

现代数学丛书

陆启铿 著

典型流形 与典型域

新篇

THE NEW RESULTS
OF THE CLASSICAL
MANIFOLDS AND
THE CLASSICAL
DOMAINS

LU QIKENG

上海科学技术出版社

· 现代数学丛书 ·

典型流形与典型域

新 篇

陆启铿 著

上海科学技术出版社

陆启铿教授赠书

97.7

1997年5月

责任编辑 赵序明

·现代数学丛书·

典型流形与典型域

新篇

陆启铿 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 常熟市第六印刷厂印刷

开本 787×1092 小16开 印张 24 插页 4 字数 312,000

1997年5月第1版 1997年5月第1次印刷

印数 1-1,200

ISBN 7-5323-3916-5/O·198

定价: 44.00元

出版说明

从 60 年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价.原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念.由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作.充实编委会的力量.考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于 1990 年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18 位著名数学家任委员.编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见.

上海科学技术出版社

序

自 1963 年拙著《典型流形与典型域》出版之后, 30 年来发生了巨大变化. 由于众所周知的客观原因, 1966 年以后, 多复变数函数论方面的研究工作停顿了十多年, 这个领域的专家学者, 包括华罗庚教授的学生和他的学生的学生全部转了行. 改革开放之后, 研究多复变数函数论的队伍不但复苏, 而且更加壮大, 研究范围也更加宽广而深入. 作者认为, 现在到了有必要把作者在典型流形与典型域方面自 1963 年到 1994 年的工作做一个总结的时候了, 此书称为新篇, 因为内容上与旧书《典型流形与典型域》没有重复之处, 但经常引用旧书的符号与结果.

本书中所反映的 1991 年以后发表的及尚未发表的研究工作, 得到国家自然科学基金委员会重点项目《多复变数全纯映照理论》及中国科学院重点项目《现代数学物理的若干问题》的支持. 在此谨表示衷心谢意.

作者感谢汕头大学提供给我一个安静与优美的环境, 使得作者能够全力写作 5 个月, 得以完成此书. 另外, 感谢张芳小姐把书稿用计算机打印出来, 孙晓东先生帮助部分校对工作.

陆启铿

1994 年 12 月于汕头大学

目 录

序

第 1 章 旗流形	1
§ 1.1 r -旗流形	1
§ 1.2 旗空间的复结构	5
§ 1.3 旗流形是齐性复流形	14
§ 1.4 旗流形的不变微分度量	30
第 2 章 旗域	39
§ 2.1 一些引理	39
§ 2.2 r -旗域	60
第 3 章 各种积分表示	78
§ 3.1 Green 函数与 Cauchy 公式	78
§ 3.2 Green 函数的一些具体例子	88
§ 3.3 Cauchy-Fantappiè 公式与 $\bar{\partial}$ 方程解的积分表示	99
§ 3.4 一种多项式域的积分表示	106
§ 3.5 Cauchy-Szegő 核与级数展开	111
§ 3.6 中值定理与代表域	123
第 4 章 各种积分表示的估值	137
§ 4.1 Bergman 积分的估值	138
§ 4.2 用 Cauchy-Fantappiè 公式推导华罗庚的 Cauchy 公式	164
§ 4.3 Cauchy-Szegő 积分的估值	181
§ 4.4 Hanack 不等式	187
§ 4.5 典型域的 $\bar{\partial}$ 方程解的估值	194
第 5 章 内切超圆坐标与积分变换	200

§ 5.1	内切超圆坐标	204
§ 5.2	$\mathfrak{R}_R(m, n)$ 的不变的方程组	220
§ 5.3	不变度量的 Laplace-Beltrami 算子	235
§ 5.4	积分变换	252
§ 5.5	$\mathfrak{R}_R(m, n)$ 的热核	267
第 6 章	复超球及其他	281
§ 6.1	复 Grassmann 流形的调和式	281
§ 6.2	复超球的内切超圆坐标	292
§ 6.3	$\mathfrak{R}_I(m)$ 的热核	306
§ 6.4	其他超球及对偶空间	317
附录		343
参考文献		362
索引		367

