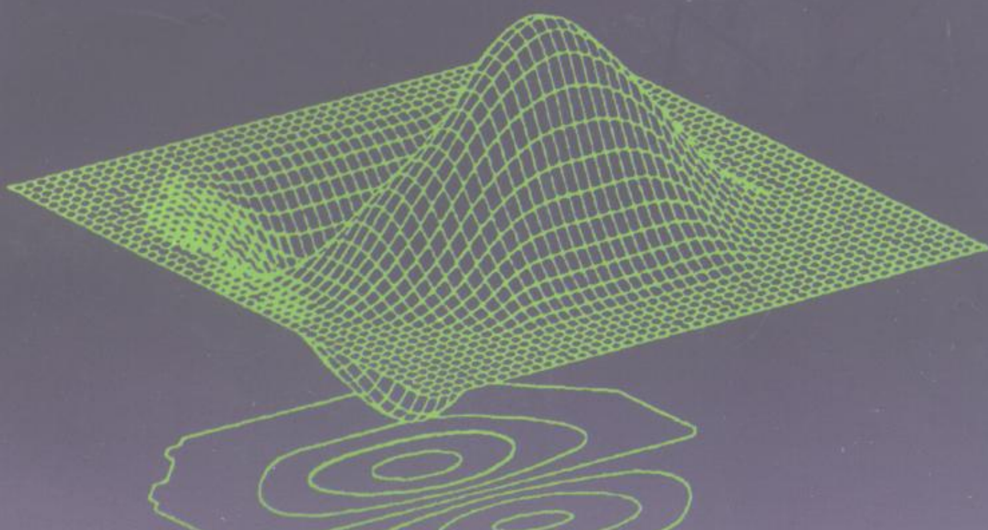
小波分析方法的应用

XIAOBO FENXI FANGFA DE YINGYONG

李建平　唐远炎　著



重庆大学出版社

小波分析方法的应用

李建平　唐远炎　著

重庆大学出版社

内容简介

小波分析是 Fourier 分析理论发表 170 多年来对其最辉煌的继承、总结和发展，对分析工具起着承前启后、继往开来的重要作用，并取得了许多传统分析方法难以实现的显著应用效果，这种分析技术是一种高新技术，是高科技的重要内容，它已经把信息工业和信息技术推向了一个新时代.

本书系统介绍了小波分析的基本思想、基本原理与基本方法，重点介绍了作者本人的研究成果，尤其对小波分析的应用方法、应用技巧及精彩的应用实例作了详细描述. 全书分为基础篇、应用篇和附录.基础篇中分一维、二维、三维等情形介绍了多分辨分析和快速小波算法，并提出了矢量积小波变换，给出了小波滤波器的统一解析构造；应用篇中介绍了小波分析在机械、图像、股票、概率统计及多媒体业务等多方面的应用，有很高的参考价值；附录中给出了因特网上最热门的小波网站和最新小波分析软件，它们为初学者直接进入小波分析应用提供了捷径，为小波专家验证理论结果打开了方便之门.

全书按学术研究方式组织内容和选材，这样可确保其学术参考价值；按教学方式安排内容次序，撰写实施中充分考虑引入简单、通俗易懂和几何直观等特性，便于读者接受.本书可作为高等学校理工科、经济学、工商管理等各专业高年级本科生及研究生学习小波分析的教材和参考书，特别适合信号信息处理等领域的研究人员、工程技术人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

小波分析方法的应用/李建平，唐远炎著. - 重庆：重庆大学出版社，1999.10

ISBN 7-5624-2004-1

Ⅰ.小… Ⅱ.①李… ②唐… Ⅲ.小波分析-应用 Ⅳ.0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 32052 号

小波分析方法的应用

李建平 唐远炎 著

责任编辑 谭 敏

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆建筑大学印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：10.75 字数：269 千

1999 年 10 月第 1 版 2000 年 3 月第 2 次印刷

印数：2001—3000

ISBN 7-5624-2004-1/O·173 定价：20.00 元

本书得到
国 家 自 然 科 学 基 金
香 港 浸 会 大 学 科 研 基 金
重庆市中青年科技专家基金
后勤工程学院青年科学基金

资助出版

前 言

人们在观察事物时，总是对有变化的、无规律的部分感兴趣，而对无变化的、规律性很强的部分反映比较平淡．如何从平静中找出变化，从变化中找出规律，由规律预测未来，这是人们认识事物、认识世界的常规辩证思维过程．变化越多、反应越快，系统越复杂，这就导致了非线性系统的产生．我们认为人的思维应该是非线性的，而不是线性的，不是对表面现象的简单反应，而是透过现象看本质，从杂乱无章中找出规律．微观定量描述这种思维过程的锐利武器和求解非线性系统的有效方法就是小波分析——一种最新局部分析方法．

