泛函分析

下册

〔苏〕Л. В. Канторович
Г. П. Акилов

高等教育出版社

泛函分析

下 册

[苏] Л.В.Канторович Г.П.Акилов
郭宜斌 译

高等教育出版社

内容提要

本书系根据Л. В. Канторович, Г. П. Акилов著“泛函分析”第二版(1977年)译出，分上、下两册出版.

本书为1959年出版的“赋范空间中的泛函分析”一书的修订本. 书中的叙述以一般泛函空间为基础，反映了这些年来在一系列问题上的进展. 这一版中泛函分析的应用在很大程度上得到了反映，除了在计算数学与数学物理上的应用外，还注意到对数理经济问题的某些应用.

上册为“泛函分析”的第一部分——线性算子与线性泛函，共十一章. 内容有拓扑空间与度量空间，向量空间，拓扑向量空间，赋范空间，线性算子与线性泛函，泛函的解析表示，线性算子序列，Banach空间中的弱拓扑，紧算子与共轭算子，有序赋范空间，积分算子.

本书为“泛函分析”一书的第二部分——泛函方程，共七章. 主要内容为：共轭方程，第二类泛函方程，近似方法的一般理论，最速下降法，不动点原理，非线性算子的微分，Newton法.

本书可作为高等学校数学专业、计算专业教师和研究生以及泛函专门组学生的教学参考书，也可供数学及其应用领域内的科学工作者使用.

泛函分析

下　册

[苏]Л. В. Канторович　Г. П. Акилов

郭宜斌　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

四川新华印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 10.625　字数 257,000

1982年8月第1版　1984年4月第1次印刷

印数 00,001—10,800

书号 13010·0784　定价 1.65 元

目　　录

第二部分

泛函方程

第二部分

泛 函 方 程

第十二章 共轭方程

§1. 关于逆算子的定理*)

我们在本章中将对第一部分中(参见第五章§4)给出的关于逆算子的结论作一些补充讨论.

1.1. 回忆一下在第一部分中所给出的定义. 设U是从赋范空间$\mathbf{X}$到赋范空间$\mathbf{Y}$内的连续线性算子,如果存在从$\mathbf{Y}$到$\mathbf{X}$内的算子V,使得

$$VU=I_{\mathbf{X}} \quad (I_{\mathbf{X}}x=x, x\in\mathbf{X}), \tag{1}$$

$$UV=I_{\mathbf{Y}} \quad (I_{\mathbf{Y}}y=y, x\in\mathbf{Y}), \tag{2}$$

则称V是U的逆算子并写成$V=U^{-1}$.

逆算子U^{-1}的存在(即使不连续)等价于U实现从$\mathbf{X}$到$\mathbf{Y}$上的一对一的映射. 此外,如果U^{-1}是连续的,则此映射将是同构映射.

如果关系式(1)或(2)仅有一个成立,则称算子V是左逆算子或右逆算子并分别记为$V=U_l^{-1}$, $V=U_r^{-1}$**). 在V.4.4中已经证明:连续左逆算子存在的充分必要条件是

$$\|U(x)\|\geqslant m\|x\| \qquad (x\in\mathbf{X}), \tag{3}$$

其中m是不依赖于x的正数. 并且,如果算子U映$\mathbf{X}$到全空间$\mathbf{Y}$上,则左、右逆算子均存在,即此时存在连续(双边)算子U^{-1}.

1.2. 我们来证明下述定理.

---

*) 本节的内容参见 Neumann[1]或 Schauder[2].

**) 有时符号 l 和 r 将略去不写。

定理1. 如果将 B-空间 $\mathbf{X}$ 变换到赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子 U 有连续左逆算子，则集合 $\mathbf{Y}'=U(\mathbf{X})$ 是 B-空间.

证. 这里只要证明空间 $\mathbf{Y}'$ 的完备性. 设 $\{y_n\}$ 是 $\mathbf{Y}'$ 中的自收敛序列. 令 $x_n=U^{-1}(y_n)$ $(y_n=U(x_n);n=1,2,\cdots)$. 据 1.1 中所述可知

$$\|y_n-y_k\|=\|U(x_n)-U(x_k)\|\geqslant m\|x_n-x_k\|,$$

其中 m 是正常数. 于是

$$\lim_{k,n\to\infty}\|x_n-x_k\|=0.$$

因而在 $\mathbf{X}$ 中存在元素 $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 因为 $\lim y_n=\lim U(x_n)=U(x_0)$，命 $y_0=U(x_0)$，则得 $y_0\in\mathbf{Y}'$ 及 $y_n\to y_0$. 空间 $\mathbf{Y}'$ 的完备性于是得证.

