

数字信号处理中的正交变换

〔美〕 N. 阿罕麦德 K.R. 罗著

胡正名 陆传贵 译

人民邮电出版社

N.Ahmed · K.R.Rao

Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing

1975

内 容 提 要

本书比较全面地讨论数字化信号处理中一些常用的正交变换问题。全书共十章。前七章详细讨论了离散富氏变换、阿达马编号与沃尔什编号的沃尔什-阿达马变换,及其相应的快速算法、谱分析、多维情况等内容。对哈尔变换、斜变换、离散的余弦变换与 K-L 变换等,也都作了算法分析。后三章则讨论几个比较专门的问题:广义维纳滤波、数据处理与模式识别中的特征选择。

本书对于从事数字信号处理的理论分析与科学研究工作的人员,有一定的参考价值。

数字信号处理中的正交变换

[美]N.阿罕麦德 K.R.罗著

胡正名 陆传贵 译

*

人民邮电出版社出版

北京东长安街27号

天津市第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

*

开本: 850×1168 1/32 1979年10月 第一版

印张: $10^{16}/32$ 页数: 168 1979年10月天津第1次印刷

字数: 276千字 印数:(精)1—10,200 (平)1—11,500册

统一书号: 15045·总2304—无671

定 价: 精装 2.05 元
平装 1.30 元

出版说明

近年来，由于高速数字计算机与大规模集成电路的发展，使数字信号处理技术进展迅速，应用部门也日益增多。在数字信号处理技术的影响下，某些技术领域发生了根本性的变化。例如，在电话通信领域，采用数字信号处理技术，已为实现更经济与更有灵活性的交换与传输系统，做出了惊人的改革。对通信工作者来说，仅仅运用那些人们熟知的模拟信号处理技术与方法，已不能适应当前通信技术数字化发展的需要，而必须及时掌握与运用仍在不断更新之中的各种数字信号处理技术与方法。我们选择本书的主要目的，正是为了介绍数字信号处理中应用到正交变换技术的一些研究成果和实用方法。本书讲述各种正交变换的理论与算法具体扼要，数学证明简练，便于查阅，可以用作电信数学工具书。这是选译本书的另一目的。

本书是为美国电机系高年级研究生编写的教科书，共分十章。前七章讲基本原理和算法，学习这部分所需预备知识是富氏级数变换和矩阵代数。后三章讨论比较专门的几个实用问题，学习这三章所需增加的预备知识主要是离散概率论和一些通信理论的基本知识。

本书译文曾请北京邮电学院蔡长年教授详细审阅校订。

为了使我国一般电信工程技术人员容易接受，我们请北京航空学院张其善、柳重堪两同志对本书内容86处写了补充说明作为本书附录，供读者参考。

我们希望，本书的出版，不仅能为我国数字化通信事业服务，也能为目前应用正交变换技术来处理声学、声纳、雷达、原子核科学、生物学与生物医学中的各种数据的许多部门服务，并能使这些部门与通信部门在新技术研究中相互渗透，相互促进。

目 录

第一章 导引

1.1 述评	1
1.2 术语	1
1.3 利用正交函数来表示信号	2
1.4 本书概要	4
参考文献	6
习题	5

第二章 信号的富氏表示

2.1 富氏表示	10
2.2 功率, 振幅与相位谱	14
2.3 富氏变换	18
2.4 富氏级数与富氏变换之间的关系	20
2.5 互相关, 自相关与卷积	21
2.6 采样定理	27
2.7 小结	31
参考文献	32
习题	32

第三章 序列的富氏变换

3.1 离散富氏变换的定义	34
3.2 DFT的性质	35
3.3 相关和卷积的矩阵表示	41
3.4 DFT与富氏变换/级数之间的关系	43
3.5 功率、振幅及相位谱	45
3.6 2-维DFT	47
3.7 时变富氏谱	49
3.8 小结	56

