译 者 的 话

非保守系统的运动从稳定态转变成非稳定态，常常是一个动力学过程，因此，近年来已普遍采用了动力学的稳定性分析手段而不再限于静态办法．对多自由度线性自治动力系统，它的运动稳定性问题，常被归结成如下方程：

$$\boldsymbol{A}\ddot{x}+\boldsymbol{B}\dot{x}+\boldsymbol{C}x=0$$

其中，阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是一般的实和/或复数阵，不限于正定、对称或半正定等，甚至 $\boldsymbol{A}$ 阵也不必正定，而振动方程只是它的特款．

虽然线性系统动力稳定性问题早就引起相当注意，但从数学上系统地研究上述方程，还是近期的事．其主要推动力在于生产实践：气动弹性和热弹性中的颤振失稳现象；卫星姿态稳定性；带陀螺系统的动力稳定性以及动力屈曲等问题，都导致上述方程．从而促使人们系统地对它展开研究．若系统含有 n 个动力参数，则问题将在 n 维参数空间中展开，从而构成多参数系统稳定性分析．

本书深入浅出地总结介绍了这方面的近代研究成果，自成系统，材料丰富，文献齐全，是一本很好的入门读物，其具体特点如下：

1．采用近代矩阵论工具，系统叙述了保守和非保守、线性、自治多参数系统运动稳定性的普遍理论．

2．以较多篇幅介绍了伪保守系统、陀螺系统和循环系统运动稳定性理论的新成果．

3．本书写得具有教材和专著双重风格，每章附有相当数量

的例题和习题，书末附有129篇近期参考文献，以便读者专题深入研究.

《应用力学评论》(Applied Mechanics Reviews)1979年34卷第4期对本书的评价是"本书适合于应用数学、应用力学、工程各科和系统工程等方面的研究生和高年级大学生，涉及动力稳定性方面的研究人员可把它作为一本简明的资料".

西北工业大学赵令诚教授在百忙中详细校阅了本书的全部译稿，提出了不少修改意见并直接作了润色，在此表示衷心感谢.

译者　1984年2月

序　言

系统通常受几个独立参数的影响，而且，当这些参数变化时，常需确定或预示从初始稳态出发的系统的特性．若系统有势(梯度系统)，比如与保守问题关联的总势能，则系统的特性可用静态方法方便地加以研究．但对非梯度系统，稳定性研究常需用动力学方法．事实上，稳定性的略普诺夫(Lyapunov)定义是动力学定义，而且在一般情况下，采用动力学准则反倒是自然的．本书主要讨论自治系统的动力特性和稳定性，并把前一专著《弹性稳定性的非线性理论》中引入的保守系统的某些基本概念推广到非梯度系统中来．

本书主要内容可概述如下：

1．提出了离散自治多参数系统自由振动和稳定性的普遍线性理论．

2．把讨论的系统进一步分成几个有明确定义的类，并系统地阐述有关这几类系统振动和稳定性的各种现象．类似地，也阐述了有关各类系统的基本性质和特性的若干定理．这些定理既有理论价值又有实用价值，并常常用于特征面和稳定性边界的上界和(或)下界的估计中．

3．例子虽都取材于力学，但只要对基本变数和参数作适当的说明，公式的普遍性使得本理论可应用于多种学科．实际上，这也是我们的部分动机．

因此，希望本书内容能使一般应用数学、物理和工程各科的学生和研究人员都感兴趣．本书适于选用为研究生和大学高年

级学生的教本.

理论的叙述主要借助于矩阵论. 第一章是为这方面提供一个相当完整的简单扼要的参考资料而写的. 该章内容是根据后面章节的需要而选取的. 此外还加进一些在一般教科书中尚未使用的较新材料, 附在一定章节末尾的练习是作为全书的有机部分安排的, 而在需要时可自由引用. 读者可从第二章开始念这本书. 这一章涉及基本定义和稳定性准则, 同时把讨论的系统作了适当分类. 其余各章均依第二章指出的方向展开, 逐个论述各个已有明确定义的类. 每章从一般讨论开始, 并以扼要讨论耗散力对稳定特性影响的简单章节作结尾. 例子专门选得用于说明各种概念、方法和现象. 本书读者应具有相当于工科高年级大学生应掌握的微积分和力学基础.