CONTENTS

Preface

Chapter 1. The Flag Manifolds	1
§ 1.1 r -flag manifolds	1
§ 1.2 The complex structure of the flag manifold	5
§ 1.3 Flag manifold as a homogeneous manifold	14
§ 1.4 The invariant differential metrics of a flag manifold	30
Chapter 2. The Flag Domains	39
§ 2.1 Some lemmas	39
§ 2.2 r -flag domains	60
Chapter 3. The Various Integral Representations	78
§ 3.1 Green function and Cauchy formula	78
§ 3.2 Some examples of Green functions	88
§ 3.3 Cauchy-Fantappiè formula and integral representation of the solution of the $\bar{\partial}$ -equation	99
§ 3.4 The integral representation of a kind of polynomial domains	106
§ 3.5 Cauchy-Szegö kernel and series development	111
§ 3.6 The mean value theorem and the representative domains...	123
Chapter 4. The Estimate of Various Integral Representations	137
§ 4.1 The estimate of Bergman integral	138
§ 4.2 Hua's Chachy formula deduced from the Cauchy-Fantappiè formula	164

§ 4. 3	The estimate of Cauchy-Szegő integral	181
§ 4. 4	Hanack inequality	187
§ 4. 5	The estimate of the solution of $\bar{\partial}$ -equation of the classical domains	194
Chapter 5.	The Horo-hypercircle Coordinates and Integral Transformations	200
§ 5. 1	The horo-hypercircle coordinates	204
§ 5. 2	The invariant differential equations of $\mathfrak{R}_R(m, n)$	220
§ 5. 3	The Laplace-Beltrami operator of an invariant metric	235
§ 5. 4	The integral transformations	252
§ 5. 5	The heat kernel of $\mathfrak{R}_R(m, n)$	267
Chapter 6.	Complex Hyperballs and Miscellanies	281
§ 6. 1	The harmonic forms of a complex Grassmann manifold	281
§ 6. 2	The horo-hypercircle coordinates of complex hyperballs	292
§ 6. 3	The heat kernel of $\mathfrak{R}_I(m)$	306
§ 6. 4	The other hyperballs and their dual spaces	317
Appendix		343
References		362
Index		367

第 1 章

旗 流 形

在《典型流形与典型域》专著^[38]中(以后简称《典》著),我们是从 Grassmann 流形开始讨论正文的,现在在这新篇中则从 r -旗流形开始. r -旗流形是 Grassmann 流形的推广,1-旗流形就是 Grassmann 流形.按《典》著中的定义, r -旗流形也是典型流形(从下文便可以知道),不同之处是 1-旗流形是对称空间, $r > 1$ 时, r -旗流形不是对称空间.

$r (> 1)$ 旗流形的表达比 Grassmann 流形复杂得多. 我们之所以不厌其烦来讨论它们,首先是由于现在流行的数学物理中, r -旗流形起着重要作用,其次是《典》著中的方法可应用于旗流形.

§ 1.1 r -旗流形

在《典》著中讨论的 Grassmann 流形是复的 Grassmann 流形,虽然那里所用的方法同样适用于实的 Grassmann 流形. 这里讨论的旗流形也是复的旗流形,虽然所用的方法亦适用于实的旗流形.

在《典》著的 § 1.1 之末提到,Grassmann 流形 $\mathfrak{B}(m; n)$ 即 C^{m+n} 中过原点的所有 n 维平面,亦即 C^{m+n} 中所有 n 维线性子空间. 现在假定 L_1 是 C^{m+n} 中的一个 $N - m_1$ 维线性子空间($N = m + n$), L_2 是 L_1 的 $N - m_1 - m_2$ 维线性子空间, \dots , L_r 是 L_{r-1} 的 $N - m_1 - \dots - m_r$ 维线性子空间, 即有

$$C^N \supset L_1 \supset L_2 \supset \dots \supset L_r,$$

则 (L_1, L_2, \dots, L_r) 叫做 C^N 的一个 r -旗. 当 m_1, m_2, \dots, m_r 是固定的正整数,所有 r -旗所成的空间叫 r -旗空间,以 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_r, m_{r+1})$

表示之,其中

$$m_{r+1} = N - m = n, \quad m = m_1 + \cdots + m_r. \quad (1.1.1)$$

现在以《典》著中的方法描述 r -旗流形. 令

$$z = (z_1, \cdots, z_N) \in C^N$$

是一行向量, z' 表示 z 的转置. L_1 是 C^N 的子空间, 即是过 C^N 原点的一个 $N - m_1$ 维平面, 亦即 C^N 中的 z 点适合一组 m_1 个线性方程:

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \quad (1.1.2)$$

其中 \mathfrak{A}_1 是 $m_1 \times N$ 常数矩阵, 其秩为 m_1 . L_2 是 $N - m_1$ 维线性空间 L_1 的子空间, 即是 C^N 中的 z 点, 除了适合上面的线性方程之外, 还要适合 m_2 个线性方程

$$\mathfrak{A}_2 z' = 0, \quad (1.1.3)$$

其中 \mathfrak{A}_2 是 $m_2 \times N$ 常数矩阵, 使得 $(m_1 + m_2) \times N$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \end{pmatrix}$$

的秩为 $m_1 + m_2$. 如此继续, L_r 作为 L_{r-1} 的线性子空间, 即 C^N 中的 z 点适合方程

$$\mathfrak{A}_1 z' = 0, \quad \mathfrak{A}_2 z' = 0, \quad \cdots, \quad \mathfrak{A}_r z' = 0 \quad (1.1.4)$$

所成的平面, 其中 \mathfrak{A}_r 是 $m_r \times N$ 常数矩阵, 使得

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \\ N \end{matrix} \quad (1.1.5)$$

的秩为 $m = m_1 + \cdots + m_r$. 因此, 一旗 (L_1, L_2, \cdots, L_r) 可以用一个 $m \times N$ 秩为 m 的矩阵 \mathfrak{A} 代表. 但是, 若令 $m \times m$ 非异方阵

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \cdots & Q_{rr} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix}, \quad (1.1.6)$$

$m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_r$

则由于

$$Q\mathcal{A} = \begin{pmatrix} Q_{11}\mathcal{A}_1 \\ Q_{21}\mathcal{A}_1 + Q_{22}\mathcal{A}_2 \\ \vdots \\ Q_{r1}\mathcal{A}_1 + Q_{r2}\mathcal{A}_2 + \cdots + Q_{rr}\mathcal{A}_r \end{pmatrix},$$

可知 L_1, L_2, \dots, L_r 分别由下面各式定义:

$$\begin{aligned} L_1: & \quad Q_{11}\mathcal{A}_1 z' = 0, \\ L_2: & \quad \begin{pmatrix} Q_{11}\mathcal{A}_1 \\ Q_{21}\mathcal{A}_1 + Q_{22}\mathcal{A}_2 \end{pmatrix} z' = 0, \\ & \quad \vdots \\ L_r: & \quad Q\mathcal{A} z' = 0, \end{aligned}$$

即 $Q\mathcal{A}$ 代表同一旗 (L_1, L_2, \dots, L_r) .

反之,若有两个秩为 m 的 $m \times N$ 矩阵 \mathcal{A} 与 \mathfrak{B} 代表同一的 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_{r+1})$ 的旗 (L_1, \dots, L_r) , 则必有 (1. 1. 6) 形式的非异方阵 Q 使得

$$\mathfrak{B} = Q\mathcal{A}.$$

实际上,当 $r=1$ 时已知上面的断言为真. 假定 $(r-1)$ -旗时为真, 现考虑 r -旗情形:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 + \cdots + m_{r-1} \\ m_r \end{matrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 + \cdots + m_{r-1} \\ m_r \end{matrix}.$$

由于 \mathcal{A}_1 与 \mathfrak{B}_1 代表同一个 $(r-1)$ -旗 (L_1, \dots, L_{r-1}) , 根据归纳法假设, 存在非异方阵

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r-1,1} & Q_{r-1,2} & \cdots & Q_{r-1,r-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{r-1} \end{matrix},$$

$m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_{r-1}$

使得

$$\mathfrak{B}_1 = Q_1\mathcal{A}_1.$$

存在 $N \times N$ 非异方阵 \mathfrak{B} 使得

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}_{11}, 0)\mathfrak{B},$$

其中 \mathfrak{A}_{11} 是 $(m-m_r)$ 阶非异方阵, 于是

$$\mathfrak{A}_{z'} = \begin{pmatrix} (\mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}^{-1} \end{pmatrix} \mathfrak{B}_{z'} = 0 \quad (1.1.7)$$

与

$$\mathfrak{B}_{z'} = \begin{pmatrix} (Q_1 \mathfrak{A}_{11}, 0) \\ \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}^{-1} \end{pmatrix} \mathfrak{B}_{z'} = 0 \quad (1.1.8)$$

