基金委员会重点项目《多复变数全纯映照理论》及中国科学院重点项目《现代数学物理的若干问题》的支持. 在此谨表示衷心谢意.

作者感谢汕头大学提供给我一个安静与优美的环境，使得作者能够全力写作 5 个月，得以完成此书. 另外，感谢张芳小姐把书稿用计算机打印出来，孙晓东先生帮助部分校对工作.

陆启铿

1994 年 12 月于汕头大学

目　　录

CONTENTS

第 1 章

旗 流 形

在《典型流形与典型域》专著[38]中(以后简称《典》著),我们是从 Grassmann 流形开始讨论正文的,现在在这新篇中则从 r-旗流形开始. r-旗流形是 Grassmann 流形的推广,1-旗流形就是 Grassmann 流形. 按《典》著中的定义,r-旗流形也是典型流形(从下文便可以知道),不同之处是 1-旗流形是对称空间,$r>1$ 时,r-旗流形不是对称空间.

$r(>1)$旗流形的表达比 Grassmann 流形复杂得多. 我们之所以不厌其烦来讨论它们,首先是由于现在流行的数学物理中,r-旗流形起着重要作用,其次是《典》著中的方法可应用于旗流形.

§1.1 r-旗流形

在《典》著中讨论的 Grassmann 流形是复的 Grassmann 流形,虽然那里所用的方法同样适用于实的 Grassmann 流形. 这里讨论的旗流形也是复的旗流形,虽然所用的方法亦适用于实的旗流形.

在《典》著的 §1.1 之末提到,Grassmann 流形 $\mathfrak{P}(m;n)$ 即 C^{m+n} 中过原点的所有 n 维平面,亦即 C^{m+n} 中所有 n 维线性子空间. 现在假定 L_1 是 C^{m+n} 中的一个 $N-m_1$ 维线性子空间($N=m+n$),L_2 是 L_1 的 $N-m_1-m_2$ 维线性子空间,...,L_r 是 L_{r-1} 的 $N-m_1-\cdots-m_r$ 维线性子空间,即有

$$C^N \supset L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_r,$$

则$(L_1,L_2,\cdots,L_r)$叫做 C^N 的一个 r-旗. 当 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 是固定的正整数,所有 r-旗所成的空间叫 r-旗空间,以 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$

表示之，其中

$$m_{r+1} = N - m = n, \quad m = m_1 + \cdots + m_r. \quad (1.1.1)$$

现在以《典》著中的方法描述 r-旗流形. 令

$$z = (z_1, \cdots, z_N) \in C^N$$

是一行向量，z' 表示 z 的转置. L_1 是 C^N 的子空间，即是过 C^N 原点的一个 $N-m_1$ 维平面，亦即 C^N 中的 z 点适合一组 m_1 个线性方程：

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \quad (1.1.2)$$

其中 $\mathfrak{A}_1$ 是 $m_1 \times N$ 常数矩阵，其秩为 m_1. L_2 是 $N-m_1$ 维线性空间 L_1 的子空间，即是 C^N 中的 z 点，除了适合上面的线性方程之外，还要适合 m_2 个线性方程

$$\mathfrak{A}_2 z' = 0, \quad (1.1.3)$$

其中 $\mathfrak{A}_2$ 是 $m_2 \times N$ 常数矩阵，使得 $(m_1+m_2) \times N$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix}$$

的秩为 m_1+m_2. 如此继续，L_r 作为 L_{r-1} 的线性子空间，即 C^N 中的 z 点适合方程

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \ \mathfrak{A}_2 z' = 0, \ \cdots, \ \mathfrak{A}_r z' = 0 \quad (1.1.4)$$

所成的平面，其中 $\mathfrak{A}_r$ 是 $m_r \times N$ 常数矩阵，使得

$$\mathfrak{A} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \\ N & \end{array} \quad (1.1.5)$$