我应向本丛书主编 H. 莱普霍尔茨(Leipholz)博士致意, 感谢他的鼓励. 感谢 R. 普劳特(Plaut)博士仔细地阅读了原稿并提出了许多有价值的建议. 也谢谢 V. 曼丹狄 (Mandadi) 博士帮助我准备底稿和 L. 霍特琳夫人熟练的打字. 最后, 对加拿大国家研究委员会和德意志联邦共和国洪堡基金会的支持表示感谢.

达姆施塔特　　　　K. 侯赛因

1977年5月

目　录

第一章　数学准备……………………………………………………1
1.1 向量和矩阵 ……………………………………………1
1.2 双线性型和二次型 …………………………………9
1.3 矩阵的典则型……………………………………………11
1.4 可对称化的矩阵…………………………………………24
1.5 特征值的极值性质………………………………………27
1.6 西尔威斯特惯性定律和它的定量表示………………33

第二章　稳定性的基本概念……………………………………37
2.1 引论…………………………………………………………37
2.2 略普诺夫稳定性定义……………………………………39
2.3 线性系统和稳定性准则…………………………………42
2.4 系统的分类………………………………………………53
2.5 多参数系统和有关定义…………………………………61

第三章　保守系统………………………………………………65
3.1 保守系统的稳定性………………………………………65
3.2 基本特征面的凸性………………………………………68
3.3 瑞利商的应用……………………………………………73
3.4 实际意义…………………………………………………78
3.5 阻尼的作用………………………………………………81
3.6 例：一个两自由度模型…………………………………85

3.7 连续系统……87

第四章 伪保守系统……91
4.1 引言……91
4.2 系统的性质……92
4.3 基本特征面的凸性……95
4.4 下界估计……97
4.5 实际考虑……101
4.6 阻尼的作用……104
4.7 例：普夫吕格尔柱……106

第五章 陀螺系统……112
5.1 陀螺保守系统……113
5.2 特征曲线……117
5.3 颤振不稳定性……122
5.4 多参数的陀螺保守系统……124
5.5 特征值问题的标准形式……126
5.6 旋转系统……132
5.7 例1：旋转模型……137
5.8 例2：旋转的柔轴……143
5.9 例3：流体输运管道……153
5.10 耗散陀螺系统……156
5.11 耗散在旋转系统稳定性边界上的作用……162
5.12 例4：耗散的旋转柔轴……166

第六章 循环系统……171
6.1 循环系统的性质……171

6.2 颤振不稳定性和广义瑞利商的极值性质 …………177
6.3 颤振边界和发散边界的凸性 ………………………182
6.4 例子和讨论 ……………………………………………190
6.5 连续系统稳定性分析的一个直接方法 ……………193
6.6 速度相关力的作用 …………………………………202

参考文献 ………………………………………………………206
人名译名索引 …………………………………………………212

第一章　数学准备

1.1　向量和矩阵

在本书中，矩阵论将为分析提供最基本的工具． 为以后章节中建立稳定性理论，本章则打算作为简洁而合宜的参考材料．显然，在如此有限篇幅中不能指望对矩阵论作系统介绍；事实上，将仅包括与本书内容有关的选择性专题． 有很多好的讨论矩阵论的书，读者可以参看甘特马赫(Gantmacher)[1]，贝尔曼(Bellman)[2] 和兰开斯特(Lancaster)[3] 关于这方面的权威性著作．此处认为读者已有微积分的扎实基础，并熟悉行列式．

矩阵是一组数字或函数的长方排列，表达为记号

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

该排列中的数字或函数 a_{ij} 称为 $\boldsymbol{A}$ 的元素，可取实数或复数，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 m 行 n 列，称为有 $m\times n$ 阶．当 $m=n$ 时，该阵为 n 阶方阵．

交换 $(m\times n)$ 阵 $\boldsymbol{A}$ 的行和列而得出元素 a_{ji} 的 $(n\times m)$ 阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置，记为 $\boldsymbol{A}'$．

当两个阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同阶，且对任一对下标 i，j 有 $a_{ij}=b_{ij}$，称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$．现定义如下运算．

(1)加法　若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 有相同阶，定义阵 $\boldsymbol{C}$ 为这两个阵的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 阵有同样的阶且其元素为

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

不难指出，上述定义的加法是可交换，可结合的：

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差可定义为 $\boldsymbol{A}+(-)\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，这一运算导致零阵 $\boldsymbol{0}$，其元素全为零.

