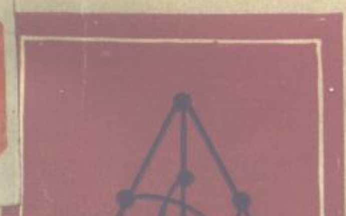
离散数学

理论·分析·题解

左孝凌 李为鑑 刘永才 编著



离散数学

理论·分析·题解

左孝凌
李为鑑　编著
刘永才

上海科学技术文献出版社

离散数学
理论·分析·题解
左孝凌 李为鑑 刘永才 编著
*
上海科学技术文献出版社出版、发行
(上海市武康路2号)
新华书店经销
商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 17.75 字数 477,000
1988年5月第1版 1988年5月第1次印刷
印数: 1—15,000

ISBN 7-80513-138-4/O·13
定价: 7.00元

《科技新书目》148-278

序　言

离散数学是计算机科学中重要的基础理论之一，它也是培养学生慎密思维，提高学生素质的核心课程。在离散数学的教学中，解题方法起着特殊重要的作用。与各种基础数学一样解题是巩固知识，深化理解的一个必要途径，通过解题方法的训练，可以培养学生的综合分析和理论联系实际的能力。

在离散数学的解题方法中，除了应用演绎法，分析法，枚举法，归纳法等常用的方法外，还往往应用反证法，归谬法，对应法和构造法等一些现代数学的方法。但是试图对离散数学中的问题给予方法分类，几乎是不可能的，因为对于特定问题的解法常常因人而异，所谓仁者见仁，智者见智，各抒己见，巧妙不同。

我们编写本书的目的是给学习离散数学的读者，提供一些解题方法的指导，并给自学离散数学的读者，在自己做完习题后有一个参考解答。

本书按章分类，每章分三部分：第一部分是理论，它是离散数学中相应章节的概括，也是解答习题所涉及的课程范围，相当于是一个详细的复习提纲。第二部分是选题例解，主要提供了解题方法的分析，希望读者通过选例分析能够举一反三，触类旁通。当然解题分析，观感不同，纵横

剖析，可以各有侧重。我们提供的仅是对问题概略分析和具体解题思路，一家之见，难成范典。我们希望这些分析，使读者能略涉歧苑，拓广思维，以便逐步提高分析问题和解决问题的能力。当然解题分析是解题步骤的思考，是审题后的构思，寓成于心，在题解中不必写出。第三部分是习题与解。我们除解了《离散数学》(上海科学技术文献出版社，1982年)一书的全部习题外，还补充了很多增新知识，开拓思维，加深理解，应用实践的习题，我们的解答虽力图详尽，正确，但决非唯一标准。希望读者能够独立解答，提出更多精巧的解法。

最后，我们要特别指出，本书仅是教学参考资料，它决非解题的万能钥匙，希望读者务必先学习课程，然后经过独立作业，再参阅解答，这样体会深刻，事半功倍。

本书共收录选题例解81道，习题647道。习题按章编号，凡属原书习题，则在题目最后标以原书题号，如【3-2,(5)】表示原书第三章，第二节习题的第5题。

本书序言，第一、二、三、四章由左孝凌撰写，第五、六章由李为鑑撰写，第八、九章由刘永才撰写。第七章由三人共同撰写。

限于作者水平，全书疏漏难免，欢迎读者批评指正。

作　者

1986.10.

目　　录

第一章 命题逻辑

A 内容提要

1 命题及其表示法

命题 能表达判断的语句，并具有确定真值的陈述句。

真值 一个命题总具有一个"值"，称为真值。真值只有真和假两种，分别记为 T 和 F。

原子命题 不能分解为更简单的陈述句，称原子命题。

复合命题 由联结词、标点符号和原子命题复合构成的命题，称复合命题。

命题标识符 表示命题的符号。

命题常量 一个命题标识符表示确定的命题，该标识符称作命题常量。

命题变元 命题标识符如仅是表示任意命题的位置标志，就称为命题变元。

原子变元 当命题变元表示原子命题时，该变元称原子变元。

2 联结词

否定 设 P 为一命题，P 的否定是一个新的命题，记作 $\neg P$。若 P 为 T，$\neg P$ 为 F；若 P 为 F，$\neg P$ 为 T。

合取 两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题，记作 $P \wedge Q$。当且仅当 P，Q 同时为 T 时，$P \wedge Q$ 为 T。在其他情况下，$P \wedge Q$ 的真值为 F。