小波分析作为一门学科，诞生于 20 世纪 80 年代末，涉及科学研究、技术应用的方方面面，它的 10 年发展已经取得了许多理论成果和应用成果，凝聚了全世界无数科研人员的智慧和心血，也充分说明了小波分析本身强大的威力．

1998 年 6 月，国际知名专家、IEEE Senior Fellow、加拿大康可迪亚大学教授、香港浸会大学教授唐远炎博士来重庆参加我国著名计算机专家、重庆大学计算机研究所所长、博士生导师陈廷槐教授 70 寿辰计算机专题学术研讨会，同时参加了李建平的博士学位论文评审和博士学位论文答辩会．期间，向重庆市的科技工作者作了几场精彩的小波分析学术报告．重庆大学外事处处长吴言荪教授听后认为学术报告很有新意，建议将报告提纲整理成书出版，并提出了许多建设性意见．后经陈廷槐教授和中国计算机学会理事、重庆市科技顾问团顾问、重庆大学计算机研究所副所长、博士生导师程代杰教授推荐并经唐远炎教授本人同意，由李建平担任撰写此书的负责人．李建平认真研究了唐远炎教授的报告提纲，查阅了大量小波分析最新文献，补充了许多内容，其中大部分是李建平本人的研究成果，并按学术研究和教材要求双重标准进行构思，尽量做到既有学术参考性，又有教材接受性，完全突破了原来的模式．在撰写过程中，作者通过电子邮件多次向香港浸会大学的唐远炎教授请教并讨论有关问题，唐教授提出了许多宝贵意见，使书稿增色不少．中国科学院数学研究所陈翰麟研究员提出了有益建议，丰富了本书内容．中国科学院院士、电子科技大学教授林为干先生，中国工程院院士黄尚廉先生，中国工程院院士、重庆大学电子与通信工程学院院长杨士中先生提出了十分宝贵的意见．本书，第 13 章取自唐远炎教授在 IEEE PAMI 上发表的论文，第 18 章由重庆大学孙荣恒教授撰写，第 17 章由电子科技大学张万萍撰写，第 9 章由重庆工业高等专科学校严中洪博士撰写，其余部分由李建平撰写．全书由李建平修改统稿，由唐远炎教授审阅．

本书是作者另一本著作《小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现》的姊妹篇，是对该著作的进一步发展和推广．

本书的写作得到后勤工程学院、香港浸会大学、重庆大学、电子科技大学、重庆工业高等专科学校等院校领导和专家们的鼓励和支持．后勤工程学院教务部、基础部、科研处及教研室提供了很好的工作条件，并给予大力支持．陈廷槐教授、程代杰教授、徐问之教授自始至终关心本书的写作，并提供了最新资料．曾理博士、易东博士、田逢春博士、陈志奎博士等提供了帮助．作者在此一并向他们表示衷心感谢．感谢被引用文献的作者以及提出过宝贵意见的各位同行与专家．作者认为本书是国内外小波分析研究人员共同劳动成果的体现，是集体智慧的结晶．王卉小姐打印了本书的全部手稿，付出了辛勤的劳动，作者向她表示感谢．

限于作者水平，加之成稿时间仓促，书中一定有许多不妥之处，恳请专家和读者提出宝贵意见并给予修正，Email: jpli@cqleu.edu.cn，yytang@comp.hkbu.edu.hk.

本书得到国家自然科学基金(批准号 69682011)、香港浸会大学科研基金、重庆市中青年科技专家基金(批准号 YZ98—41101)和后勤工程学院青年科学基金资助.

李建平于
中国人民解放军后勤工程学院
中国重庆
1999年5月20日

唐远炎于
香港浸会大学
中国香港

目 录

基础篇

应用篇

附 录

基 础 篇

第1章　小波分析的引入

本章用通俗的语句和辩证的观点阐述了小波分析的发展历史,有助于读者了解小波分析的发展历史的全貌.