代表同一 L_r 平面. 令

$$\begin{aligned} w' &= \mathfrak{B}_{z'}, \\ w &= (w_{(1)}, w_{(2)}), \end{aligned}$$

其中

$$w_{(1)} = (w_1, \dots, w_{m-m_r}), \quad w_{(2)} = (w_{m-m_r+1}, \dots, w_N).$$

并记

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \\ m-m_r & m_r+m_{r+1} \end{pmatrix} \quad m_r, \\ \mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \\ m-m_r & m_r+m_{r+1} \end{pmatrix} \quad m_r. \end{aligned}$$

于是方程(1.1.7)与(1.1.8)分别化为

$$w'_{(1)} = 0, \quad \mathfrak{A}_{22} w'_{(2)} = 0$$

与

$$w_{(1)} = 0, \quad \mathfrak{B}_{22} w_{(2)} = 0.$$

这是代表同一平面, 因此有非异的 $m_r \times m_r$ 方阵 Q_2 使

$$\mathfrak{B}_{22} = Q_2 \mathfrak{A}_{22}.$$

由此知

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} Q_1 \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{B}_{21} & Q_2 \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{B} \\ &= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ Q_2^{-1} \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{B} \\ &= \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -(\mathfrak{A}_{21} - Q_2^{-1} \mathfrak{B}_{21}) \mathfrak{A}_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \mathfrak{B} \end{aligned}$$

$$= Q\mathfrak{A},$$

其中 Q 为 (1.1.6) 的形式. 这证明了断言.

综上所述, 旗空间 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_{r+1})$ 可以如下定义: 令 $E(m; n)$ 为所有 $m \times (m+n)$ 秩为 m 的矩阵所成的空间,

$$m + n = N. \quad (1.1.9)$$

令 $\Gamma(m_1, \dots, m_r)$ 为 (1.1.6) 的形式的非异方阵所成的群. $E(m; n)$ 中两个矩阵 \mathfrak{Z}_1 与 \mathfrak{Z}_2 称为等价, 即

$$\mathfrak{Z}_1 \sim \mathfrak{Z}_2,$$

当且仅当有一 $Q \in \Gamma(m_1, \dots, m_r)$ 使得

$$\mathfrak{Z}_2 = Q\mathfrak{Z}_1.$$

按此等价关系把 $E(m; n)$ 的矩阵分为等价类, 每一等价类一一对应一个 r -旗, 故等价类所成的空间即是旗空间 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_r, m_{r+1})$, $m_{r+1} = n, m_1 + \dots + m_r = m$. 如 $\mathfrak{Z} \in E(m; n)$, 以 $[\mathfrak{Z}]$ 表示 \mathfrak{Z} 所属的等价类, 即 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_r, m_{r+1})$ 的一点或一旗. 当 $r=1$ 时, $\mathfrak{F}(m_1, m_2) = \mathfrak{B}(m; n)$ 是 Grassmann 流形.

§ 1.2 旗空间的复结构

我们有自然的投影

$$\pi : E(m; n) \rightarrow \mathfrak{F}(m_1, \dots, m_{r+1}).$$

如 $[\mathfrak{Z}] \in \mathfrak{F}(m_1, \dots, m_{r+1})$, 则 $\pi^{-1}([\mathfrak{Z}])$ 是 $E(m; n)$ 中的点集

$$\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q \in \Gamma(m_1, \dots, m_r)}.$$

我们可定义 \mathfrak{F} 的开集, 如果它的原像集合是开的, 这样引进的 \mathfrak{F} 拓扑是 Hausdorff 拓扑. 因为如 $[\mathfrak{Z}] \neq [\mathfrak{B}]$, 则

$$Q_1\mathfrak{Z} \neq Q_2\mathfrak{B}, \quad \forall Q_1, Q_2 \in \Gamma(m_1, \dots, m_r).$$

在《典》著中证明 Grassmann 空间 $\mathfrak{B}(m; n)$ 是 Hausdorff 空间的过程中, 已证明了有分别包含 $\{Q\mathfrak{Z}\}_{Q \in \Gamma(m)}$ 与 $\{Q\mathfrak{B}\}_{Q \in \Gamma(m)}$ 两集合的开集, 它们对 $\mathfrak{B}(m; n)$ 的投影集合是两个非空的互不相交的开集. 此两个开集在 π 的投影下, 必然是互不相交的, 因为 $\Gamma(m_1, \dots, m_r)$