(2) 矩阵与标量的积 标量 α，取自实数或复数域 $\boldsymbol{F}$. α 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，是具元素 αa_{ij} 的另一阵 $\alpha\boldsymbol{A}$，该运算是可交换，可结合的，并且对矩阵和或标量和都是可分配的：

$$\alpha\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\alpha$$

$$\alpha(\beta\boldsymbol{A})=(\alpha\beta)\boldsymbol{A}$$

$$\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$$

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$$

(3) 矩阵积 $m\times p$ 阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $p\times n$ 阵 $\boldsymbol{B}$ 的积定义为 $m\times n$ 阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，其元素为

$$c_{ij}=a_{ik}b_{kj}$$

这里采用了作和约定，即当指标 i, j 指示某个元素时，表达式将对重复指标 k 的全部可能指标值作和. 这一记号约定将贯穿全书.

可以注意到，矩阵积仅对可相乘矩阵有意义，即第一个矩阵的列数目必等于第二个矩阵的行数目. 而且，一般讲，该运算不可交换，但可结合可分配：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$$

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$，则称可交换的. 显然，若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可交换，它们必为同阶的方阵.

从运算(1)，(2)，(3)以及矩阵的转置定义，可得

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'$$

$$(\alpha\boldsymbol{A})'=\alpha\boldsymbol{A}'$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'$$

$$(\boldsymbol{A}')'=\boldsymbol{A}$$

由单列构成的 $n\times 1$ 阶阵称为 n 阶列向量：

$$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

同样，由单行构成的 $1\times n$ 阶阵称为 n 阶行向量：

$$x'=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

显然，列(行)向量的转置是行(列)向量．一般讲，一个向量可定义为一组有序的 n 个实数或复数，而为矩阵定义的运算也同样适用于行和列向量．但矩阵积现在可用两个方法来执行，一个为内积(又称标量积、点积)，定义如下：

$$\langle x,\ y\rangle=x'y=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \tag{1.1}$$

另一个为外积，定义为：

$$xy'=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)=\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

内积是标量(域 $\boldsymbol{F}$ 中的元素)而外积为 n 阶阵.

由内积定义可直接推出内积

$$\langle x,\ y\rangle = x_i y_i \tag{1.3}$$

的下列特性:

$$\left.\begin{aligned}&\langle x,\ y\rangle = \langle y,\ x\rangle\\&\langle x,\ \alpha y+\beta z\rangle = \alpha\langle x,\ y\rangle+\beta\langle x,\ z\rangle\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

借助于三维实空间 $\boldsymbol{R}_3$ 的几何语言,内积 $\langle x,\ x\rangle$ 可被理解为表示一个实向量 x 的长度平方. 这样

$\langle x,\ x\rangle^{1/2} = \|x\|$,此处 $\|x\|$ 表示 x 的长度.

显然,对实向量 x,

$$\left.\begin{aligned}&\langle x,\ x\rangle \geqslant 0\\ \text{和}\\&\langle x,\ x\rangle = 0 \quad \text{当且仅当 } x=0 \text{ 时}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

若两个实向量 x 和 y 的内积为零

$$\langle x,\ y\rangle = 0 \tag{1.6}$$

则称它们正交.

为了把正交性概念推广到复向量,首先应注意到当 x 为复向量时,不等式(1.5)可以不成立,而允许复向量自身正交. 为避免这一奇异特性,可考虑 x 和它的复共轭 $\bar{x}$ 的内积. 因为

$$\langle \bar{x},\ x\rangle = \bar{x}_1 x_1+\bar{x}_2 x_2+\cdots+\bar{x}_n x_n \geqslant 0$$

而等式当且仅当 $x=0$ 时成立,因此,对复向量,较适当的正交性概念,应表示为如下关系:

$$\langle \bar{x},\ y\rangle = 0 \tag{1.7}$$

取该式的复共轭转置

$$\langle \bar{x},\ y\rangle = \langle \bar{y},\ x\rangle = 0$$

可见，考察正交性时，两个向量中哪个在前是无关紧要的①.