析取 两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$。当且仅当 P，Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 的真值为 F，否则 $P \vee Q$ 的真

值为T。

条件 给定两个命题P和Q，其条件命题是一个复合命题，记作$P\to Q$，当且仅当P的真值为T，Q的真值为F时，$P\to Q$的真值为F，否则$P\to Q$的真值为T。

双条件 给定两个命题P和Q，其复合命题$P\rightleftarrows Q$，称作双条件命题；当P和Q的真值相同时，$P\rightleftarrows Q$的真值为T，否则$P\rightleftarrows Q$的真值为F。

3 命题公式与翻译

合式公式 命题演算的合式公式规定为：

(1) 单个命题变元本身是一个合式公式；

(2) 如果A是合式公式，那么$\neg A$是合式公式；

(3) 如果A和B是合式公式，那么$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\to B)$和$(A\rightleftarrows B)$都是合式公式；

(4) 当且仅当能够有限次地应用(1)，(2)，(3)所得到的包含命题变元，联结词和括号的符号串是合式公式。

翻译 把自然语言中的有些语句，翻译成数理逻辑中的形式符号。

优先次序 规定联结词运算的优先次序为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\to$，$\rightleftarrows$。

4 真值表与等价公式

真值表 在命题公式中，对于分量指派真值的各种可能组合，就确定了这个命题公式的各种真值情况，把它汇列成表，就是命题公式的真值表。

逻辑相等 给定两个命题公式A和B，设P_1，P_2，…，P_n为所有出现于A和B中的原子变元，若给P_1，P_2，…，P_n任一组真值指派，A和B的真值都相同，则称A和B是等价的或逻辑相等。记作$A\Leftrightarrow B$。

子公式 如果X是合式公式A的一部分，且X本身也是一

个合式公式，则称 X 为公式 A 的子公式。

定理 1-4.1 设 X 是合式公式 A 的子公式，若 $X \Leftrightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 来置换，所得公式 B 与公式 A 等价，即 $A \Leftrightarrow B$。

5 重言式与蕴含式

重言式 给定一个命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为 T，则称命题公式为重言式或永真公式。

矛盾式 给定一个命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为 F，则称该命题为矛盾式或永假公式。

蕴含式 当且仅当 $P \to Q$ 是一个重言式时，称 P 蕴含 Q，并记作 $P \Rightarrow Q$。

逆换式 对 $P \to Q$ 来说，$Q \to P$ 称作它的逆换式。

反换式 对 $P \to Q$ 来说，$\neg P \to \neg Q$ 称作它的反换式。

逆反式 对 $P \to Q$ 来说，$\neg Q \to \neg P$ 称作它的逆反式。

定理 1-5.1 任何两个重言式的合取或析取，仍然是一个重言式。

定理 1-5.2 一个重言式，对同一分量都用任何合式公式置换，其结果仍为一重言式。

定理 1-5.3 设 A, B 为两个命题公式，$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \rightleftarrows B$ 为一个重言式。

定理 1-5.4 设 P，Q 为任意两个命题公式，$P \Leftrightarrow Q$ 的充要条件是 $P \Rightarrow Q$ 且 $Q \Rightarrow P$。

6 其他联结词

不可兼析取 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P \overline{\vee} Q$ 称作 P 和 Q 的不可兼析取。当且仅当 P 与 Q 的真值相异时 $P \overline{\vee} Q$ 为 T，否则 $P \overline{\vee} Q$ 为 F。

逆条件 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P \xrightarrow{c} Q$ 称作命题 P 和 Q 的逆条件或条件否定。当且仅当 P 的真值为 T，Q 的

真值为 F 时，$P\overset{c}{\rightarrow}Q$ 的真值为 T。否则 $P\overset{c}{\rightarrow}Q$ 的真值为 F。

与非 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\uparrow Q$ 称作 P 和 Q 的"与非"。当且仅当 P 和 Q 的真值都是 T 时，$P\uparrow Q$ 的真值为 F，否则 $P\uparrow Q$ 的真值都为 T。

