最优控制的数学理论

王康宁 著

国防工业出版社

最优控制的数学理论

王康宁 著

国防工业出版社
·北 京·

图书在版编目(CIP)数据

最优控制的数学理论/王康宁著.—北京:国防工业出版社,1995.10
ISBN 7-118-01416-8

Ⅰ.最… Ⅱ.王… Ⅲ.自动控制:最佳控制-数学理论 Ⅳ.TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 03584 号

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)
(邮政编码 100044)
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售
*
开本 850×1168 1/32 印张 10⅜ 269 千字
1995 年10月第 1 版 1995 年10月北京第 1 次印刷
印数:1—4000 册 定价:14.40 元

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分，又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展，加强社会主义物质文明和精神文明建设，培养优秀科技人才，确保国防科技优秀图书的出版，国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款，设立国防科技图书出版基金，成立评审委员会，扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是：

1. 学术水平高，内容有创见，在学科上居领先地位的基础科学理论图书；在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖，内容具体、实用，对国防科技发展具有较大推动作用的专著；密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值，密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作，负责掌握出版基金的使用方向，评审受理的图书选题，决定资助的图书选题和资助金额，以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书，由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就，积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下，国防科工委率先设立出版基金，扶持出版科技图书，这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版，随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物，是对出版工作的一项改革。因而，评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进，这样，才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授，以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来，为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗！

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金

第二届评审委员会组成人员

前　言

系统是为完成一定任务的一些相互关联部件的组合。控制科学是关于修改动力学系统的行为，以实现预期目标的科学。控制理论在于寻求以定量方式描述的很多领域中所遇到的广泛的问题，主要是可以精确地进行数学描述的问题。控制理论处于数学、工程科学和计算机科学相互作用的领域。

现代控制理论是在 20 世纪 50 年代由于空间科学技术和武器系统的制导、导航科学技术的发展，需要研究多输入多输出系统、时变系统和非线性系统的控制，在引入状态空间与状态变量的概念和广泛地应用现代数学的思想、方法和知识的基础上发展起来的。控制理论的基础研究，是寻求以精确的数学语言来阐明控制的基本原理及对于可获得的结果的限制。控制理论的基础理论部分，是控制理论的数学理论。控制理论的应用研究，在于建立先进的自动控制系统的分析和设计方法，以及把控制规律转化为计算机控制算法和软件。

控制理论的核心主题有三个：一是系统的辨识；二是系统的反馈；三是系统控制的优化。系统的辨识是用系统的输出信息来确定系统的结构或系统的参数，系统的参数辨识与数学中的逆问题密切关联，并且出现了在数学上称为不适定性问题。系统的反馈是一种基于对输出的同时观测来确定系统的输入的控制方法，输入输出都是随时间变化的。反馈在于可获得输出与其预期值的实时比较，以得到误差的一种度量，然后以此量确定输入，这个输入将减少误差，并且得到一个闭环路，从而产生了一个包含原有系统在内的新的动力学系统，称为闭环系统。系统控制的优化问题是控制动力学系统的行为，以实现预期的目标，可以表述为一个性能指标的

最优化(最小化或最大化)。性能指标是刻划一段时间上系统的预期行为和实际行为之差的数学量,要求是一个时间的函数,使得性能指标达到最小的控制,称为最优控制。

20 世纪 50 年代,原苏联的一些数学家和工程师组成的研究小组,在原苏联院士,L. S. Pontryagin 的领导下,开展了对非线性系统的时间最优控制问题的研究,导致了 Pontryagin 关于动力系统的最优轨道的最大值原理的发现。最大值原理开创了在状态与控制都存在约束的条件下,用不连续的控制函数来系统地研究最优轨道的方法。最优轨道的最大值原理的意思是,性能指标优化的非线性系统的最优控制,使得该系统相应的 Hamiltonian 函数沿最优轨道达到最大值。最大值原理指出了对非线性系统求综合控制反馈律的一般原则,特别是对二阶常系数线性系统的综合控制化成在平面上求开关曲线而得以解决。最优控制这一主题的数学思想根源是变分学。最优控制研究的是在闭域上的变分问题,通过引入开关函数和快速振荡函数的新思想,使变分学获得了新的生机。用数学理论来表达的最优轨道的最大值原理,其最有意义的贡献是,在 60 年代初推动了最优轨道数值方法的大规模的研究工作。这些研究工作,导致了许多空间项目轨道的成功设计。最优控制理论的研究和 Pontryagin 最大值原理的出现,从控制理论的科学思想、方法和内容,以及后来达到的成功的应用,都是控制理论划时代的进步,标志着控制理论发展的一个新阶段与里程碑。