1.1　Fourier 分析:改变世界的诗

尽管小波分析脱离了 Fourier 分析,但是小波分析是 Fourier 分析的发展,是 Fourier 分析的重大突破,这两种分析又同时属于描述自然界的时频分析大家庭.小波分析的历史始于 Fourier 分析的历史.按时间顺序讲,Fourier 分析的起源应当首推 Fourier 本人.Fourier 是逻辑上的起始人物,他对数学、科学以及我们当代生活的影响是不可估量的,然而他并不是一位职业数学家或科学家,它所做的巨大贡献都是忙里偷闲完成的.但人们认为他是世界上至少是法国最伟大的科学家之一.

Fourier 的全名叫 Jean Baptiste Joseph Fourier,生于 1768 年的 Auxerre 市,该市位于法国巴黎(Paris)与 Dijon 之间,是他父亲的第 12 个小孩,是他母亲的第 9 个小孩.当 Fourier 9 岁时,他母亲去世,次年他父亲去世.母亲去世后,Fourier 的两个较小的兄妹被送进育婴堂,但 Fourier 仍然继续上学,并于 1780 年进入 Auxerre 皇家军校学习.13 岁时,他对数学十分着迷,常常一个人爬进教室,点着蜡烛研究数学问题到深夜.他当时的学术成就引起了当地学术界的关注.

后来,法国革命暴发.Fourier 于 1793 年参加 Auxerre 革命委员会,1795 年他先后两次被捕.法国革命结束后,Fourier 到巴黎教书,之后随拿破仑(Napoleon)到埃及(Egypt)并成为埃及研究院的长久负责人,在那里他写了一本关于埃及的书.直到今天,仍然有人认为他是一位埃及学家,并不知道他对数学和物理学的重大贡献.1802 年,Fourier 回到法国,拿破仑任命他为巴黎警察局长达 14 年之久,他作为行政官员,工作十分出色,在政界享有崇高威望.1817 年,Fourier 被送入法国科学院,从此步入较为正规的学术研究阶段.

1.1.1　一首数学史诗

多年的政治生涯及颠簸不定的生活,并没有使 Fourier 放弃研究数学的强烈兴趣.事实上,早在 1807 年他就研究了现在称之为 Fourier 分析的核心内容.1822 年,Fourier 正式出版推动世界科学研究进展的巨著——《热的解析理论》(The Analytic Theory of Heat).由于这一理论成功地求解了困扰科学家 150 年之久的牛顿二体问题微分方程(此方程由牛顿在 17 世纪建立),因此 Fourier 分析成为几乎每个研究领域科学工作者乐于使用的数学工具,尤其是理论科学家.目前,Fourier 的思想和方法 被广泛用于线性规划、大地测量以及电话、收音机、X 射线等难以计数的科学仪器中,是基础科学和应用科学研究开发的系统平台.所以,物理学家 James Clark Maxwell 称赞 Fourier 分析是一首伟大的数学史诗.

1.1.2　Fourier 分析的主要内容

Fourier 的贡献在于二点:①他用数学语言提出任何一个周期函数都能表示为一组正弦函

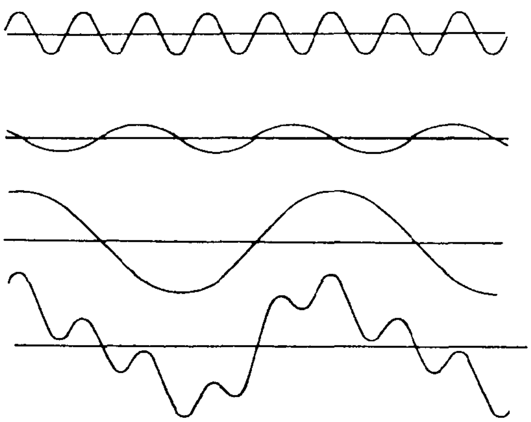


图 1.1 Fourier 分析的几何解释——函数的叠加

数和余弦函数之和，这一无限和，现称之为 Fourier 级数．也就是说，任何一条周期曲线，无论多么跳跃或不规则，都能表示成一组光滑的曲线之和，见图 1.1．这种表达方式实际上是将信号函数投影在由正弦函数和余弦函数组成的正交基上，实施对信号的 Fourier 变换．此论断后来由 Dirichlet 证明．②他解释了为什么这一数学论断是有用的．1807 年，Fourier 显示任何周期函数（图中最下图形）是由正弦和余弦函数（图中上面的三个图形）叠加而成．Fourier 分析从本质上改变了数学家对函数的看法，提供了某些微分方程的直接求解方法，为计算机和 CD 等数字技术的实现铺平了道路．Fourier 分析同时也是量子力学的自然语言．

