

小波变换与工程应用

彭玉华 著



科学出版社

73.4126
602

小波变换与工程应用

彭玉华 著



科学出版社

1999

9910101

内 容 简 介

本书从工程应用角度出发,主要介绍小波变换的基本理论与典型应用. 全书共九章,小波变换的基本概念和原理部分介绍连续小波变换、离散小波变换、二进小波变换、多分辨率分析与正交小波变换、多采样率滤波器组与离散序列的小波变换、小波包算法、小波基与采样定理等;小波变换的典型应用部分介绍小波变换下信号的奇异性分析与图像压缩、信号联合时频分析与特征提取、非线性滤波等. 本书以时频分析为主线,在理论分析的基础上,由浅入深、循序渐进地引出连续小波变换、离散框架及多分辨率分析、多采样率滤波器等内容. 书中每一部分内容都给出了计算实例,以利于读者对本书内容的理解.

本书可供从事信号处理、图像处理、模式识别、通信、地震勘测、量子物理、电磁场、机械工程、流体力学、分形、光学、数值计算、语音识别、机器人视觉等研究工作的科研人员和工程技术人员阅读,也可作大专院校上述专业的教师、学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

小波变换与工程应用/彭玉华著. -北京:科学出版社,1999
ISBN 7-03-007471-8

I. 小… II. 彭… III. 小波分析-应用-工程技术 IV. TB112

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第09805号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1999年9月第 一 版 开本:787×1092 1/16

1999年9月第一次印刷 印张:9 1/4

印数:1—2 000 字数:203 000

定价:15.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前 言

写一本关于小波变换与应用方面的书，把小波变换这个有效的信号分析与处理工具介绍给大家，以推动相关学科及工程领域的进展，是我由来已久的心愿。在近几年的科研工作中，我深切体会到小波变换是一种比傅里叶变换还要灵活的信号处理工具，其灵活性、有效性及广泛的实用性等更优于傅里叶变换。可以说，傅里叶变换与短时傅里叶变换属于小波包的范畴，可看成是小波变换的一种极限情况或一个特例。由傅氏变换应用范围之广，对小波变换的应用便可见一斑。由于小波变换潜在的应用领域非常广泛，实在是各领域科研人员及工程技术人员所必备的有力工具。因此，本书把这个有用的工具介绍给大家。在基本理论介绍方面，力求全面、深入浅出，并配有大量的例题及图表，这部分内容可作为入门知识。紧跟每一理论，都有相应的应用范例。这些范例，取材于当前国内外小波应用领域的最新文献及作者近几年的科研成果，对工程应用具有直接的指导意义。此外，本书对当前小波领域的一些新算法、新思想也做了相应介绍。

本书的写作历时三年。尽管在写作中作者竭尽全力，但由于水平有限，难免有不足和错误之处，恳请大家批评指正。

本书的出版得到山东工业大学信息与信号处理省级重点学科、山东省自然科学基金的资助。在本书的编写过程中，得到山东工业大学电子工程系、信息与信号处理省级重点学科及电子工程教研室同仁们的大力支持，并受益于作者的博士生导师、西安交通大学的汪文秉教授、傅君眉教授的悉心教导和帮助。此外还得到现在美国的朱贤阳博士，中国科学院空间研究中心的董晓龙博士后、地球物理所的高静怀博士后，国家邮电部研究所的张玉胜博士、于春阳博士，北京邮电大学的袁超伟博士，以及山东工业大学的姜响应硕士（参加编写了第七章的部分内容并提供了一些计算实例）、石群、潘亮等同志的大力帮助，没有他们的支持和热心的帮助，这本书是不可能完成的。在此一并向他们表示衷心感谢。