参考文献	57
习题	58
第四章 快速富氏变换	
4.1 问题的提出	62
4.2 寻求算法的线索	62
4.3 构成算法的关键	64
4.4 算法的构成	66
4.5 例题	74
4.6 改排	79
4.7 运算次数与存储量	80
4.8 某些应用	82
4.9 小结	89
附录4.1 FFT计算机程序	89
参考文献	91
习题	92
第五章 一类正交函数	
5.1 列率的定义	98
5.2 记号	100
5.3 雷德麦彻 (Rademacher) 函数与哈尔 (Haar) 函数	100
5.4 沃尔什 (Walsh) 函数	103
5.5 小结	108
附录5.1格雷 (Gray) 码概要	108
参考文献	110
习题	111
第六章 沃尔什-阿达马 (Hadamard) 变换	
6.1 沃尔什级数表示	115
6.2 阿达马编号的沃尔什-阿达马变换 (WHT) _n	118
6.3 快速阿达马编号的沃尔什-阿达马变换	

(FWHT) _h	121
6.4 沃尔什编号的沃尔什-阿达马变换(WHT) _w	127
6.5 快速沃尔什编号的沃尔什-阿达马变换 (FWHT) _w	129
6.6 循环移位与并元移位	133
6.7 (WHT) _w 谱	136
6.8 (WHT) _h 谱	138
6.9 关于(WHT) _h 功率谱的物理意义	142
6.10 修改的沃尔什-阿达马变换(MWHT)	151
6.11 循环与并元相关/卷积	157
6.12 多维(WHT) _h 与(WHT) _w	160
6.13 小结	163
附录6.1 WHT计算机程序	163
参考文献	165
习题	166

第七章 各种正交变换

7.1 矩阵的因子分解	179
7.2 广义变换	183
7.3 哈尔变换	187
7.4 计算HT的算法	187
7.5 斜矩阵	191
7.6 斜变换(ST)的定义	195
7.7 离散的余弦变换(DCT)	197
7.8 2-维变换的考虑	200
7.9 小结	201
附录7.1 克罗内克(Kronecker)积	201
附录7.2 矩阵的因子分解	203
参考文献	204
习题	206

第八章 广义维纳(Wiener)滤波

8.1	一些基本矩阵运算	210
8.2	数学模型	211
8.3	滤波器设计	213
8.4	次最佳维纳滤波	217
8.5	最佳对角线滤波器	220
8.6	次最佳对角线滤波器	222
8.7	关于2-维维纳滤波的考虑	225
8.8	小结	226
	附录8.1一些术语与定义	226
	参考文献	228
	习题	229

第九章 数据压缩

9.1	关于最佳变换的探索	232
9.2	方差准则与方差分布	236
9.3	心电图数据压缩	237
9.4	图象数据压缩的考虑	243
9.5	图象数据压缩实例	246
9.6	其他考虑	252
9.7	小结	254
	附录9.1拉格朗日(Lagrange)乘数法	254
	参考文献	255
	习题	255

第十章 模式识别中的特征选择

10.1	引言	259
10.2	训练的概念	260
10.3	d-维模式	263
10.4	3-类问题	263
10.5	图象分类试验	266

10·6	最小平方映射技术·····	270
10·7	增广的特征空间·····	272
10·8	3-类最小平方、最小距离分类器·····	273
10·9	K-类最小平方、最小距离分类器·····	281
10·10	二次分类器·····	284
10·11	心电图分类试验·····	286
10·12	小结·····	289
	参考文献·····	290
	习题·····	290
	附录·····	295
	英汉名词对照表·····	321

第一章 导 引

1.1 述评

近年来，人们对数字信号处理领域有关正交变换研究的兴趣，正在日益增长[1-14, 40]。这主要是由于高速数字计算机和迅速前进的数字技术以及随之发展起来的专用数字处理机的影响所促成的[4, 15-17]。这些变换的研究工作和有关应用，包括图象处理[18-27]、语言处理[23, 28, 29]、模式识别的特征选择[23, 30-32]、通信系统的分析与设计[23, 33, 34]、广义维纳(Wiener)滤波[35, 36]以及频谱学[23, 37]等。因此，正交变换现在被用来处理包括地震的、声纳的、生物学的和生物医学的各种数据。在这些方面的研究工作交相为用的情况是显而易见的。