若向量 x 的长度

$$\|x\|=\langle\bar{x},\ x\rangle^{1/2}=1 \tag{1.10}$$

则称 x 为被规范化了的(或称为单位向量).

任一非零向量 x，用它的长度去除它的每个元素，就可以与一个唯一的单位向量相关联. 这一手续称规范化.

$n\times n$ 阵称方阵. 一个方阵，除主对角元素(由元素 a_{ii} 组成)外，其他元素都为零，称为对角阵($a_{ij}=0$，若 $i\neq j$). 单位阵是一个特殊的对角阵，它的对角元素都是 1，记为 $\boldsymbol{I}$. 对角阵通常表示为 $\mathrm{diag}[a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}]$.

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，$|\boldsymbol{A}|$，为零，称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异的. 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，该阵就是非奇异的. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵，记 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 只有当 $\boldsymbol{A}$ 非奇异时，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 才存在. 因为由 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，我们有 $|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^{-1}|=1$. 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则该式不可能成立. 进一步还可指出

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{1.11}$$

这里，$\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}$ 表示元素为 α_{ji} 的 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，$\mathrm{adj}\,\boldsymbol{A}$ 的定义是基于 $\boldsymbol{A}$ 阵元素 a_{ij} 的代数余子式的. $\boldsymbol{A}$ 阵中删去第 i 行和第 j 列后的 $(n-1)$ 阶方阵 m_{ij} 的行列式 $|m_{ij}|$，称为 a_{ij} 的余子式，而被赋

---

① 许多作者(如文献[1]，[3])用定义正交性的标量作基础来定义两个向量(实数或复数)的内积. 这样，两个向量 x，y 的内积定义为(注意次序)

$$\langle x,\ y\rangle=\bar{x}_1y_1+\bar{x}_2y_2+\cdots+\bar{x}_ny_n \tag{1.8}$$

这时，有

$$\langle x,\ y\rangle=\overline{\langle y,\ x\rangle}\text{(这里一划表示复共轭)} \tag{1.9}$$

因为

$$\langle x,\ y\rangle=\bar{x}_iy_i=y_i\bar{x}_i=\overline{\bar{y}_ix_i}=\overline{\langle y,\ x\rangle}$$

在这个定义下，标量积 $x'y=x_iy_i$ 一般讲不再是内积，除非 x，y 均为实的，因此不能用记号〈 〉. 但这个定义本书不采用，因此不必区分内积与标量积.

予符号的余子式$(-1)^{i+j}|m_{ij}|$，称为a_{ij}的代数余子式，被记为α_{ij}。

因为

$$a_{ik}\alpha_{kj}=|\boldsymbol{A}|\delta_{ij} \tag{1.12}$$

于是得到(1.11)式．这里δ_{ij}是克罗内克δ(Kronecker delta)，具有下列性质：

$$\left.\begin{array}{ll}\delta_{ij}=1 & ,\text{当 } i=j \\ \delta_{ij}=0 & ,\text{当 } i\neq j\end{array}\right\} \tag{1.13}$$

从定义可以证明

$$(\boldsymbol{A}^{-1})'=(\boldsymbol{A}')^{-1}$$

和

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$$

现定义一些特殊阵．若$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，称$\boldsymbol{A}$是对称阵．若$\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'$，称$\boldsymbol{A}$为反对称阵，于是对全部$i$, j值有$a_{ij}=-a_{ji}$，而且，反对称阵的对角元素全是零．

若$\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，也就是说，$a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}$*，方阵$\boldsymbol{A}$称为正交阵．从$\boldsymbol{A}^{-1}$的定义看，有$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}$．

复阵$\boldsymbol{A}$(具有复元素a_{ij})的复共轭阵定义为元素是$\bar{a}_{ij}$的阵，记为$\overline{\boldsymbol{A}}$．

若$\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}$，方阵$\boldsymbol{A}$称爱米特(Hermite)阵．一个爱米特阵的对角元素必为实数，因为$\bar{a}_{ii}=a_{ii}$．

若$\overline{\boldsymbol{A}}'=-\boldsymbol{A}$，方阵$\boldsymbol{A}$称为斜爱米特阵．显然，斜爱米特阵的对角元或为零，或为纯虚数．

注意到，实对称阵是爱米特阵的特款．事实上，一个实爱米特阵是对称阵．而且对称阵的所有重要特性都可推广到爱米特阵上去．

---

* 原书误印为$a_{ik}a_{kj}=\delta_{ij}$——译者注．

若$\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，方阵$\boldsymbol{A}$称为酉阵.