上述两点是针对周期函数即周期信号而言的，对于非周期函数，通过 Fourier 变换或周期延展转化为周期函数即可．

从本质上讲，Fourier 变换就是一个棱镜（Prism），它把一个信号函数分解为众多的频率成分，这些频率又可以重构原来的信号函数，这种变换是可逆的且保持能量不变．Fourier 棱镜与自然棱镜的原理是一样的，只不过自然棱镜是将自然光分解为多种颜色的光而已．两种棱镜的比较分析见图 1.2．

图 1.2 的理论描述为

$$F(\omega)=\hat{f}(\omega)=\langle f(t),e^{i\omega t}\rangle=\int f(t)e^{-i\omega t}dt \tag{1.1}$$

$$f(t)=\check{F}(\omega)=\int F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{1.2}$$

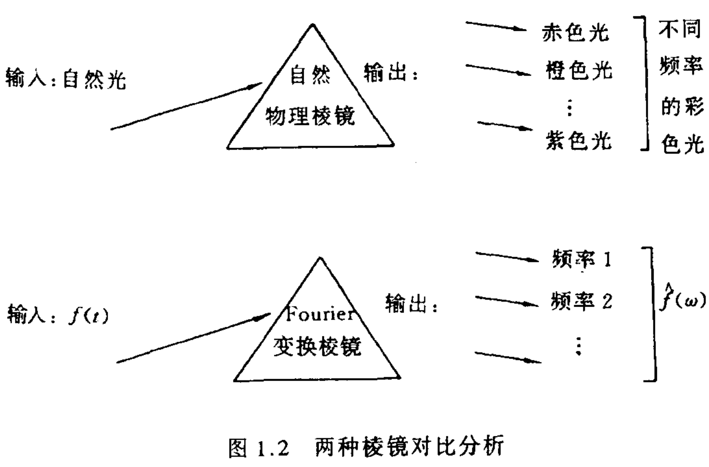


图 1.2 两种棱镜对比分析

$\hat{f}(\omega)$称为 $f(t)$的 Fourier 变换，当信号函数 $f(t)$是周期函数时，$\hat{f}(\omega)$称为 $f(t)$的 Fourier 级数．信号函数 $f(t)$和它的 Fourier 变换 $\hat{f}(\omega)$是同一能量信号的两种不同的表现形式．$f(t)$显示了

时间信息而隐藏了频率信号，$\hat{f}(\omega)$显示了频率信息而隐藏了时间信息.

Fourier 分析将待研究的内容从一个空间变换到另一个空间研究的思想和方法是彻底重大的创新，随着后来量子力学的发现，Fourier 分析理所当然成为描述和求解自然科学的语言.

1.1.3 DFT 与 FFT

Fourier 分析理论是十分完善的，但实现尤其是数值实现并非易事.Shannon 提出的采样定理(Sampling Theorem)打开了数字技术(Digital Technology)研究的大门，于是离散 Fourier 变换(DFT)成为计算机实现 Fourier 变换的第一种形式.DFT 的计算工作量为 $O(N^2)$(N 为待分析的数据长度)，当 N 很大时，$O(N^2)$是计算机无法接受的.1965 年，美国两位工程师提出了计算工作量为 $O(N \lg N)$的快速 Fourier 变换(FFT).正是有了 FFT，Fourier 分析才真正成为人们认识自然、改造自然的流行工具，详见文献[1]和本书第 6 章.