的秩为 $m = m_1 + \cdots + m_r$. 因此，一旗 $(L_1, L_2, \cdots, L_r)$ 可以用一个 $m \times N$ 秩为 m 的矩阵 $\mathfrak{A}$ 代表. 但是，若令 $m \times m$ 非异方阵

$$Q = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \\ \begin{array}{cccc} m_1 & m_2 & \cdots & m_r \end{array} & \end{array}, \quad (1.1.6)$$

则由于

$$Q\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}Q_{11}\mathfrak{A}_1\\ Q_{21}\mathfrak{A}_1+Q_{22}\mathfrak{A}_2\\ \vdots\\ Q_{r1}\mathfrak{A}_1+Q_{r2}\mathfrak{A}_2+\cdots+Q_{rr}\mathfrak{A}_r\end{pmatrix},$$

可知 $L_1,L_2,\cdots,L_r$ 分别由下面各式定义：

$$L_1:\quad Q_{11}\mathfrak{A}_1z'=0,$$

$$L_2:\quad \begin{pmatrix}Q_{11}\mathfrak{A}_1\\ Q_{21}\mathfrak{A}_1+Q_{22}\mathfrak{A}_2\end{pmatrix}z'=0,$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$L_r:\quad Q\mathfrak{A}z'=0,$$

即 $Q\mathfrak{A}$ 代表同一旗 $(L_1,L_2,\cdots,L_r)$.

反之，若有两个秩为 m 的 $m\times N$ 矩阵 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$ 代表同一的 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 的旗 $(L_1,\cdots,L_r)$，则必有(1.1.6)形式的非异方阵 Q 使得

$$\mathfrak{B}=Q\mathfrak{A}.$$

实际上，当 $r=1$ 时已知上面的断言为真. 假定 $(r-1)$-旗时为真，现考虑 r-旗情形：

$$\mathfrak{A}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{A}_2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}m_1+\cdots+m_{r-1}\\ m_r\end{array}\end{array},\qquad \mathfrak{B}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_1\\ \mathfrak{B}_2\end{pmatrix} & \begin{array}{c}m_1+\cdots+m_{r-1}\\ m_r\end{array}\end{array}.$$

由于 $\mathfrak{A}_1$ 与 $\mathfrak{B}_1$ 代表同一个 $(r-1)$-旗 $(L_1,\cdots,L_{r-1})$，根据归纳法假设，存在非异方阵

$$Q_1=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}Q_{11}&0&\cdots&0\\ Q_{21}&Q_{22}&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{r-1,1}&Q_{r-1,2}&\cdots&Q_{r-1,r-1}\end{pmatrix} & \begin{array}{c}m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_{r-1}\end{array}\\ \begin{array}{cccc}m_1&m_2&\cdots&m_{r-1}\end{array} & \end{array},$$

使得

$$\mathfrak{B}_1=Q_1\mathfrak{A}_1.$$

存在 $N\times N$ 非异方阵 $\mathfrak{P}$ 使得

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}_{11}, 0)\mathfrak{P},$$

其中 $\mathfrak{A}_{11}$是$(m-m_r)$阶非异方阵，于是

$$\mathfrak{A}z' = \begin{pmatrix} (\mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{A}_2\mathfrak{P}^{-1} \end{pmatrix}\mathfrak{P}z' = 0 \tag{1.1.7}$$

与

$$\mathfrak{B}z' = \begin{pmatrix} (Q_1\mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{B}_2\mathfrak{P}^{-1} \end{pmatrix}\mathfrak{P}z' = 0 \tag{1.1.8}$$

代表同一 L_r 平面. 令

$$w' = \mathfrak{P}z',$$

$$w = (w_{(1)}, w_{(2)}),$$

其中

$$w_{(1)} = (w_1, \cdots, w_{m-m_r}), \quad w_{(2)} = (w_{m-m_r+1}, \cdots, w_N).$$

并记

$$\mathfrak{A}_2\mathfrak{P}^{-1} = (\underset{m-m_r}{\mathfrak{A}_{21}}, \underset{m_r+m_{r+1}}{\mathfrak{A}_{22}}) \quad m_r \quad ,$$