或非 设 P 和 Q 是两个命题公式，复合命题 $P\downarrow Q$ 称作 P 和 Q 的"或非"。当且仅当 P 和 Q 的真值都为 F 时，$P\downarrow Q$ 的真值为 T，否则 $P\downarrow Q$ 的真值都为 F。

∇ 的有关性质

(1) $P\nabla Q\Leftrightarrow Q\nabla P$;

(2) $(P\nabla Q)\nabla R\Leftrightarrow P\nabla(Q\nabla R)$;

(3) $P\wedge(Q\nabla R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\nabla(P\wedge R)$;

(4) $(P\nabla Q)\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$;

(5) $(P\nabla Q)\Leftrightarrow\neg(P\rightleftarrows Q)$;

(6) $P\nabla P\Leftrightarrow F$, $\quad F\nabla P\Leftrightarrow P$, $\quad T\nabla P\Leftrightarrow\neg P$。

$\uparrow$ 的有关性质

(1) $P\uparrow P\Leftrightarrow\neg P$;

(2) $P\wedge Q\Leftrightarrow(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)$;

(3) $P\vee Q\Leftrightarrow(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)$。

$\downarrow$ 的有关性质

(1) $P\downarrow P\Leftrightarrow\neg P$;

(2) $P\vee Q\Leftrightarrow(P\downarrow Q)\downarrow(P\downarrow Q)$;

(3) $P\wedge Q\Leftrightarrow(P\downarrow P)\downarrow(Q\downarrow Q)$。

最小联结词组 对于任何一个命题公式，都能由仅含这些联结词的命题公式等价代换，而比这些联结词再少的命题公式不能对给定的公式作等价代换，这样的联结词组就是最小联结词组。

7 对偶与范式

对偶式 在给定的命题公式 A 中，使联结词 $\vee$ 变换成 $\wedge$，将 $\wedge$ 换成 $\vee$，若有特殊变元 F 和 T 亦相互取代，所得公式 A^* 称为 A 的对偶式。

合取范式 一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n (n \geqslant 1)$。其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的析取式。

析取范式 一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有型式 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n (n \geqslant 1)$。其中 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是由命题变元或其否定所组成的合取式。

小项 n 个命题变元的合取式，称作小项或布尔合取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

大项 n 个命题变元的析取式，称作大项或布尔析取，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次。

小项性质

(1) 每个小项当其真值指派与编码相同时，其真值为 T，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 F；

(2) 任意两个不同小项的合取式永为 F；

(3) 全体小项的析取式永为 T。

大项性质

(1) 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为 F，在其余 2^n-1 种指派情况下均为 T；

(2) 任意两个大项的析取式为永为 T；

(3) 全体大项的合取式为永为 F。

主析取范式 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由小项的析取所组成，则该等价式称作原式的主析取范式。

主合取范式 对于给定的命题公式，如果有一个等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式。

定理 1-7.1 设 A 和 A^* 是对偶式，$P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在 A 和 A^* 中的原子变元，则

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n)$$

$$A(\neg P_1, \neg P_2, \cdots, \neg P_n) \Leftrightarrow \neg A^*(P_1, P_2, \cdots, P_n)$$

定理 1-7.2 设 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是出现在公式 A 和 B 中的所有原子变元，如果 $A \Leftrightarrow B$，则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

定理 1-7.3 在真值表中，一个公式的真值为 T 的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式。

定理 1-7.4 在真值表中，一个公式的真值为 F 的指派所对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式。

8 推理理论

有效结论 设 A 和 C 是两个命题公式，当且仅当 $A \to C$ 为一重言式，即 $A \Rightarrow C$，称 C 是 A 的有效结论。或 C 可由 A 逻辑地推出，这里 A 可以有 n 个前提 $H_1, H_2, \cdots, H_n$。

***P* 规则** 前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用。

***T* 规则** 在推导中，如果有一个或多个公式，重言蕴含着公式 S，则公式 S 可以引入推导之中。

相容 假设公式 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 中的命题变元为：$P_1, P_2, \cdots, P_n$，对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的一些真值指派，如果能使 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 的真值为 T，则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 是相容的。

不相容 假设公式 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 中的命题变元为：$P_1, P_2, \cdots, P_n$，如果对于 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的每一组真值指派，使得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n$ 的真值均为 F，则称公式 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 是不相容的。