本书旨在给那些希望在数字信号处理领域内获得实用正交变换知识的人们以适当指导。为此目的，本书前七章致力于介绍正交变换的来历和发展。由于本书范围所限，对所提出的问题没有全部深入讨论，而是注意兼顾叙述清楚和必要的论证。后三章讨论正交变换的三方面应用：（1）广义维纳滤波，（2）数据压缩，和（3）模式识别的特征选择。选择这些特殊应用，其目的是为读者能够最好地掌握一些理论基础与技术提供线索，从而可以将它们应用或推广到其它领域中去。

1.2 术语

图1.1中所引入的术语是最常用的。图中 $x(t)$ 所表示的信号（模拟信号），是时间 t 的连续函数。如果 $x(t)$ 是理想采样器的输入，该理想采样器规定以每秒 N 个采样的速率进行采样。那末，采样器的

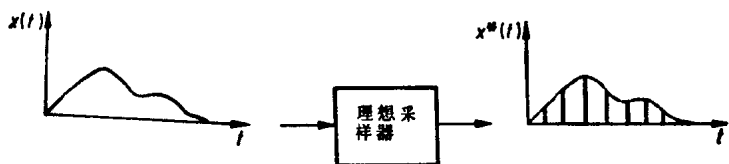


图 1.1 有关术语

输出就是一个离散的（或采样的）信号 $x^*(t)$ ，其表示式为：

$$x^*(t) \simeq \Delta t \sum_{m=0}^{N-1} x(m\Delta t) \delta(t - m\Delta t) \quad (1.2-1) \text{ (解说 1)}$$

在式（1）中， Δt 是采样间隔，而 $\delta(t)$ 表示 δ 函数或狄拉克函数。

上面的采样结果所得到的序列（或数据序列）为 $\{X(m)\}$ ， $m = 0, 1, \dots, N-1$ ，其中 $X(m) = x(m\Delta t)$ 。数据序列一词意味着每一个 $X(m)$ 已经量化和编码为数字形式。相应地，数字信号 $x^*(t)$ 一词意味着式（1）中每一个采样值 $x(m\Delta t)$ 都已量化和编码为数字形式[38]。

1.3 利用正交函数来表示信号[39]

一组实值¹连续函数 $\{u_n(t)\} = \{u_0(t), u_1(t), \dots\}$ 称做在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上是正交的，如果

$$\int_T u_m(t) u_n(t) dt = \begin{cases} c, & \text{当 } m = n \\ 0, & \text{当 } m \neq n \end{cases} \quad (1.3-1)$$

其中记号 $\int_T$ 表示 $\int_{t_0}^{t_0+T}$ 。当 $c = 1$ 时， $\{u_n(t)\}$ 称做归一化正交组。

假设 $x(t)$ 是定义在区间 $(t_0, t_0 + T)$ 上的一个实值信号，可用展开式将它表示为

1. 以下的讨论可推广到复值函数。复值函数的某些概念见习题。

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t) \quad (1.3-2)$$

其中 a_n 表示展开式中第 n 项的系数。为了计算 a_n ，我们用 $u_m(t)$ 去乘式(2)的两边，并且在 (t_0, t_0+T) 上积分，得到

$$\int_T x(t) u_m(t) dt = \int_T \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t) u_m(t) dt \quad (1.3-3)$$

对(3)应用式(1)，得

$$a_m = \frac{1}{c} \int_T x(t) u_m(t) dt, m = 0, 1, \dots \quad (1.3-4)$$

对于

$$\int_T u_n^2(t) dt < \infty \quad (1.3-5)$$

的正交组 $\{u_n(t)\}$ ，当下述两点成立时，我们称做完备的或封闭的(解说2)：

(1) 不存在这样的信号 $x(t)$ ，它满足

$$\int_T x^2(t) dt < \infty \quad (1.3-6)$$

而能使 $\int_T x(t) u_n(t) dt = 0, n = 0, 1, \dots$ (1.3-7)