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{P}^{-1} = (\underset{m-m_r}{\mathfrak{B}_{21}}, \underset{m_r+m_{r+1}}{\mathfrak{B}'_{22}}) \quad m_r \quad .$$

于是方程(1.1.7)与(1.1.8)分别化为

$$w'_{(1)} = 0, \ \mathfrak{A}_{22}w'_{(2)} = 0$$

与

$$w'_{(1)} = 0, \ \mathfrak{B}'_{22}w'_{(2)} = 0.$$

这是代表同一平面，因此有非异的 $m_r \times m_r$ 方阵 Q_2 使

$$\mathfrak{B}_{22} = Q_2\mathfrak{A}_{22}.$$

由此知

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} Q_1\mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & Q_2\mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}\mathfrak{P} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ Q_2^{-1}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}\mathfrak{P} \\
&= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\mathfrak{A}_{21} - Q_2^{-1}\mathfrak{B}_{21})\mathfrak{A}_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix}\mathfrak{P}
\end{aligned}$$

$$= Q\mathfrak{A},$$

其中 Q 为(1.1.6)的形式.这证明了断言.

综上所述,旗空间 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$ 可以如下定义:令 $E(m;n)$ 为所有 $m\times(m+n)$ 秩为 m 的矩阵所成的空间,

$$m+n=N. \tag{1.1.9}$$

令 $\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$ 为(1.1.6)的形式的非异方阵所成的群.$E(m;n)$ 中两个矩阵 $\mathfrak{Z}_1$ 与 $\mathfrak{Z}_2$ 称为等价,即

$$\mathfrak{Z}_1\sim\mathfrak{Z}_2,$$

当且仅当有一 $Q\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$ 使得

$$\mathfrak{Z}_2=Q\mathfrak{Z}_1.$$

按此等价关系把 $E(m;n)$ 的矩阵分为等价类,每一等价类一一对应一个 r-旗,故等价类所成的空间即是旗空间 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$, $m_{r+1}=n$, $m_1+\cdots+m_r=m$. 如 $\mathfrak{Z}\in E(m;n)$,以 $[\mathfrak{Z}]$ 表示 $\mathfrak{Z}$ 所属的等价类,即 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的一点或一旗.当 $r=1$ 时, $\mathfrak{F}(m_1,m_2)=\mathfrak{P}(m;n)$ 是 Grassmann 流形.

§1.2　旗空间的复结构

我们有自然的投影

$$\pi: E(m;n)\to\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1}).$$

如 $[\mathfrak{Z}]\in\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_{r+1})$,则 $\pi^{-1}([\mathfrak{Z}])$ 是 $E(m;n)$ 中的点集

$$\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r)}.$$

我们可定义 $\mathfrak{F}$ 的开集,如果它的原像集合是开的,这样引进的 $\mathfrak{F}$ 拓扑是 Hausdorff 拓扑.因为如 $[\mathfrak{Z}]\neq[\mathfrak{W}]$,则

$$Q_1\mathfrak{Z}\neq Q_2\mathfrak{W},\ \forall\ Q_1、Q_2\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r).$$

在《典》著中证明 Grassmann 空间 $\mathfrak{P}(m;n)$ 是 Haussdorff 空间的过程中,已证明了有分别包含 $\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q\in\Gamma(m)}$ 与 $\{Q\mathfrak{W}\}_{Q\in\Gamma(m)}$ 两集合的开集,它们对 $\mathfrak{P}(m;n)$ 的投影集合是两个非空的互不相交的开集.此两个开集在 π 的投影下,必然是互不相交的,因为 $\Gamma(m_1,\cdots,m_r)$

是 $\Gamma(m)$ 的子群. 现在引进 $\mathfrak{F}(m_1,\cdots,m_r,m_{r+1})$ 的坐标邻域. $E(m;n)$ 中的点

$$\mathfrak{A}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}\mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{A}_2\\ \vdots\\ \mathfrak{A}_r\end{pmatrix}\\ N\end{array}\begin{array}{c}m_1\\ m_2\\ \vdots\\ m_r\\ \end{array}\tag{1.2.1}$$