推论. 在上述定理的条件下，$\mathbf{Y}'$ 是 $\mathbf{Y}$ 中的闭集合.

1.3. 设 U 是从赋范空间 $\mathbf{X}$ 到赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算子. 显而易见，集合 $\mathbf{X}_0=U^{-1}(\mathbf{0})$ 是空间 $\mathbf{X}$ 的闭子空间. 由 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{X}_0$ 构成商空间 $\overline{\mathbf{X}}=\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$（参见 IV.1.8）. 设 $\bar{x}\in\overline{\mathbf{X}}$；考虑任意元素 $x\in\bar{x}$，令

$$\overline{U}(\bar{x})=U(x). \tag{4}$$

因若 $x',x''\in\bar{x}$，则 $x'-x''\in\mathbf{X}_0$，因而 $U(x')=U(x'')$. 可见元素 $\overline{U}(\bar{x})$ 的定义和元素 $x\in\bar{x}$ 的选择无关. 这样，式(4)就定义了从空间 $\overline{\mathbf{X}}$ 到 $\mathbf{Y}$ 内的算子 $\overline{U}$. 这个算子是齐次的和可加的. 它还是连续的：对不等式

$$\|\overline{U}(\bar{x})\|=\|U(x)\|\leqslant\|U\|\|x\| \qquad (x\in\bar{x}),$$

的右端取下确界可得

$$\|\overline{U}(\bar{x})\|=\|U(x)\|\leqslant\|U\|\|\bar{x}\| \qquad (\bar{x}\in\overline{\mathbf{X}}).$$

由算子 $\overline{U}$ 的定义本身推知 $U=\overline{U}\varphi$，其中 φ 是从 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ 的自然同态(见 IV.1.8)而且 $\|U\|=\|\overline{U}\|$.

算子 $\overline{U}$ 和 U 的不同在于它实现从空间 $\overline{\mathbf{X}}$ 到空间 $\mathbf{Y}$ 内的一对一

的对应(映射). 事实上, 如果 $\bar{U}(\bar{x})=\mathbf{0}$, 则对于任意的 $x\in\bar{x}$ 将有 $U(x)=\mathbf{0}$, 亦即 $x\in U^{-1}(\mathbf{0})=\mathbf{X}_0$, 因而 $\bar{x}$ 和空间 $\overline{\mathbf{X}}$ 中的零元素组成的类 $\mathbf{X}_0$ 一致.

当 U 将 $\mathbf{X}$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 上时, 算子 $\bar{U}$ 将 $\overline{\mathbf{X}}$ 映射到 $\mathbf{Y}$ 上. 此外, 如果存在连续的逆算子 $\bar{U}^{-1}$, 则称空间 $\mathbf{X}$ 和空间 $\mathbf{Y}$ 是同态的, 算子 U 称作是从空间 $\mathbf{X}$ 到空间 $\mathbf{Y}$ 上的同态算子.

用原始空间 $\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{Y}$ 的术语来讲, 从空间 $\mathbf{X}$ 到空间 $\mathbf{Y}$ 上的同态算子 U 可由下述两个条件来表征:

1) $U(\mathbf{X})=\mathbf{Y}$;

2) 存在 $m>0$, 对于每一个 $y\in\mathbf{Y}$, 可求得 $x\in\mathbf{X}$ 使得

$$y=U(x),\ \|y\|\geqslant m\|x\|.$$

事实上, 如果 U 是同态算子, 则1)显然成立. 其次, 由 IV.1.8 的式(4), 取 $x\in\bar{x}=U^{-1}(y)$, 则得

$$\|x\|\leqslant 2\|\bar{x}\|\leqslant 2\|\bar{U}^{-1}\|\,\|y\|,$$

因而可取

$$m=\frac{1}{2\|\bar{U}^{-1}\|}.$$

反之, 如果两个条件均满足, 则从 1) 得 $\bar{U}(\mathbf{X})=\mathbf{Y}$. 设 $\bar{x}\in\overline{\mathbf{X}}$, 对 $y=\bar{U}(\bar{x})$ 求与第二个条件相应的 $x\in\mathbf{X}$. 由于

$$\bar{U}(\varphi(x))=U(x)=y=\bar{U}(\bar{x}),$$

以及算子 $\bar{U}$ 的相互单值性, 可知 $\varphi(x)=\bar{x}$. 因此

$$\|\bar{U}(\bar{x})\|=\|y\|\geqslant m\|x\|\geqslant m\|\bar{x}\|.$$

正如在 1.1 中所指出的那样, 这个不等式及关系 $\bar{U}(\overline{\mathbf{X}})=\mathbf{Y}$ 就保证存在连续(双边)逆算子 $\bar{U}^{-1}$.