(2) 对任何满足

$$\int_T x^2(t) dt < \infty$$

的分段连续信号 $x(t)$ ，以及无论怎么小的 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个正整数 N 与有限展开式

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n u_n(t) \quad (1.3-8)$$

使得

$$\int_T |x(t) - \hat{x}(t)|^2 dt < \varepsilon \quad (1.3-9)$$

由上面的讨论不难看出，式(2)中正交函数展开式能够用无

穷但可列集¹ $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 来表示 $x(t)$ 。进一步, 当 $\{u_n(t)\}$ 为完备时, 这样的表示只用有限集 $\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$ 就可以了。

物理意义。将表示式 (2) 的两边平方, 我们得到

$$x^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 u_n^2(t) + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q u_p(t) u_q(t) \quad (1.3-10) \text{ (解说4)}$$

将式 (10) 两边积分, 得:

$$\int_T x^2(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \int_T u_n^2(t) dt + \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_p a_q \int_T u_p(t) u_q(t) dt \quad (1.3-11)$$

将式 (1) 的正交性质应用到 (11), 结果得

$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \frac{c}{T} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad (1.3-12)$$

所得的式 (12) 就是众所周知的巴塞伐尔 (Parseval) 定理。

因此, 如果 $x(t)$ 是跨接在一欧纯电阻两端的电压或电流信号, 那么式 (12) 的左边就表示电阻所消耗的平均功率。这样, 数组

$$\left\{ \frac{c}{T} a_n^2 \right\}$$

就表示 $x(t)$ 的功率分布。

最后, 我们顺便指出: 上述利用正交函数的信号表示, 可以划分为两大类: (1) $\{u_n(t)\}$ 由正弦函数组成, (2) $\{u_n(t)\}$ 由非正弦函数组成。本书将研究这两类函数。

1.4 本书概要

本书共十章。前七章致力于介绍离散正交变换的来历、发展和性质。后三章则讲特殊的应用。

第2章简述表示信号的富氏方法。它使我们能够从连续信号的

1. 可列集意味着该集中的元素与正整数之间存在着一一对应关系 (解说3)。

富氏表示有系统地过渡到数字信号的富氏表示。

在第3章，介绍了对离散的和数字的信号用离散富氏变换的富氏表示。其中，研究了与富氏级数和富氏变换平行的离散富氏变换的性质，并引入了计算富氏谱的递归技术。

第4章对快速富氏变换作了详尽的讨论，它是有效地计算离散富氏变换的一种算法，用好几个数字例题说明了快速富氏变换的各种应用。

第5章介绍了一类非正弦正交函数，并引用了适当的记号来表示它们；还阐明了作为广义频率的列率的概念。在第6章和第7章中讲各种非正弦正交变换时将应用本章内容。

第6章详细讨论了沃尔什-阿达马(Walsh-Hadamard)变换，讲了计算沃尔什-阿达马变换的算法。给出了功率和相位谱的定义，并与相应的离散富氏谱作了比较。全章均着重讲述沃尔什-阿达马变换与离散富氏变换及它们的性质的相似性。

在第7章，我们研究包括广义变换、哈尔(Haar)变换、斜变换和离散余弦变换的各种变换。推演出计算这些变换的快速算法。阐明了广义变换可使沃尔什-阿达马变换系统地过渡到离散富氏变换。研究哈尔变换、斜变换与离散余弦变换的原因是考虑到它们在以后各章中有着某些应用。

第8章是关于正交变换在被称为维纳滤波的经典信号处理技术中的应用。并且，阐明了正交变换可将维纳滤波推广应用于数字信号的处理，并把降低计算要求作为讨论的重点。

作为第二个应用，第9章讨论了通过正交变换来压缩数据的问题。就此而论，推演出被称为卡南-洛伊夫(Karhunen-Loève)变换的最佳变换。还用实例说明了在图象处理与心电图数据处理领域内压缩数据方面的应用。