称为属于点集 $M(\alpha^1,\cdots,\alpha^r)$，其中每一个 α^j 是一组整数，$\alpha^j=(\alpha_1^j,\cdots,\alpha_{m_j}^j)$，适合

$$1\leqslant\alpha_1^j<\cdots<\alpha_{m_j}^j\leqslant N\quad(j=1,\cdots,r).\tag{1.2.2}$$

所有 $\alpha_k^j(k=1,\cdots,m_j;j=1,\cdots,r)$ 共有 $m_1+\cdots+m_r=m$ 个，是整数 $1,\cdots,N$ 中取 m 个，但一定要符合条件(1.2.2). 子矩阵 $\mathfrak{A}_j$ 的第 $\alpha_1^j,\cdots,\alpha_{m_1}^j$ 列所成的 $m_j\times m_j$ 子方阵要求是非异的. 于是有 $N\times N$ 排列方阵 $P(\alpha^1)$ 使得

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}Q_{11}(I,Z_1)\\ \mathfrak{A}_2P^{\dagger}\ (\alpha^1)\\ \vdots\\ \mathfrak{A}_rP^{\dagger}\ (\alpha^1)\end{pmatrix}P(\alpha^1),$$

其中 Q_{11} 是 $m_1\times m_1$ 非异方阵，$P^{\dagger}=\overline{P}'$. 注意排列方阵 P 通常是指一非异方阵，其每一行的元素只有一个是 1，其他为 0. 但是 $\det P$ 可能是 -1. 在这里的排列方阵是要求其行列式必须为正，即当 P 的行列式为 1 时，就取之为 P. 如 P 的行列式为 -1 时，把 P 以 $e^{\pi i/N}P$ 代替，后者是酉方阵. 我们以 P^+ 表示矩阵 P 的复共轭及转置.

取 $m\times m$ 方阵

$$Q_1=\begin{pmatrix}Q_{11}&0\\ *&I\end{pmatrix}\in\Gamma(m_1,\cdots,m_r),$$

使得

$$Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mathfrak{A}_r(2) \end{pmatrix} P(\alpha^1).$$

此时 $\mathfrak{A}_2(2)$ 的第 $\alpha_1^2, \cdots, \alpha_{m_2}^2$ 列所成 $m_2 \times m_2$ 方阵要求其是非异的，因此存在 $(N-m_1)\times(N-m_1)$ 排列方阵 $P_2(\alpha^2)$ 使得

$$\mathfrak{A}_2(2) = Q_{22}(I, Z_2)P_2(\alpha^2)^{\dagger},$$

其中 Q_{22} 为 $m_2 \times m_2$ 非异方阵. 取 $m \times m$ 方阵

$$Q_2 = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & * & I \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ m_3+\cdots+m_r \end{array} \in \Gamma(m_1, \cdots, m_r),$$

使得

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1P_2(\alpha^2)^{\dagger} \\ 0 & (I, Z_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & (0, \mathfrak{A}_r(3)) \end{pmatrix} P(\alpha^2)P(\alpha^1),$$

其中
$$P(\alpha^2) = \begin{pmatrix} I^{(m_1)} & 0 \\ 0 & P_2(\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

如此继续，最终有 $m \times m$ 方阵

$$Q = Q_1 \cdots Q_r \in \Gamma(m_1, \cdots, m_r)$$

及
$$P(\alpha) = P(\alpha^r)\cdots P(\alpha^1),$$

其中 $\alpha = (\alpha^1, \cdots, \alpha^r)$，使得

$$\mathfrak{A} = QZP(\alpha),$$

其中

$$Z = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} I & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1,r+1} \\ 0 & I & Z_{23} & \cdots & Z_{2r} & Z_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & Z_{r,r+1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_r & m_{r+1} \end{array} & \end{array}. \quad (1.2.3)$$