20 世纪 50 年代,R. Bellman 的动态规划原理和方法的出现,为系统的最优控制的研究提供了新的思路和方法。从概念上讲,动态规划方法把原来的动态系统的最优控制问题,考虑成按动态系统的初始状态参数化了的一族控制系统的最优控制问题。它的数学内容是这一族的动态系统的最优控制问题的性能指标的最优值函数满足一个称为 Hamilton-Jacobi-Bellman(缩写为 HJB)偏微分方程。一旦求得这个 HJB 偏微分方程的解,则可求得最优反馈控制律、最优控制和性能指标的最优值。20 世纪 80 年代初期,对于 HJB 偏微分方程的粘性解概念的引入,给出了一个不可微的甚至

不连续的函数作为 HJB 偏微分方程的解的精确意义。粘性解的概念提供了一个简单的准则来确定解的唯一性，以及在摄动的情况下的稳定性。由于对 HJB 偏微分方程的粘性解概念的引入和粘性解的存在性与唯一性的解决，使得最优控制理论的动态规划方法这一理论出现了有意义的新进展和有严格的数学理论基础。最优控制理论的动态规划方法的重要性，在于 HJB 偏微分方程理论提供了开环和反馈之间的一种联系。

动态规划方法最初是用来研究确定性动态系统的最优控制问题，所建立的 HJB 偏微分方程是极值型的非线性一阶偏微分方程。其后，动态规划方法成为研究具有完全观测信息的随机系统的最优控制的基本工具。对于随机系统的最优控制问题所建立的 HJB 偏微分方程，是极值型的非线性二阶偏微分方程。

本书将阐述控制理论的三个核心主题之一的动态系统的最优控制问题的数学理论。依据最优控制理论发展的历史线索，系统地阐述集中参数系统、分布参数系统和用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制问题的状态空间法和动态规划法所建立的数学理论。主要是阐述分布参数系统与随机系统的最优控制的数学理论。内容涉及从 20 世纪 50 年代至 90 年代初期这 30 多年间的最优控制理论的基本结果和方法。上述三大类系统是本质上不同的系统。集中参数系统是具有有穷个自由度的物理系统，用数学语言讲，是用常微分方程描述的系统；分布参数系统是具有无穷个自由度的物理系统，用数学语言来表达，是用偏微分方程或偏微分积分方程描述的系统；随机系统是具有可用随机变量或随机过程描述的不确定性因素干扰的系统。在发展的历史上，研究这三大类系统的最优控制问题的数学工具是很不相同的，彼此独立地发展。本书对这三大类系统的最优控制问题的状态空间法，用 I. Ikeland 的近似极小点理论和泛函分析方法作了观点上和方法上的统一阐述。对于集中参数系统和具有完全观测信息的随机系统的最优控制理论动态规划方法的阐述中，用非线性算子半群理论来导出 HJB 偏微分方程，用 80 年代发展起来的粘性解的概念和理论来讨

论 HJB 偏微分方程的解的存在性与唯一性问题。全书涉及到的数学工具有泛函分析、Sobolev 空间与算子半群、发展方程的理论、随机分析与鞅的理论和常微分方程的解的理论，以及其他的一些数学知识。在阐述这三大类系统的最优控制问题的状态空间法和动态规划法的数学理论时，泛函分析的思想和方法是最基本的。

本书第一章以新的观点和方法来论述集中参数系统的最优控制的状态空间法。第二章用非线性算子半群与粘性解的理论来阐述集中参数系统的最优控制的动态规划法的理论。第三章论述分布参数系统的最优控制理论。第四章和第五章分别阐述具有完全观测信息的用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制的状态空间法和动态规划法的理论。第六章论述具有部分观测信息的用 Itô 随机微分方程描述的随机系统的最优控制理论。第七章阐述随机分布参数系统最优控制的理论。

本书中的集中参数系统与分布参数系统的最优控制理论，曾对研究生作为《最优控制理论》课讲授过。由于书中材料较新，在写作过程中没有现成的书籍可以借鉴，许多结果和证明是作者给出的，因此，难免有疏漏错误之处，欢迎读者批评指正。

王康宁

目　录

第一章 集中参数系统的最优控制
(状态空间法)