1.4. 定理 1 的逆命题在泛函方程理论中起着很基本的作用, 它是下述引理的一部分.

引理 1. 设 $\bar{U}$ 是从 B-空间 $\mathbf{X}$ 到赋范空间 $\mathbf{Y}$ 内的连续线性算

子．这时，假设B表示空间$\mathbf{X}$的以零点为中心的单位球，以S_r表示空间$\mathbf{Y}$中以零点为中心以$r>0$为半径的球．如果象$U(B)$在S_r中稠密，则U是从空间$\mathbf{X}$到空间$\mathbf{Y}$的同态算子．特别，如果算子U所实现的映射是一对一的话，则存在连续的双边逆算子U^{-1}．

证．我们来验证上一段中的二个条件是满足的．显然，可以认为球B和S_r均是闭球；今证

$$U(B)\supset S_{r/2}. \tag{5}$$

取正数序列$\{\varepsilon_n\}$，使得$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k\leqslant 1$，并考察$y\in S_r$．因为$\overline{U(B)}\supset S_r$，则可找到$y_1\in U(B)$，使得

$$\|y-y_1\|\leqslant\varepsilon_1 r.$$

用x_1表示B中使得$y_1=U(x_1)$的元素．设B_h是空间$\mathbf{X}$中以零点为中心以h为半径的闭球．由引理的条件推知$\overline{U(B_h)}\supset S_{hr}$．因此，由于元素$y-y_1\in S_{\varepsilon_1 r}$，故可找到元素$x_2\in B_{\varepsilon_1}$使得

$$\|y-(y_1+y_2)\|\leqslant\varepsilon_2 r \qquad (y_2=U(x_2)).$$

用类似的办法重复以上的论证，我们就得到满足如下条件的两个序列$\{y_n\}\subset\mathbf{Y}$和$\{x_n\}\subset\mathbf{X}$：

$$y_n=U(x_n),\ x_n\in B_{\varepsilon_{n-1}},\ \left\|y-\sum_{k=1}^{n}y_k\right\|\leqslant\varepsilon_n r \tag{6}$$

$$(n\in N,\ \varepsilon_0=1).$$

由于$\|x_n\|\leqslant\varepsilon_{n-1}$而$\mathbf{X}$是完备空间，所以级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$收敛．如果用$x$表示这个级数的和，则

$$\|x\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_{k-1}\leqslant 2,$$

也就是说$x\in B_2$．其次，

$$U(x)=\sum_{k=1}^{\infty}U(x_k)=\sum_{k=1}^{\infty}y_k.$$

但从式(6)显然可见$\sum_{k=1}^{\infty}y_k=y$. 因此 $y=U(x)$. 这样,我们就证明了 $U(B_2)\supset S_r$,这与式(5)等价.

因由(5)推知 $U(B_n)\supset S_{nr/2}$,所以

$$U(\mathbf{X})=\bigcup_{n=1}^{\infty}U(B_n)\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}S_{nr/2}=\mathbf{Y},$$

这就验证了第一个条件.

其次,如果 $y\neq 0$ 是 $\mathbf{Y}$ 中任意一个元素,则

$$y'=\frac{r}{2\|y\|}y\in S_{r/2},$$

并且由(5)可以找到元素 $x'\in B$ 使得 $y'=U(x')$. 命 $x=\frac{2\|y\|}{r}x'$, 则得到

$$U(x)=y,\ \|x\|=\frac{2}{r}\|y\|\|x'\|\leqslant\frac{2}{r}\|y\|.$$

因此,第二个条件亦满足. 引理得证.

推论. 如果引理的条件满足,则 $\mathbf{Y}$ 是完备空间.

事实上, 由于 U 是同态算子, 故从商空间 $\overline{\mathbf{X}}=\mathbf{X}/\mathbf{X}_0$ $(\mathbf{X}_0=U^{-1}(0))$ 到 $\mathbf{Y}$ 的算子 $\overline{U}$ 有连续的逆算子. 因为 $\mathbf{Y}=\overline{U}(\overline{\mathbf{X}})$, 应用定理 1 立得此推论.