直接证法 由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论。常用的蕴含式和等价式列入表 1-1 和表 1-2 中。

间接证法

(1) 要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow C$，只要证明 $H_1, H_2, \cdots, H_m$ 与 $\neg C$ 不相容。

(2) 要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$，如能证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \wedge R \Rightarrow C$，即证得 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_m \Rightarrow (R \to C)$。这个证明称为 CP 规则。

表 1-1 蕴含公式表

序　　号	公　　　　式
I_1	$P\wedge Q\Rightarrow P$
I_2	$P\wedge Q\Rightarrow Q$
I_3	$P\Rightarrow P\vee Q$
I_4	$Q\Rightarrow P\vee Q$
I_5	$\neg P\Rightarrow P\to Q$
I_6	$Q\Rightarrow P\to Q$
I_7	$\neg(P\to Q)\Rightarrow P$
I_8	$\neg(P\to Q)\Rightarrow\neg Q$
I_9	$P,\ Q\Rightarrow P\wedge Q$
I_{10}	$\neg P,\ P\vee Q\Rightarrow Q$
I_{11}	$P,\ P\to Q\Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q,\ P\to Q\Rightarrow\neg P$
I_{13}	$P\to Q,\ Q\to R\Rightarrow P\to R$
I_{14}	$P\vee Q,\ P\to R,\ Q\to R\Rightarrow R$
I_{15}	$A\to B\Rightarrow(A\vee C)\to(B\vee C)$
I_{16}	$A\to B\Rightarrow(A\wedge C)\to(B\wedge C)$

表 1-2 等价公式表

序　　号	公　　　　式
E_1	$\neg\neg P\Leftrightarrow P$
E_2	$P\wedge Q\Leftrightarrow Q\wedge P$
E_3	$P\vee Q\Leftrightarrow Q\vee P$
E_4	$(P\wedge Q)\wedge R\Leftrightarrow P\wedge(Q\wedge R)$
E_5	$(P\vee Q)\vee R\Leftrightarrow P\vee(Q\vee R)$
E_6	$P\wedge(Q\vee R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)$
E_7	$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$
E_8	$\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow\neg P\vee\neg Q$
E_9	$\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow\neg P\wedge\neg Q$
E_{10}	$P\vee P\Leftrightarrow P$
E_{11}	$P\wedge P\Leftrightarrow P$
E_{12}	$R\vee(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{13}	$R\wedge(P\vee\neg P)\Leftrightarrow R$
E_{14}	$R\vee(P\vee\neg P)\Leftrightarrow T$
E_{15}	$R\wedge(P\wedge\neg P)\Leftrightarrow F$
E_{16}	$P\to Q\Leftrightarrow\neg P\vee Q$
E_{17}	$\neg(P\to Q)\Leftrightarrow P\wedge\neg Q$
E_{18}	$P\to Q\Leftrightarrow\neg Q\to\neg P$
E_{19}	$P\to(Q\to R)\Leftrightarrow(P\wedge Q)\to R$
E_{20}	$P\rightleftarrows Q\Leftrightarrow(P\to Q)\wedge(Q\to P)$
E_{21}	$P\rightleftarrows Q\Leftrightarrow(P\wedge Q)\vee(\neg P\wedge\neg Q)$
E_{22}	$\neg(P\rightleftarrows Q)\Leftrightarrow P\rightleftarrows\neg Q$