是 $\Gamma(m)$ 的子群. 现在引进 $\mathfrak{F}(m_1, \dots, m_r, m_{r+1})$ 的坐标邻域 $E(m; n)$ 中的点

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \mathfrak{A}_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \quad (1.2.1)$$

N

称为属于点集 $M(\alpha^1, \dots, \alpha^r)$, 其中每一个 α^j 是一组整数, $\alpha^j = (\alpha_1^j, \dots, \alpha_{m_j}^j)$, 适合

$$1 \leq \alpha_1^j < \dots < \alpha_{m_j}^j \leq N \quad (j = 1, \dots, r). \quad (1.2.2)$$

所有 $\alpha_i^j (k=1, \dots, m_j; j=1, \dots, r)$ 共有 $m_1 + \dots + m_r = m$ 个, 是整数 $1, \dots, N$ 中取 m 个, 但一定要符合条件 (1.2.2). 子矩阵 \mathfrak{A}_j 的第 $\alpha_1^j, \dots, \alpha_{m_j}^j$ 列所成的 $m_j \times m_j$ 子方阵要求是非异的. 于是有 $N \times N$ 排列方阵 $P(\alpha^1)$ 使得

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} Q_{11}(I, Z_1) \\ \mathfrak{A}_2 P^{\dagger}(\alpha^1) \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_r P^{\dagger}(\alpha^1) \end{pmatrix} P(\alpha^1),$$

其中 Q_{11} 是 $m_1 \times m_1$ 非异方阵, $P^{\dagger} = \overline{P^t}$. 注意排列方阵 P 通常是指一非异方阵, 其每一行的元素只有一个是 1, 其他为 0. 但是 $\det P$ 可能是 -1 . 在这里的排列方阵是要求其行列式必须为正, 即当 P 的行列式为 1 时, 就取之为 P . 如 P 的行列式为 -1 时, 把 P 以 $e^{\pi i/N} P$ 代替, 后者是酉方阵. 我们以 P^+ 表示矩阵 P 的复共轭及转置.

取 $m \times m$ 方阵

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ * & I \end{pmatrix} \in \Gamma(m_1, \dots, m_r),$$

使得

$$Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1 \\ 0 & \mathfrak{A}_2(2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \mathfrak{A}_r(2) \end{pmatrix} P(\alpha^1).$$

此时 $\mathfrak{A}_2(2)$ 的第 $\alpha_1^2, \dots, \alpha_{m_2}^2$ 列所成 $m_2 \times m_2$ 方阵要求其是非异的, 因此存在 $(N-m_1) \times (N-m_1)$ 排列方阵 $P_2(\alpha^2)$ 使得

$$\mathfrak{A}_2(2) = Q_{22}(I, Z_2)P_2(\alpha^2)^\dagger,$$

其中 Q_{22} 为 $m_2 \times m_2$ 非异方阵. 取 $m \times m$ 方阵

$$Q_2 = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 \\ 0 & * & I \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 + \dots + m_r \end{matrix} \in \Gamma(m_1, \dots, m_r),$$

使得

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} I & Z_1P_2(\alpha^2)^\dagger \\ 0 & (I, Z_2) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & (0, \mathfrak{A}_r(3)) \end{pmatrix} P(\alpha^2)P(\alpha^1),$$

其中
$$P(\alpha^2) = \begin{pmatrix} I^{(m_1)} & 0 \\ 0 & P_2(\alpha^2) \end{pmatrix}.$$

如此继续, 最终有 $m \times m$ 方阵

$$Q = Q_1 \cdots Q_r \in \Gamma(m_1, \dots, m_r)$$

及
$$P(\alpha) = P(\alpha^r) \cdots P(\alpha^1),$$

其中 $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^r)$, 使得

$$\mathfrak{A} = QZP(\alpha),$$

其中

$$Z = \begin{pmatrix} I & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1r} & Z_{1,r+1} \\ 0 & I & Z_{23} & \cdots & Z_{2r} & Z_{2,r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & Z_{r,r+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{matrix} \quad (1.2.3)$$

$m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad \cdots \quad m_r \quad m_{r+1}$