第10章涉及到关于模式识别中特征选择的正交变换的应用。这一章的主要目的在于举例说明如何用正交变换来对所要求的特征数目作实质性的简缩，而分类误差的增加相当小。为此目的，也提出

了一些简单的分类算法及有关的实现方法。

参 考 文 献

1. Andrews, H. C., and Caspari, K. L.: A Generalized Technique for Spectral Analysis. *IEEE Trans. Computers* C-19 (1970) 16-25.
2. Andrews, H. C., and Kane, J.: Kronecker Matrices, Computer Implementation, and Generalized Spectra, *J. of the ACM* 17 (1970) 260-288.
3. Glassman, J. A.: A Generalization of the Fast Fourier Transform. *IEEE Trans. Computers* C-19 (1970) 105-116.
4. Special Issues on Fast Fourier Transform, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*. AU-15 and AU-17, 1967 and 1969.
5. Ahmed, N., Rao, K. R., and Schultz, R. B.: A Generalized Discrete Transform. *Proc. IEEE* 59 (1971) 1360-1362.
6. Rao, K. R., Mrig, L. C., and Ahmed, N.: A Modified Generalized Discrete Transform. *Proc. IEEE* 61 (1973) 668-669.
7. Special Issue on Digital Pattern Recognition. *Proc. IEEE* 60, October, 1972.
8. Special Issue on Digital Picture Processing. *Proc. IEEE* 60, July, 1972.
9. Special Issue on Two-Dimensional Digital Signal Processing. *IEEE Trans. Computers* C-21, July, 1972.
10. Special Issue on Digital Signal Processing. *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics* AU-18, December, 1970.
11. Special Issue on Feature Extraction and Pattern Recognition. *IEEE Trans. Computers* C-20, September, 1971.
12. Special Issue on Signal Processing for Digital Communications. *IEEE Trans. Communications Technology* COM-19, December, 1971.
13. Special Issue on 1972 Conference on Speech Communication and Processing. *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics* AU-21, June, 1973.
14. Special Issue on Two Dimensional Digital Filtering and Image Processing. *IEEE Trans. Circuit Theory* CT-21, November, 1974.
15. Ristenbatt, M. P.: Alternatives in Digital Communications. *Proc. IEEE* 61 (1973) 703-721.
16. Carl, J. W., and Swartwood, R. V.: A Hybrid Walsh Transform Computer. *IEEE Trans. Computers* C-22 (1973) 669-672.
17. Wishner, H. D.: Designing a Special-Purpose Digital Image Processor. *Computer Design* 11 (1972) 71-76.
18. Pratt, W. K., and Andrews, H. C.: Two-Dimensional Transform Coding of Images. *Internat. Symp. Information Theory*, 1969.
19. Pratt, W. K., Kane, J., and Andrews, H. C.: Hadamard Transform Image Coding. *Proc. IEEE* 57 (1969) 58-68.
20. Andrews, H. C.: *Computer Techniques in Image Processing*. New York, London: Academic Press, 1970, 73-179.
21. Wintz, P. A.: Transform Picture Coding. *Proc. IEEE* 60 (1972) 809-820. (Special issue on Digital Picture Processing.)
22. Habibi, A., and Wintz, P. A.: Image Coding By Linear Transformations and Block Quantization. *IEEE Trans. Communication Technology* COM-19 (1971) 50-62.