引理的条件验证起来比较困难, 更为方便的是下述定理的条件.

定理 2(Banach). 如果 $U(\mathbf{X})$ 是空间 $\mathbf{Y}$ 中的第二纲集合, 则引理的条件得以满足, 从而 U 是从空间 $\mathbf{X}$ 到空间 $\mathbf{Y}$ 上的同态算子.

证. 仍用引理中各记号, 我们来证明: 如果引理的条件不满

足，则集合 $U(B)$ 处处不稠密．设若不然，则可求得空间 $\mathbf{Y}$ 中的以点 $y_0\in\mathbf{Y}$ 为中心以 r 为半径的球 $S(y_0,r)$ 使得

$$\overline{U(B)}\supset S(y_0,r). \tag{7}$$

集合 $U(B)$ 是对称的，即它同时包含元素 y 和 $(-y)$．显然，闭包 $\overline{U(B)}$ 同样是对称的．于是由(7)式可得

$$\overline{U(B)}\supset S(-y_0,r).$$

取 $y\in S_r$．元素 (y_0+y) 和 $(-y_0+y)$ 分别属于 $S(y_0,r)$ 和 $S(-y_0,r)$，因之这两个元素也都属于 $\overline{U(B)}$．但 $U(B)$ 是凸集，因此 $\overline{U(B)}$ 也是凸集，故 $\overline{U(B)}$ 应包含分别属于这两个集合的元素的半和．特别是有

$$y=\frac{1}{2}((y_0+y)+(-y_0+y))\in\overline{U(B)}.$$

于是 $\overline{U(B)}\supset S_r$．

于是，如果引理 1 的条件不满足，集合 $U(B)$ 处处不稠密．同样可证对 $U(B_n)(n\in N)$ 中任何一个也都如此．但因为

$$U(\mathbf{X})=\bigcup_{n=1}^{\infty}U(B_n),$$

故得知 $U(\mathbf{X})$ 是第一纲集合．

定理得证．

我们再指出这个定理的下述推论，它是定理 1 的逆定理．

推论．如果连续线性算子 U 实现了从 B-空间 $\mathbf{X}$ 到 B-空间 $\mathbf{Y}$ 的闭子空间上的一对一的映射，则逆算子 U^{-1} 是连续算子．

事实上，B-空间的闭子空间仍然是 B-空间，因而它本身是第二纲集(见 I. 4.7)．

1.5. 下面我们指出定理 2 的某些直接应用．

假定在向量空间 $\mathbf{X}$ 中用两种不同的办法引进范数．分别以 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 表示在第一种和第二种范数定义方法之下元素 $x\in\mathbf{X}$

的范数. 因此, 集合 $\mathbf{X}$ 就变成两个赋范空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$. 尽管 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 应看成两个不同的赋范空间, 但它们之间可能不存在实质上的区别. 例如当在一个空间中收敛的序列在另一个空间中也收敛于同一个元素时就是如此. 这时, 我们就说空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 中的范数是等价的, 这表明空间 $\mathbf{X}_1$ 和空间 $\mathbf{X}_2$ 是同构的(参见 IV. 1. 3).

定理 3. 设 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 是两个 B-空间, 并且 $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2$*). 如果从在空间 $\mathbf{X}_1$ 中 $x_n \to x$ 可推知在空间 $\mathbf{X}_2$ 中 $x_n \to x$, 则或者 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ 且空间 $\mathbf{X}_1$ 和 $\mathbf{X}_2$ 中的范数等价, 或者 $\mathbf{X}_1$ 是 $\mathbf{X}_2$ 中的第一纲集合.

证. 用 U 表示从空间 $\mathbf{X}_1$ 到空间 $\mathbf{X}_2$ 内的嵌入算子, 也就是说 U 是这样的算子: 它将元素 $x \in \mathbf{X}_1$ 映射为同一个 x, 但看成是 $\mathbf{X}_2$ 中的元素. 易见 U 是连续线性算子. 如果集合 $\mathbf{X}_1 = U(\mathbf{X}_1)$ 是空间 $\mathbf{X}_2$ 中的第二纲集, 则由定理 2 知总有 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2$ 并且 U 有连续的逆算子. 因而, 若在空间 $\mathbf{X}_2$ 中有极限关系 $x_n \to x$ 存在, 则在空间 $\mathbf{X}_1$ 中存在这样的极限关系: $x_n = U^{-1}(x_n) \to U^{-1}(x) = x$. 这就是说空间 $\mathbf{X}_1$ 和空间 $\mathbf{X}_2$ 中的范数是等价的.