1.2 加窗 Fourier 变换：对 Fourier 变换的修补

FFT 对自然和社会产生了广泛而深远的影响，即使没有必要使用 FFT 的场合，人们也非常乐意使用 FFT.这就对 FFT 的使用产生了误导.事实上，FFT 的作用是有限的.因为 FFT 只是把 DFT 的计算工作量从 $O(N^2)$降为 $O(N \lg N)$，其本质还是 Fourier 变换，Fourier 变换理论至少有如下五点不足.①Fourier 分析擅长处理线性问题，而对非线性问题感到力不从心.这是因为非线性系统具有高度不可预测性，输入端微小的变化会对系统的输出端产生重大影响.例如，牛顿定律方程是非线性的，若用它来预测空间三个物体之间较长时间的行为是十分困难的，甚至是不可能的.其原因是该系统高度不稳定.正如著名科学家 Korner 指出的："19 世纪的伟大发现是证明自然方程是线性的，20 世纪的伟大发现是证明自然方程是非线性的."②Fourier 变换公式(1.1)没有反映出随时间变化的频率，实际上需要的是，人们能够确定时间间隔，使在任何希望的频率范围上产生频谱信息.③在 L^2 以外空间，变换系数不能刻画出 $f(t)$所在的空间.④为了用式(1.1)从信号函数 $f(t)$中提取频谱信息 $F(\omega)$，就要取无限的时间量.⑤因为一个信号的频率与它的周期长度成反比，由此得到，对于高频谱的信息，时间间隔要相对的小，以给出比较好的精度；而对于低频谱的信息，时间间隔要相对的宽，以给出完全的信息.也就是说需要一个灵活可变的时间-频率窗，使得在高"中心频率"时自动变窄，而在低"中心频率"时自动变宽.这就是时-频局部化分析，而 Fourier 变换(1.1)与(1.2)无法做到这一点.

在充分剖析 Fourier 变换上述不足以后，因发明全息照相技术而获得诺贝尔奖的 Dennis Gabor 于 1946 年提出了加窗 Fourier 变换(又称 Gabor 变换)

$$F_g(\omega) = \langle f(t), g_a(t-b)e^{i\omega t}\rangle = \int f(t) g_a(t-b) e^{-i\omega t} dt \tag{1.3}$$

式中 $g_a(t-b)$称为窗函数(又称 Gabor 函数).Gabor 的加窗 Fourier 变换，对弥补 Fourier 变换的五点不足起到一定的作用，但由于加窗 Fourier 变换的时-频窗大小固定，故并没有很好地解决时-频局部化问题.小波分析正是为了克服 Fourier 变换、加窗 Fourier 变换的这些不足而提出来的.

1.3 小波分析的发展历程

小波分析的发展历程充分体现了辩证法思想.不同学科、不同研究者的相互碰撞的火花点燃了小波分析,这一理论是科学家、工程师和数学家们共同创造的,反映了大科学时代学科之间相互综合、相互渗透的强烈趋势.

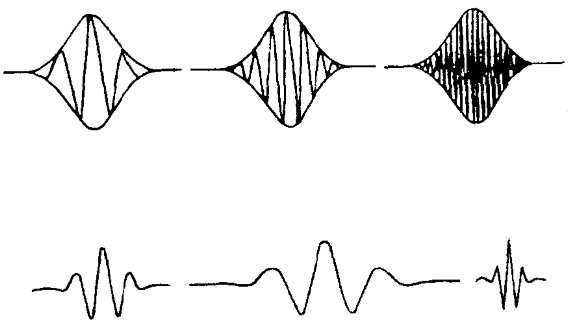


图 1.3 加窗 Fourier 分析与 Morlet 小波

1.3.1 小波分析起源追踪

小波分析的起源可以追溯到非常遥远的时代[1],其说法至少有 15 种以上[2].虽然 1910 年 Haar 提出了最早的小波规范正交基,但当时并没有出现"小波"这个词.Meyer 认为,小波分析思想萌芽于 1930 年至 1980 年,但真正起锤炼作用的是法国地质物理学家 Jean Morlet.20 世纪 60 年代,由于工业发展需要,寻找地下石油成为法国的一项重大项目.地下找油的标准方法是向地下打炮或发射脉冲波,通过反射的信号分析粗略构架地下岩石油层分布,其重要参数是密度.一般情况下,地下结构非常复杂,回收的反射信号也就十分繁多,如何从这些反射信号中提取有用的石油信息是 Morlet 的主要工作.1981 年,Morlet 仔细研究了 Gabor 变换方法,对 Fourier 变换与加窗 Fourier 变换的异同、特点及函数构造做了创造性研究,首次提出了"小波分析"概念,建立了以他的名字命名的 Morlet 小波,见图 1.3.此方法在 Morlet 的地质数据处理中取得巨大成功.意外的成功极大地鼓舞了 Morlet,Morlet 很想对这一方法进行系统研究,作为工程师出身的 Morlet 自感数学理论修养不够,于是 Morlet 找到他的同学、物理学家 Roger Balian, Balian 又推荐理论物理学家 Grossmann 联合研究.一个非常偶然的机会,Grossmann 结识了大数学家 Meyer.Meyer 凭借自己深厚的数学功底对 Morlet 方法进行系统性的、高屋建瓴的研究,为小波分析学科的诞生和发展作出了最重要的贡献.随后,Mallat、Daubechies、Chui 等人的工作联合奠定了小波分析的基础.