注意到，每个方阵$\boldsymbol{A}$均可表示为一个对称阵$\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$和一个反对称阵$\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$的和. 类似地，每个具有复数元素的方阵可以写成爱米特阵和斜爱米特阵之和.

方阵$\boldsymbol{A}$主对角元素之和称为$\boldsymbol{A}$的迹，

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

若仅在主对角线上及上三角(或下三角)元素不为零，称为上三角(或下三角)阵；亦即，对$i>j$，有$a_{ij}=0$(或对$j>i$，有$a_{ij}=0$)，称为上(下)三角阵.

最后，需定义向量的线性无关和矩阵的秩这两个重要概念.

域$\boldsymbol{F}$(复数或实数)上的向量$x^1, x^2, \cdots, x^n$称为线性相关，若能在$\boldsymbol{F}$中找到n个不全为零的$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\alpha_1 x^1+\alpha_2 x^2+\cdots+\alpha_n x^n=0 \tag{1.14}$$

否则这n个向量线性无关. 若n个向量线性相关，那末它们中的某个可用其余的线性组合表示出.

一个$m\times n$阵$\boldsymbol{A}$，若它的最大的非零余子式的阶是r，则称$\boldsymbol{A}$阵的秩是r. 类似于前面定义的余子式(一阶的)，删去$\boldsymbol{A}$阵的任意$m-k$行和$n-k$列所得的k方阵的行列式，称为$m\times n$阵$\boldsymbol{A}$的k阶余子式. 可以证明，如果$\boldsymbol{A}$的列向量(或行向量)的最大线性独立数是r，那末$\boldsymbol{A}$的秩也是r.

一个n阶方阵$\boldsymbol{A}$，若它的秩是n，则显然$\boldsymbol{A}$是非奇异的. 若秩$r=n-\gamma$，此处γ为一正数($\gamma<n$)，则称阵$\boldsymbol{A}$有零维数(退化度)γ. 这时，在$\boldsymbol{A}$的列之间有γ个独立的线性关系. 对齐次方程组$\boldsymbol{A}x=0$，其解向量集x构成$\boldsymbol{A}$的γ维零空间；即，若$\boldsymbol{A}$有零维数γ，则$\boldsymbol{A}x=0$有γ个线性独立解$x^1, x^2, \cdots, x^\gamma$，使得方程组$\boldsymbol{A}x=0$的每个解可表成为$x^i(i=1, 2, \cdots, \gamma)$的线性组合，

而任意一线性组合是解．显然，若 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异的，则 $\boldsymbol{A}x=0$ 的唯一解是 $x=0$．还应注意到，一个向量空间 E_n(实数或复数)至多包含 n 个线性独立向量，而任意一组 $n+1$ 个向量是线性相关的．如果在向量空间中，每个向量可用 y^i 的线性组合表示出的话，这个向量空间称为由 n 个向量 $y^i(i=1, 2, \cdots, m)$张成或生成．

为从 n 个线性独立向量组中得到一个正交组，可采用格拉姆-施密特(Gram-Schmidt)正交化手续．若 $x^i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是实的线性独立向量组，定义

$$y^1=x^1$$

$$y^2=x^2-\frac{\langle y^1,\ x^2\rangle}{\langle y^1,\ y^1\rangle}y^1$$

$$y^3=x^3-\frac{\langle y^2,\ x^3\rangle}{\langle y^2,\ y^2\rangle}y^2-\frac{\langle y^1,\ x^3\rangle}{\langle y^1,\ y^1\rangle}y^1$$

等等．

向量 $y^i(i=1, 2, \cdots, n)$显然彼此正交，于是可立刻得到如下正交规范组：

$$e^i=\frac{y^i}{\langle y^i,\ y^i\rangle^{1/2}}, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