注. 象上面一样, 分别用 $\|x\|_1$ 和 $\|x\|_2$ 表示元素 x 在空间 $\mathbf{X}_1$ 中和在空间 $\mathbf{X}_2$ 中的范数, 则范数等价这个事实可以叙述成: 存在常数 $m, M > 0$ 使得

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \qquad (x \in \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2).$$

事实上, 命 $M = \|U\|$ 和 $m = \dfrac{1}{\|U^{-1}\|}$ 即可.

将定理应用到 $\mathbf{X}_1 = \mathbf{C}^{(1)}(D)$ 和 $\mathbf{X}_2 = \mathbf{C}(D)$ 的情形, 我们就得到下述结论: 所有连续可微函数的集合是连续函数空间 $\mathbf{C}$ 中的第一纲集. 同样可知: 几乎处处有界可测函数的集合是空间 $\mathbf{L}^1$ 中的第一纲集, 等等.

---

*) 这时我们假定嵌入关系 $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}_2$ 保持代数运算, 即 $\mathbf{X}_1$ 可看作是 $\mathbf{X}_2$ 中的线性集.

1.6. 设T是从赋范空间$\mathbf{X}$的集合Ω到赋范空间$\mathbf{Y}$上的算子(不一定是线性的)，如果从

$$x_n\in\Omega \quad (n=1,2,\cdots); \qquad x_n\to x_0,\ T(x_n)\to y_0,$$

可推出$x_0\in\Omega$且$T(x_0)=y_0$，则称T是闭算子.

定义于闭集合上的连续线性算子显然是闭算子. 若T是线性闭算子而$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$均为B-空间，则逆命题亦成立，即下述定理成立.

定理 4. 设T是从B-空间$\mathbf{X}$的线性闭集合Ω到B-空间$\mathbf{Y}$内的线性闭算子，则T是连续算子.

证. 在定理的假设之下因Ω本身也是B-空间，故可认为$\Omega=\mathbf{X}$. 在空间$\mathbf{X}$中引进新的范数，命

$$\|x\|_1=\|x\|+\|T(x)\| \qquad (x\in\mathbf{X}). \tag{8}$$

不难验证这样的范数定义满足赋范空间的公理. 今证空间$\mathbf{X}$对于新范数是完备的. 设

$$\lim_{k,n\to\infty}\|x_n-x_k\|_1=0.$$

这表明

$$\lim_{k,n\to\infty}\|x_n-x_k\|=0 \quad 而且 \quad \lim_{k,n\to\infty}\|T(x_n)-T(x_k)\|=0.$$

因为对这样的范数而言空间$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$都是完备的，所以必存在极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \quad 及 \quad \lim_{n\to\infty}T(x_n)=y_0.$$

由算子T的闭性，得知$y_0=T(x_0)$. 但这时

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|_1=\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|+\lim_{n\to\infty}\|T(x_n)-T(x_0)\|=0$$

这就证明了空间$\mathbf{X}$关于新范数是完备的.

因为

$$\|x\|\leqslant\|x\|_1,$$

所以由$\|x_n\|_1\to0$可推知$\|x_n\|\to0$. 利用上一定理，我们就得到

$$\|x\|_1\leqslant M\|x\|.$$

更有

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,$$

这表明算子T是连续的.

注. 定义于整个空间上或闭线性集合上的闭线性算子类与连续线性算子类是重合的. 但若考察在线性(非闭)集上的闭线性算子,则它们实际上构成了较连续算子类更广的一类算子. 例如空间$\mathbf{L}^2(a,b)$中的算子T:

$$y=T(x),\ \ y(t)=\frac{dx(t)}{dt},$$

是定义在所有其导数属于$\mathbf{L}^2(a,\ b)$的绝对连续函数的集合Ω上的,不难验证,T是闭算子但不是连续的.

闭的但非连续的算子主要是在$\mathbf{X}=\mathbf{Y}$是Hilbert空间时加以研究. 一般情形的研究十分困难,因为这要涉及到任意B-空间的结构问题.