由于小波分析的发展是以解决实际问题应用为出发点,尔后上升到理论辐射多学科的,所以小波分析形成一次又一次研究热潮,成为国际研究热点,就不难理解.

1.3.2 多分辨分析及 Mallat 算法的建立

如果说小波分析是一门新的语言,那么多分辨分析及其相应的快速小波算法就是这门新语言的语法,Meyer 和 Mallat 是该语法的主要创立者.

Mallat 是法国人,曾是法国 Ecole Poltytechnique 大学的学生,当时 Meyer 是该大学的数学教授,但俩人并没有见面.后来,Mallat 成为 Philadelphia Pennsylvania 大学的博士研究生,研究计算机视觉.一个偶然的机会,年仅 23 岁的 Mallat 从一个朋友那里得知 Meyer 关于小波分析的思想,尤其是正交小波基的工作,并阅读了 Meyer 的论文.这时,Mallat 认为 Meyer 的方法与他本人的方法有些相似,并可用于图像处理,但有些困难需要克服.1986 年秋,Mallat 多次电话求见已在美国教授小波分析的 Meyer.后来,Meyer 与 Mallat 在美国芝加哥大学见面.俩人充分交换

意见，共同研究难点问题，在三天时间里，他们解决了所有问题，宣告多分辨分析正式形成．由于 Meyer 已是知名的数学教授，而 Mallat 则是年仅 23 岁的计算机视觉博士研究生，在 Meyer 的坚持下，他们俩人共同研究形成的著名论文[3]以 Mallat 个人名义发表．之后，Mallat 将多分辨分析用于图像处理，取得巨大成功[4]．文献[3,4]和他的博士论文[5]使得 Mallat 成为小波分析研究领域的著名学者，此时 Mallat 年仅 26 岁！

这段历史体现了学术研究的传、帮、带作用，再次验证了名师出高徒的道理，从一个侧面说明了二十几岁也能取得重大研究成果．Meyer 与 Mallat 的联手研究成为学术界一段佳话．