9 应用

命题逻辑联结词相对应的门电路如图 1-1 所示。

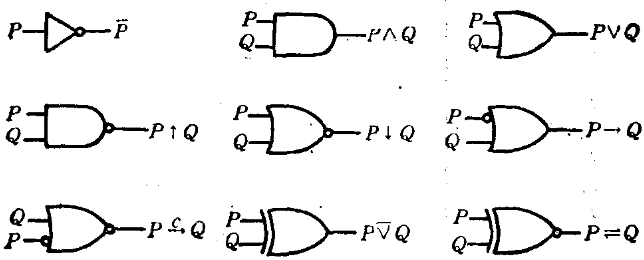


图 1-1

B 选题例解

例题 1-1 符号化下列命题：

(1) 辱骂和恐吓决不是战斗；

(2) 除非天气好，否则我是不会去公园的；

(3) 如果晚上做完作业且没有其他的事，他就会去看电视或听音乐。

分析 给定一个命题进行符号化，就是要把这个命题表达成合乎规定的命题表达式，因此在具体表达时，首先要列出原子命题，然后根据给定命题的含义，把所设的原子命题用适当的联结词连结起来，在这个过程中，确定原子命题和选用联结词，主要应根据命题的实际含义，而不拘泥于原句形式。如在本题(1)中：实际含义是辱骂不是战斗，恐吓也不是战斗，辱骂和恐吓在一起也不是战斗；在(2)中：这个句子的实际含义是，我去公园必定是天气好，至于天气好是否去公园，在命题中未曾涉及。所以天气好是去公园的必要条件。另外在这个命题中，没有提出天气好和去公园的具体时间，因此仅按字面意义去列出原子命题，就将出现不完整的陈述句，实际上在叙述这个命题时是有着特定的时间，例如可设原

子命题P，表示今天天气好；而不是设P为天气好。

此外，在命题符号化的过程中，必须注意消除自然语言中的歧义性，例如在(3)中，看电影或听音乐，可以是兼而有之，也可以是或此则彼。所以在进行符号翻译时，必须明确含义，以便确定是选用联结词$\overline{\vee}$还是选用联结词$\vee$。总之，对于具有歧义性的自然语言，在进行命题符号化以前，必须明确含义，删除歧义，这是命题翻译的关键之点。

解 (1) 设P：辱骂不是战斗。

Q：恐吓不是战斗。

$$P \vee Q$$

(2) 设P：今天天气好。Q：我去公园。

$$Q \rightarrow P$$

(3) 设P：他晚上做完了作业。Q：他晚上没有其他事情。L：他看电视。M：他听音乐。

$$(P \wedge Q) \rightarrow (L \overline{\vee} M)$$

例题 1-2 证明 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$。

分析 这是一个蕴含式的证明题，可以用多种方法论证本题。首先是用直接证法，就是在假设前提为真时，推证结论为真。其次是反证法，即是假设蕴含式的后件为假，推证蕴含式的前件为假。此外还可以根据蕴含式的定义，求证$S \Rightarrow C$，即需要证明条件式$S \rightarrow C$为永真。对于这三种证法，在具体证明时，又常采取列真值表法，逻辑推证，以及等价变换等各种不同论证方法。

在列真值表法中，a) 直接证法是检验在各种指派情况下，前件真值为T时，对应的后件真值是否均为T。

b) 间接证法是检验在各种指派情况下，后件真值为F时，对应的前件真值是否均为F。

c) 条件永真的方法是检验原式中蕴含式改为条件式时，公式的真值是否为永真。

关于逻辑论证：主要是根据联结词和一些基本等价式，采用直接论证或反证法，进行逻辑分析和推证。

条件永真的证明：主要是根据基本等价公式表，对原式进行等价变换后，推证条件永真的结论。

下面给出本题的各种证明。

证明 (I)列真值表：见表 1-3。

表 1-3

P	Q	R	$Q\to R$	$P\to(Q\to R)$	$P\to Q$	$P\to R$	$(P\to Q)\to(P\to R)$	S
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

设 $S\Leftrightarrow(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$

从真值表 1-3 上观察：

a) 直接证法：$P\to(Q\to R)$的真值为T(有七种)，其对应指派下$(P\to Q)\to(P\to R)$的真值均为T。

b) 反证法：$(P\to Q)\to(P\to R)$的真值为F(有一种)，其对应指派下$P\to(Q\to R)$的真值为F。

c) 条件永真式：从表上看$(P\to(Q\to R))\to((P\to Q)\to(P\to R))$的真值都为$T$，即为永真式。

(II) 逻辑推证

a) 直接证法 设$P\to(Q\to R)$为T，则

(1) P为T，$Q\to R$为T，有三种情况：

① P为T，Q为T，R为T，则$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。

② P为T，Q为F，R为T，则$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。

③ P为T，Q为F，R为F，则$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。

(2) 若P为F，$(Q\to R)$为F，则P为F，Q为T，R为F，所以$(P\to Q)$为T，$(P\to R)$为T，得$(P\to Q)\to(P\to R)$为T。