于是 $\langle e^i,\ e^j\rangle=\delta_{ij}$*．

练习

1．为方便起见，一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可被分割为若干低阶阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$$

证明，两个被分割的矩阵$[\boldsymbol{A}_{ij}]$和$[\boldsymbol{B}_{ij}]$的矩阵积可如下定出：

$$[\boldsymbol{AB}]_{ij}=\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$$

假设可相乘性条件已被满足．

* 原书误印为 $\langle e^i,\ e^i\rangle=\delta_{ij}$——译者注．

2. 能使用 $AA=A^2$, $A^2A=A^3$ 等等而不存在含糊之处吗?对 $(T^{-1}AT)^n$, A^mA^n, $(A^m)^n$ 能说些什么?

3. 定义矩阵 $e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots$, 并讨论 e^{At}, $e^{(A+B)t}$, $e^{A+\varepsilon B}$, 其中 t, ε 为标量, ε 为小量.

4. 从行列式理论知道, 若 $n\times n$ 行列式的元素是变数 λ 的可微函数, 那么行列式对 λ 的导数是如下 n 个行列式之和, 其中逐个每一列(或行)用它对 λ 的导数代替. 另一方面, 对应阵的导数是另一个阵, 它的元素是 A 的元素的导数.

由这些定义, 证明

$$\frac{d^n}{dt^n}[e^{tA}]=A^ne^{tA}=e^{tA}A^n$$

1.2 双线性型和二次型

下述形式的表达式:

$$f=a_{ij}x_iy_j; \quad i=1, 2, \cdots, m, \quad j=1, 2, \cdots, m \tag{1.15}$$

称为两组变数 x_i 和 y_i 的双线性型.

标量 f 实际上是向量 x 和 Ay(同是 m 阶)的内积, 且可表示为

$$f=\langle x, Ay\rangle$$

因为

$$\langle x, Ay\rangle=x'Ay=y'A'x=\langle y, A'x\rangle \tag{1.16}$$

就内积而论, A 在 y 上的作用可认为等价于 A' 在 x 上的作用. 因此, A' 可以看作是一个诱导算子或伴随算子.

若 A 为对称阵, $A=A'$, 则

$$\langle x, Ay\rangle=\langle y, Ax\rangle$$

A 称为自伴的.

形为

$$f=a_{ij}x_ix_j; \quad i=1, 2, \cdots, n, \quad j=1, 2, \cdots, n$$

的齐次多项式称为变数组 x_i 的二次型. 它可表示为

$$f=\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle \tag{1.17}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为方阵. 若 $\boldsymbol{A}$ 为反对称的,则 $\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle=0$. 这是因为取(1.17)的转置,得

$$\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle=-\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle$$

回忆起每个方阵可表示为对称阵和反对称阵的和, 我们就总可假定二次型的阵是对称的.

一个实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正定的,若二次型 $\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle$ 对所有非零实向量 x 有

$$\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle>0$$

同样地,一个实对称阵称为是半正定的(或非负定的),若对所有实的 x,有

$$\langle x, \boldsymbol{A}x\rangle\geqslant 0$$

作为这些定义的推广, 依照对应的二次型在所有非零实向量下分别是负的, 负和零的以及负和正的, 我们可以引入负定, 半负定和不定的实对称阵. 带正定阵的二次型称为正定的, 等等.

可以证明, 若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称正定阵, 则对除零向量外的所有复向量 x,有

$$\langle \bar{x}, \boldsymbol{A}x\rangle>0 \tag{1.18}$$

为证明这点,首先注意到 $\langle \bar{x}, \boldsymbol{A}x\rangle$ 等于它的复共轭,因此它是一个实的标量. 把复向量 x 表示为 $x=y+iz$, 其中 y 和 z 都是实数,于是

$$\begin{aligned}\langle \bar{x}, \boldsymbol{A}x\rangle&=\langle (y-iz), \boldsymbol{A}(y+iz)\rangle\\&=\langle y, \boldsymbol{A}y\rangle+\langle z, \boldsymbol{A}z\rangle>0\end{aligned}$$

大于零是因为 $\boldsymbol{A}$ 假定是正定的. 类似地,容易证明,若 $\boldsymbol{A}$ 是实