目 录

绪论	1
第一章 预备知识	4
1.1 函数空间与基	4
1.1.1 函数空间	4
1.1.2 基底、正交基、双正交基、框架及紧框架	5
1.2 短时傅里叶变换	8
1.3 多采样率数字信号处理的一些基本关系	10
第二章 连续小波变换	13
2.1 连续小波基函数	13
2.2 连续小波变换的概念与性质	16
2.2.1 连续小波变换	16
2.2.2 连续小波变换的一些性质	17
2.3 连续小波变换的逆变换	19
2.3.1 连续小波变换的逆变换 (ICWT)	19
2.3.2 重建核方程 (再生核方程)	20
2.4 几种常用的连续小波基函数与常用信号的连续小波变换	21
2.4.1 几种常用的连续小波基函数	21
2.4.2 几种常用信号的连续小波变换	22
2.5 连续小波变换的应用举例	24
第三章 离散小波变换	28
3.1 尺度与位移的离散化方法	28
3.2 小波框架与离散小波变换的逆变换	30
3.2.1 小波框架	30
3.2.2 离散小波变换的逆变换与重建核问题	31
3.3 二进小波变换	33
3.3.1 二进小波变换及其逆变换	33
3.3.2 二进小波变换的性质	34
第四章 多分辨率分析与正交小波变换	36
4.1 几种正交小波基	36
4.2 多分辨率分析	38
4.2.1 尺度函数与尺度空间	39
4.2.2 多分辨率分析概念的引入	39
4.2.3 小波函数与小波空间	40

4.2.4	正交小波变换与多分辨率分析	41
4.2.5	尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的一些重要性质	43
4.3	二尺度方程及多分辨率滤波器组	44
4.3.1	二尺度方程	44
4.3.2	滤波器组系数 $h_0(n)$ 和 $h_1(n)$ 的性质	46
4.4	正交小波变换的快速算法	49
4.4.1	系数分解的快速算法	49
4.4.2	系数重建的快速算法	51
4.4.3	初始输入序列	51
4.5	离散序列的多分辨率分析与正交小波变换	51
4.5.1	离散序列的小波分解	52
4.5.2	离散序列的小波重构	54
4.5.3	离散小波变换和离散序列小波变换	54
4.6	二维正交小波变换	54
4.6.1	$L^2(R^2)$ 空间的两种正交小波基	54
4.6.2	正方块二维正交小波变换的快速算法	57
4.6.3	初始矩阵的选取	58
4.6.4	离散图像的二维正交小波变换	58
4.7	离散正交小波变换在非线性处理领域的应用	59
第五章	正交小波基的构造	63
5.1	由尺度函数构造正交小波基	63
5.2	紧支集正交小波基的性质和构造	67
5.2.1	有限长度双尺度方程的求解	68
5.2.2	紧支集正交小波基的构造	70
第六章	双通道多采样率滤波器组的设计	79
6.1	双通道多采样率滤波器组的理想重建条件	79
6.2	正交镜像滤波器组与共轭正交滤波器组	81
6.2.1	正交镜像对称滤波器组	81
6.2.2	共轭正交滤波器组	82
6.3	正交滤波器组的设计	86
第七章	小波包的基本原理及其应用	88
7.1	小波包的基本原理	90
7.2	小波包的基	92
7.2.1	固定尺度的小波包基	92
7.2.2	变尺度小波包基	94
7.3	离散信号的小波包系数	98
7.4	最优基的方法	99
7.5	多维小波包	102

7.6	小波包的应用	102
7.6.1	时频分析	102
7.6.2	非线性去噪	103
7.6.3	图像数据压缩	106
第八章	尺度函数与采样定理	109
8.1	Shannon 采样定理与 Shannon 小波	109
8.2	尺度函数与采样定理	110
8.3	用小波基构造采样定理举例	112
第九章	信号的多尺度边缘特征及应用	115
9.1	小波变换模极大值(或过零)点同信号突变点之间的关系	115
9.2	用小波变换模极大值在多尺度上的变化规律来表征信号突变点的性质	118
9.2.1	李氏指数 α	118
9.2.2	突变点的李氏指数同小波变换模极大值之间的关系	119
9.3	由小波变换的模极大值重建原信号	122
9.3.1	重建算法	123
9.3.2	收敛速度及重建信号的信噪比	127
9.3.3	由模极大值重建原信号的其他方法	128
9.3.4	二维情况	130
9.4	应用举例	130
9.4.1	波达时刻检测	130
9.4.2	去噪	131
9.4.3	数据压缩(二维图像压缩)	132
参考文献		134