23. Several papers in the Proc. 1970-1974 Symp. *Applications of Walsh Functions*, Washington, D. C.
24. Andrews, H. C., Tescher, H. G., and Kruger, R. P.: Image Processing by Digital Computer. *IEEE Spectrum* 9, 1972, 20-32.
25. Huang, T. S., Schreiber, W. F., and Tretiak, O. J.: Image Processing, *Proc. IEEE* 59 (1971) 1586-1609.
26. Pratt, W. K.: Spatial Transform Coding of Color Images. *IEEE Trans. Communication Technology* COM-19 (1971) 980-992.
27. Fukinuki, T., Miyata, M.: Intraframe Image Coding by Cascaded Hadamard Transforms. *IEEE Trans. Communications* COM-21 (1973) 175-180.
28. Campanella, S. J., and Robinson, G. S.: Comparison of Orthogonal Transformations for Digital Speech Processing, *IEEE Trans. Communication Technology* COM-19 (1971) 1045-1050.
29. Shum, F. Y. Y., Elliot, A. R., and Brown, W. O.: Speech Processing with Walsh-Hadamard Transforms, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics* AU-21 (1973) 174-179.
30. Welch, J. E., and Guinn, E. F.: The Fast Fourier-Hadamard Transform and its use in Signal Representation and Classification. *Eascon '68 Record*, Electronic and Aerospace Systems Convention, Washington, D. C., Sept. 9-11, 1968, published by IEEE Group on Aerospace and Electronic Systems.
31. Andrews, H. C.: Multidimensional Rotations in Feature Selection. *IEEE Trans. Computers* C-20 (1971) 1045-1051.
32. Andrews, H. C.: *Introduction to Mathematical Techniques in Pattern Recognition*. New York, London: Wiley-Interscience, 1972, 24-32, and 211-234.
33. Harmuth, H. F.: *Transmission of Information by Orthogonal Functions*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1972.
34. Pearl, J., Andrews, H. C., and Pratt, W. K.: Performance Measures for Transform Data Coding. *IEEE Trans. Communications* COM-20 (1972) 411-415.
35. Pearl, J.: Walsh Processing of Random Signals. *IEEE Trans. Electromagnetic Computability* EMC-13 (1971) 137-141.
36. Pratt, W. K.: Generalized Wiener Filtering Computation Techniques. *IEEE Trans. Computers* C-21 (1972) 636-641.
37. Gibbs, J. E., and Gobbie, H. A.: Application of Walsh Functions to Transform Spectroscopy. *Nature* 224 (1969) 1012-1013.
38. Rabiner, L. R. et al.: Terminology in Digital Signal Processing. *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, AU-20 (1972) 703-721.
39. Lee, Y. W.: *Statistical Theory of Communication*. New York: John Wiley, 1961.
40. Rabiner, L. R., and Rader, C. M. (Editors): *Digital Signal Processing*. New York: IEEE Press, 1972.

习 题

1-1 设 $Z_1 = x_1 + iy_1$, $Z_2 = x_2 + iy_2$, 其中 $i = \sqrt{-1}$, 证明

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

及

$$\overline{Z_1 Z_2} = \overline{Z_1} \overline{Z_2}$$

横号表示复共轭。

1-2 给定一个定义在 $(0, T)$ 上的实值函数组 $\{u_n(t)\}$, 它满足

$$\int_T u_m(t) \overline{u_n(t)} dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ T/4, & m = n \end{cases}$$

考虑展开式

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t)$$

(a) 用什么公式去计算系数 a_n ?

答:
$$a_n = \frac{4}{T} \int_T x(t) u_n(t) dt$$

(b) 证明
$$\frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$$

1-3 设 $Z_n = x_n + i y_n$, $n = 1, 2, 3$, 证明:

(a)
$$\overline{Z_1 Z_2 Z_3} = \overline{Z_1} \overline{Z_2} \overline{Z_3}$$

(b)
$$\overline{(Z_n^4)} = (\overline{Z_n})^4$$

(c)
$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2 Z_3} \right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2} \overline{Z_3}}$$

及
$$\left| \frac{Z_1}{Z_2 Z_3} \right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2| |Z_3|}$$

1-4 定义在区间 $(0, T)$ 上的复值正交函数组 $\{u_n(t)\}$ 满足

$$\int_T u_m(t) \overline{u_n(t)} dt = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

其中 $\overline{u_n(t)}$ 表示 $u_n(t)$ 的复共轭。考察展开式

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(t)$$

这里 $x(t)$ 是一个实值或复值信号。

(a) 用什么公式去计算系数 a_n ?

答:
$$a_n = \int_T x(t) \overline{u_n(t)} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(b) 证明上面所表示的巴塞伐尔定理可由