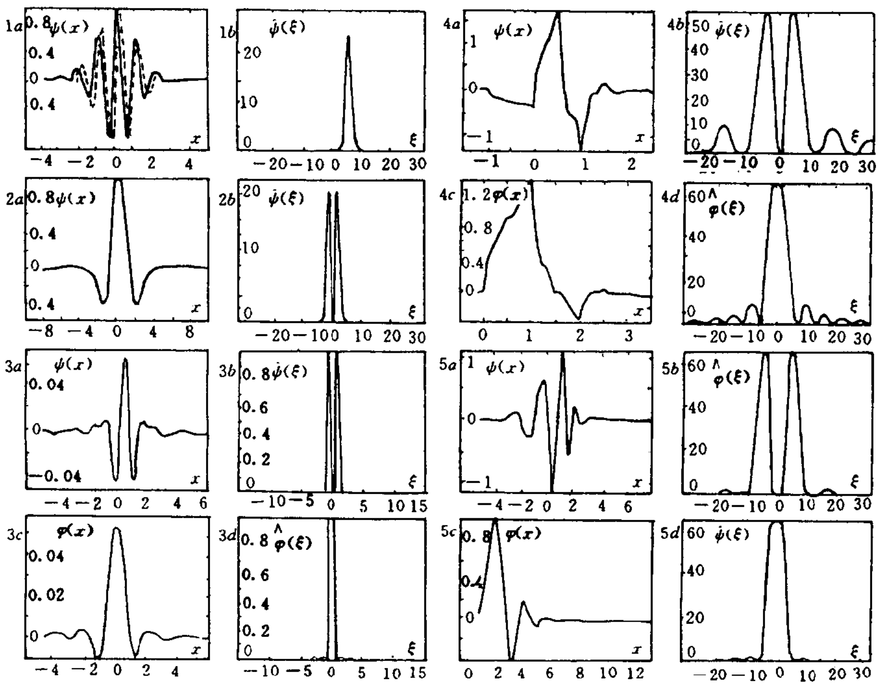


图 1.4　几种小波及其对应的尺度函数与 Fourier 变换

1(a)与 1(b)：Morlet 小波和它的 Fourier 变换，Morlet 小波是复数函数，其虚数部分用点线表示；2(a)与 2(b)：Mexican 帽子小波及其 Fourier 变换．以上小波用于连续小波变换，不需要尺度函数，其余小波产生正交小波基，需要尺度函数．3(a)与 3(b)：4 阶 Meyer 小波及其 Fourier 变换，3(c)与 3(d)：4 阶 Meyer 小波的尺度函数及其 Fourier 变换；4(a)与 4(b)：2 阶 Daubechies 小波及其 Fourier 变换，4(c)与 4(d)：2 阶 Daubechies 小波的尺度函数及其 Fourier 变换；5(a)与 5(b)：7 阶 Daubechies 小波及其 Fourier 变换，5(c)与 5(d)：7 阶 Daubechies 小波的尺度函数及其 Fourier 变换．阶数反映正则度，例如 5(a)就比 4(a)光滑．

1.3.3　Daubechies 小波的提出

Mallat 首次提出快速小波算法（Fast Wavelet Algorithm——FWA）使用的是无限长 Battle-Lemarie 小波的截断函数．截断必然带来误差，而一种新型小波——紧支集正交小波能避免截断，从而消除误差．这种小波的一个例子就是著名的 Daubechies 小波，它是有限长的，即只在有限区间内取非零值．不同于 Morlet 小波与 Meyer 小波，Daubechies 小波是计算机时代的产物．

Daubechies 小波不能用解析公式给出，只能通过迭代方法产生，是迭代过程的极限.研究表明，基于两个或两个以上的尺度函数可以解析构造紧支集正交小波.而多分辨分析不服从 Daubechies 小波的极限过程.从目前研究情况来看，构造对称紧支集正交小波是可能的，例如分形小波、分片多项式小波等多(多重)小波就是这样构造出来的.

迭代方法是解方程的一种重要手段，也是计算机最擅长的基本操作.然而，许多数学家并不喜欢或不擅长使用迭代方法，因为迭代方法无法产生显式函数.对于搞工程的人来说，比如信号处理工作者等，迭代方法是他们使用的最自然、最主要的方法 .作为研究计算机视觉的 Mallat，基于 Burt 和 Adelson 的金字塔算法提出了如何利用迭代方法构造紧支集正交小波的思想，并使数百人为此忙碌.然而，Mallat 本人在与 Meyer 合作建立多分辨分析后，虽然站在构造紧支集正交小波的门口，却把进门的良机让给了 Daubechies.

Daubechies 是比利时人，从小就想成为一名数学物理学家，并为此努力奋斗.在法国攻读博士学位时与 Grossmann 共过事.尔后 Daubechies 在美国研究量子力学，她是五年制 MacArthur 研究员，后又在 Courant 研究所、AT&T 公司做过研究工作.Daubechies 很早就知道 Meyer 和 Mallat 的工作，并对他们的工作非常感兴趣，她用 Meyer 的无限长小波计算小波系数时，发现需要很大的计算工作量，于是，她想能否构造紧支集正交小波呢？这样，一方面可以避免误差，同时可以节省许多计算工作量.在对 Mallat 思想充分研究后，Daubechies 凭借自己数学、物理和计算机科学等多学科的综合知识，用迭代方法建立了著名的 Daubechies 小波[6]，这种小波是目前应用最广泛的一种小波.Grossmann 认为："Daubechies 的工作不仅作出了十分重要的贡献，而且她还制作了适合各种通信的有用的小波传输方式.她既是一名数学家，又是一名物理学家，还是一名工程师."Morlet 小波、Mexican 帽子小波、Meyer 小波、Daubechies 小波及其对应的尺度函数与 Fourier 变换图形见图 1.4.

虽然 Daubechies 小波不能解析构造出来，但其滤波器系数却可以由三角参数解析构造出来，见本书第 9 章.

参考文献

[1] Barbara B H. The world according to wavelets: the story of a mathematical technique in the making. A K Peters Ltd. 1998

[2] 李建平.小波分析与信号处理——理论、应用及软件实现.重庆：重庆出版社，1997.12

[3] Mallat S. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$. Trans. Amer. Math. Soc., 1989,315:69～87

[4] Mallat S. A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Trans. PAMI, 1989,11:674～693

[5] Mallat S. Multiresolution representation and wavelets. Ph. D. Thesis, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia,1988

[6] Daubechies I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. Comm. on Pure and Appl. Math.,1988,41(7):909～996