动态系统的最优控制问题是从大量的实际问题中提出来的。从航天、航空的科学技术中、生产过程的控制中和人类活动的其他领域中,都提出了对一个系统要求其性能指标为最优的控制问题。集中参数系统,是指具有有穷个自由度的物理系统(指广义的物理系统)。换言之,如果用有穷个参数就能描述一个物理系统在每一个瞬时的状态,称这个系统为集中参数系统。用数学语言讲,集中参数系统是用常微分方程组来描述其运动规律的系统。集中参数系统的最优控制的基本问题是,寻求使得动态系统的性能指标达到最优的控制和相应于这个控制的动态系统的轨线,这样的控制和轨线称为最优控制和最优轨线。研究集中参数系统的最优控制问题的基本的数学方法有状态空间法和动态规划法。本章是以新的观点和方法来论述集中参数系统的最优控制的状态空间法。状态空间法的含义是,除了描述系统的状态变量外,还引入另一组变量,即协态变量和协态过程满足的常微分方程组,称为动态系统的伴随系统。对于一个集中参数系统的最优控制问题,引入一个相应的用状态变量、协态变量和控制变量来表达的 Hamiltonian 函数。对于集中参数系统的最优控制理论的开创性工作中,L. S. Pontryagin[1]等人研究的以动态系统的轨线的过渡时间为性能指标的快速控制问题,用拓扑学中的指数定理来证明了最优控制使得 Hamiltonian 函数沿最优轨线达到最大值的著名的最大值原理。在本世纪 70 年代,R. V. Gamkrelidze 在测度论的基础上,引入广义控制概念,用分析方法,证明了快速控制问题的最大值原理。本章用状态空间法来研究具有积分型性能指标的最优控制问题时,不用

已有的著作中证明最大值原理的方法，而用在本书的前言中所述的 I. Ekeland 的近似极小点定理来证明最优控制问题的最大值原理。

§1.1 问题的叙述

设一个受控对象的运动规律用 n 阶常微分方程组来描述

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=f(t,x,u) \tag{1.1.1}$$

其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in R^n$$

称为状态变量，R^n 表示 n 维欧氏空间，而

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_r\end{pmatrix}\in R^r$$

称为控制变量。向量

$$f(t,x,u)=\begin{pmatrix}f^1(t,x,u)\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ f^n(t,x,u)\end{pmatrix}\in R^n$$

称为状态速度。

方程组(1.1.1)的初始状态已知为

$$x(0)=x_0\in R^n \tag{1.1.2}$$

假定 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$是定义在 $1+n+r$ 维欧氏空间 R^{1+n+r}的子集$\{(t,x,u)\,|\,t\in[0,T],(x,u)\in R^n\times R^r\}$上的一个向量值连续函数，关于 x 连续可微

$$\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x_n}\right)$$

设 U 是控制变量的空间 R^r 中的一个给定的集合，它是控制变量 u 的容许值的集。定义函数类

$U_{ad}=\{u(t)\mid u(\cdot):[0,T]\to R^r$ 是有界可测函数，$u(t)\in U$，a. e. $t\in[0,T]\}$

称函数类 U_{ad} 为容许控制类，U_{ad} 中的每一个函数 $u(t)$ 称为容许控制。

对于给定一个容许控制 $u(\cdot)\in U_{ad}$，受控对象的轨道唯一地由微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x,u(t))$$

$$x(0)=x_0$$

确定，上述微分方程组的解 $x(t)$，$t\in[0,T]$ 称为受控对象相应于控制 $u(t)$ 的轨道。在下面有时用记号 $\dot{x}(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ 表示 $x(t)$ 对时间 t 的导数。

已给函数 $f^0(t,x,u)$ 和 $h(x)$：

$$f^0(\cdot,\cdot,\cdot):[0,T]\times R^n\times R^r\to R^1$$

$$h(\cdot):R^n\to R^1$$

受控系统(1. 1. 1)－(1. 1. 2)的性能指标为

$$J(u(\cdot))=h(x(T))+\int_0^T f^0(t,x(t),u(t))\mathrm{d}t \qquad (1.1.3)$$

具有性能指标为(1. 1. 3)的系统(1. 1. 1)—(1. 1. 2)的最优控制问题，是要寻求一个容许控制 $u^*(\cdot)\in U_{ad}$，使得

$$J(u^*(\cdot))=\inf_{u(\cdot)\in U_{ad}} J(u(\cdot)) \qquad (1.1.4)$$

称 $u^*(\cdot)$ 为最优控制。相应于最优控制 $u^*(t)$ 的微分方程组(1. 1. 1)－(1. 1. 2)的解 $x^*(t)$，$t\in[0,T]$，称为最优控制问题的最优轨道。