绪 论

自从 1822 年傅里叶(Fourier)发表“热传导解析理论”以来,傅里叶变换一直是信号处理领域中最完美、应用最广泛、效果最好的一种分析手段.但傅里叶变换只是一种纯频域的分析方法,它在频域的定位性是完全准确的(即频域分辨率最高),而在时域无任何定位性(或分辨能力),也即傅里叶变换所反映的是整个信号全部时间下的整体频域特征,而不能提供任何局部时间段上的频率信息.相反,当一个函数用 δ 函数展开时,它在时间域的定位性是完全准确的,而在频域却无任何定位性(或分辨能力),也即 δ 函数分析所反应的只是信号在全部频率上的整体时域特征,而不能提供任何频率段所对应的时间信息.实际中,对于一些常见的非平稳信号,如音乐信号,在不同时间演奏不同音符;语音信号,在不同时间对应不同音节;探地信号,在目标出现的位置对应一个回波信号等,它们的频域特性都随时间而变化,因此也可称它们为时变信号.对这一类时变信号进行分析,通常需要提取某一时间段(或瞬间)的频域信息或某一频率段所对应的时间信息.因此,寻求一种介于傅里叶分析和 δ 分析之间的,并具有一定的时间和频率分辨率的基函数来分析时变信号,一直是信号处理界及数学界人士长期以来努力的目标.

为了研究信号在局部时间范围的频域特征,1946 年 Gabor 提出了著名的 Gabor 变换,之后又进一步发展为短时傅里叶变换(Short Time Fourier Transform,简记为 STFT,又称为加窗傅里叶变换).目前,STFT 已在许多领域获得了广泛的应用.但由于 STFT 的定义决定了其窗函数的大小和形状均与时间和频率无关而保持固定不变,这对于分析时变信号来说是不利的.高频信号一般持续时间很短,而低频信号持续时间较长,因此,我们期望对于高频信号采用小时间窗,对于低频信号则采用大时间窗进行分析.在进行信号分析时,这种变时间窗的要求同 STFT 的固定时窗(窗不随频率而变化)的特性是相矛盾的.这表明 STFT 在处理这一类问题时已无能为力了.此外,在进行数值计算时,人们希望将基函数离散化,以节约计算时间及存储量.但 Gabor 基无论怎样离散,都不能构成一组正交基,因而给数值计算带来了不便.这些是 Gabor 变换的不足之处,但恰恰是小波变换的特长所在.小波变换不仅继承和发展了 STFT 的局部化的思想,而且克服了窗口大小不随频率变化,缺乏离散正交基的缺点,是一种比较理想的进行信号处理的数学工具.

在小波变换的系统理论发展起来以前,其基本思想已经在许多领域的应用中有所体现,只是还没有在数学上形成一个体系.例如,Burt 在 1982 年提出的金字塔式图像压缩编码概念,通信及语言处理中的子带编码(subband coding),数字信号处理中的多采样率滤波器组(multirate sampling filter bank),计算机视觉中的多分辨率分析等,这些在工程中获得广泛应用的朴实方法,都可以用小波变换作为理论基础.因此,在小波理论日趋成熟的今天,这些工程领域的应用又大大丰富了小波变换的实用意义.此外,由于小波分析与人的感觉过程(例如视觉、听觉)的生理机制颇为类似,因此特别引起了生物医学工程界的兴趣.