§2. 已给方程与其共轭方程之间的联系

本节我们同时考察两个有关联的方程

$$U(x)=y, \tag{1}$$

$$U^*(g)=f. \tag{2}$$

我们称方程(2)是方程(1)的共轭方程. 通常假定U是从空间$\mathbf{X}$到空间$\mathbf{Y}$内的连续线性算子. 尽管本节的某些定理不要求$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$一定是完备空间,但我们以后总认为$\mathbf{X}$和$\mathbf{Y}$是完备的.

本节的定理对于空间$\mathbf{L}^2(a,\ b)$的情形是由Hellinger和Toeplitz [1],[2]证明的;对于空间$\mathbf{l}^p$和$\mathbf{L}^p(a,b)$的情形是由Riesz[3]证明的;一般情形的证明可参见Banach;Zaanen-I.

2.1. 在下面的叙述中,所谓零集合将起很大的作用. 设Γ是空间$\mathbf{X}$中线性泛函的某个集合. 用$\mathbf{N}(\Gamma)$表示对任何$f\in\Gamma$使得

$f(x)=0$ 的所有 $x\in\mathbf{X}$ 的集合. 如果 $E\subset\mathbf{X}$, 则用 $\mathbf{N}^*(E)$ 表示所有这样的泛函的集合, 它在集 E 中每个元素上取值为零. 集合 $\mathbf{N}(\Gamma)$ 和 $\mathbf{N}^*(E)$ 分别叫做集合 Γ 和集合 E 的零集合.

如果我们考察对偶对 $\langle\mathbf{X},\mathbf{X}^*\rangle$, 则显然 $\mathbf{N}(\Gamma)$ 是在 III. 3.2 中作为一般情况而引进的集合 Γ 的零化子 $\Gamma^\perp$, 而 $\mathbf{N}^*(E)$ 是集合 E 的零化子 $E^\perp$. 根据 III. 3.2 中所叙述的零化子和极的性质, 以及在空间 $\mathbf{X}$ 中关于范数闭和弱闭的一致性, 我们就得到: 1) $\mathbf{N}(\Gamma)$ 是 $\mathbf{X}$ 中的闭线性集, 2) $\mathbf{N}(\mathbf{N}^*(E))$ 是 E 的闭线性包, 3) 如果 $\mathbf{X}_0$ 是 $\mathbf{X}$ 中的闭子空间, 则

$$\mathbf{X}_0=\mathbf{N}(\mathbf{N}^*(\mathbf{X}_0)).$$

类似地可以得到: 1) $\mathbf{N}^*(E)$ 是 $\mathbf{X}^*$ 中的 $(*)$-弱闭线性子集, 2) $\mathbf{N}^*(\mathbf{N}(\Gamma))$ 是 Γ 的 $(*)$-弱闭线性包, 3) 如果 $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{X}^*$ 中的 $(*)$-弱闭子空间, 则

$$\mathbf{Z}=\mathbf{N}^*(\mathbf{N}(\mathbf{Z})).$$

因为, 若 $\mathbf{X}$ 是非自反的, 则在 $\mathbf{X}^*$ 中不是所有的关于范数闭的子空间是 $(*)$-弱闭的, 所以不是所有的闭子空间均具有形式 $\mathbf{N}^*(E)\,(E\subset\mathbf{X})$.

设 π: $\mathbf{X}\to\mathbf{X}^{**}$ 是典型嵌入. 如果 E 是空间 $\mathbf{X}$ 中的某个集合, 则用 E_0^{**} 表示 $\pi(E)$, 即 E_0^{**} 是 $\mathbf{X}^*$ 中所有具有形式 $F_x\,(x\in\mathbf{X})$ 的泛函集合, 其中象通常那样

$$F_x(f)=\overline{f(x)}\qquad(f\in\mathbf{X}^*).$$

对于空间 $\mathbf{Y}$ 用类似的记号 $G_y\,(y\in\mathbf{Y})$.

显然, 下式成立:

$$\mathbf{N}^*(E)=\mathbf{N}(E_0^{**}).$$

对于集合 $\Gamma\subset\mathbf{X}^*$, 可以考察两个零集合——$\mathbf{N}(\Gamma)\subset\mathbf{X}$ 和 $\mathbf{N}^*(\Gamma)\subset\mathbf{X}^{**}$. 容易看出

$$[\mathbf{N}(\Gamma)]_0^{**}=\mathbf{N}^*(\Gamma)\cap\mathbf{X}_0^{**},$$