当 f 和 f^0 都不含时间 t 时，相应的最优控制问题，称为定常系统的最优控制问题。反之，称为非定常系统的最优控制问题。

§1.2 几个引理

本节我们将要证明几个引理。在后面证明集中参数系统、分布参数系统和随机系统的最优控制的最大值原理时，这几个引理起着关键性的作用。

引理 1.1 设(S,ρ)是一个完备的距离空间，$f(\cdot):S\to R^1$ 是有下确界的下半连续函数，$\forall\ \varepsilon>0, x_\varepsilon\in S$，使得

$$f(x_\varepsilon) < \inf_{x\in S} f(x) + \varepsilon$$

则存在点 $y_\varepsilon\in S$，使得

(1)$f(y_\varepsilon)\leqslant f(x_\varepsilon)$

(2)$\rho(y_\varepsilon, x_\varepsilon)\leqslant \varepsilon^{1/2}$

(3)$f(x)\geqslant f(y_\varepsilon)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_\varepsilon, x)\quad \forall\ x\in S$

证 逐步定义 $y_n(n=0,1,\cdots)$如下：令 $y_0=x_\varepsilon$。如果 y_n 已知，用下面的方法定义 y_{n+1}：

(1)如果$\forall\ z\in S\setminus\{y_n\}, f(z)>f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,z)$，则取 $y_{n+1}=y_n$；

(2)如果 $y\in S\setminus\{y_n\}$，使得

$$f(y)\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y)$$

令

$$S_n=\{y\,|\,y\in S, f(y)\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y)\}$$

取 $y_{n+1}\in S_n$，使得

$$f(y_{n+1})-\inf_{x\in S_n} f(x)\leqslant \frac{1}{2}\{f(y_n)-\inf_{x\in S_n} f(x)\} \tag{1.2.1}$$

不等式(1.2.1)等价于下面的不等式

$$f(y_{n+1})\leqslant \frac{1}{2}f(y_n)+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n} f(x) \tag{1.2.2}$$

满足不等式(1.2.2)的 $y_{n+1}\in S_n$ 是存在的。事实上，如果式(1.2.2)不成立，即是

$$f(y_{n+1})>\frac{1}{2}f(y_n)+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n} f(x)\quad \forall\ y_{n+1}\in S_n \tag{1.2.3}$$

由假设 $y_{n+1}\in S_n$ 满足不等式

$$f(y_{n+1})\leqslant f(y_n)-\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1}) \tag{1.2.4}$$

用式(1.2.4)代入式(1.2.3)，得

$$f(y_{n+1})>\frac{1}{2}f(y_{n+1})+\frac{1}{2}\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})$$

$$+\frac{1}{2}\inf_{x\in S_n}f(x)\quad \forall\ y_{n+1}\in S_n$$

即 $$f(y_{n+1})>\inf_{x\in S_n}f(x)+\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})\quad \forall\ y_{n+1}\in S_n$$

这个不等式与下确界

$$\inf_{x\in S_n}f(x)$$

的定义矛盾。因此，满足不等式(1.2.1)的 $y_{n+1}\in S_n$ 存在。这样，定义出了点列 $\{y_n\}$。点列 $\{y_n\}$ 是 S 中的 Cauchy 列。事实上，如果(1)总是成立，则 $y_{n+1}=y_n,\forall\ n$。所以，点列 $\{y_n\}_1^\infty$ 是稳定的。因此不妨设(1)不发生。依(2)有

$$0<\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_{n+1})\leqslant f(y_n)-f(y_{n+1})(n=1,2,\cdots) \tag{1.2.5}$$

因此，有

$$\varepsilon^{1/2}\rho(y_n,y_m)\leqslant f(y_n)-f(y_m)\quad \forall\ n,m,n\leqslant m \tag{1.2.6}$$

由不等式(1.2.5)可知，数列 $\{f(y_n)\}_1^\infty$ 是单调不增的，而且

$$f(y_n)\geqslant\inf_{x\in S_n}f(x)$$

由不等式(1.2.6)，得

$$\rho(y_n,y_m)\to 0\quad (n,m\to\infty)$$

即是点列 $\{y_n\}$ 是 Cauchy 列。距离空间 (S,ρ) 是完备的，存在点 $y^*\in S$，使得 $\rho(y_n,y^*)\to 0(n\to\infty)$。由假设 f 是下半连续的，因此

$$f(y^*)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(y_n)$$

现在取 $y_\varepsilon=y^*$，有

$$f(y_\varepsilon)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}f(y_n)\leqslant f(y_n)\leqslant f(x_\varepsilon)$$

这就证明了(1)。

由不等式(1.2.6)，得