小波变换的思想来源于伸缩与平移方法.小波分析方法的提出,最早应属 1910 年 Haar 提出的规范正交基(这是一组非正则基).1938 年, Littlewood-Paley 对傅里叶级数建立了 L-P 理论,即按二进制频率成分分组. Fourier 变换的相位变换本质上不影响函数的形状与大小. 1965 年 Calderon 发现了再生公式,它的离散形式已接近小波展开,只是还无法得到组成一正交系的结论. 1981 年, Stormberg 对 Haar 系进行了改进,证明了小波函数的存在性. 1982 年 Battle 在构造量子场论中采

用了类似于 Galderon 再生公式的展开形式.

小波概念的真正出现应算于 1984 年. 法国地球物理学家 J. Morlet 在分析地震数据时提出将地震波按一个确定函数的伸缩、平移系 $\left\{ |a|^{-\frac{1}{2}} \psi \left(\frac{x-b}{a} \right); a, b \in R, a \neq 0 \right\}$ 展开. 随后, 他与 A. Grossmann 共同进行研究, 发展了连续小波变换的几何体系. 由此能将任意一个信号分解成对空间和尺度的贡献. 1985 年, Y. Meyer, A. Grossmann 与 I. Daubechies 共同进行研究, 选取连续小波空间的一个离散子集, 得到了一组离散的小波基(称为小波框架); 而且根据小波框架的离散子集的函数, 恢复了连续小波函数的全空间. 随后, 人们试图寻找一组离散的正交小波基, 但没有成功. 1986 年, Y. Meyer 在证明不可能存在时频域都具有一定正则性的正交小波基时, 却意外地发现了具有一定衰减性的光滑性函数 ψ , 使 $\{2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k) | j, k \in \mathbb{Z}\}$ 构成 $L^2(R)$ 的规范正交基, 从而证明了确实存在小波正交系. 后来, Lemarie 和 Battle 又分别独立地构造了具有指数衰减的小波函数. 1987 年, Mallat 将计算机视觉领域的多尺度分析思想引入到小波分析中, 提出多分辨率分析概念, 统一了在此之前的所有具体正交小波基的构造, 并且提出相应的分解与重构快速算法. 1988 年, I. Daubechies 在美国 NSF/CBMS 主办的小波专题研讨会上进行了 10 次讲演^[4], 引起了广大数学家、观察学家、物理学家甚至某些企业家的重视, 由此将小波分析的理论发展与实际应用推向了一个高潮.

在此之后, 小波变换作为信号处理的一种手段, 逐渐被越来越多领域的理论工作者和工程技术人员所重视和应用, 并在许多应用中取得了显著的效果, 同传统的处理方法相比, 产生了质的飞跃, 证明了小波技术作为一种调和分析方法, 具有十分巨大的生命力和广阔的应用前景. 与此同时, 小波理论在应用中也得到了长足的发展. 其相应的工程软件包也愈来愈多, 如 Math Works 公司的 “Wavelet Toolbox”^[72], Stanford 大学的 Donoho 小组研制的 “WaveTool”, Yale 小组的 XWPL WPLab 软件^[74], Stanford 和 Taswell 的 WavBox 软件^[73], Spain 的一个小组研制的 Uvi-Wave 软件, MathSoft 公司的 S+WAVELETS 软件, Aware 公司的 WaveTool 软件, Rice 的 DSP 小组的 MATLAB wavelet toolbox(网址: <http://www-dsp.rice.edu>)等, 这许多软件均可免费从 Internet 网上下载. 文献[71]列举了几种常见的小波软件包, 并对其功能进行了详细的描述. 可以预见, 在不久的将来, 小波分析必将在工程和科技各领域发挥更大的作用, 正因为如此, 它也成为了广大科技人员、数学家们必须掌握的一种信号处理工具.

目前小波在许多领域得到了广泛应用, 如 J. Morlet 等将小波用于地震信号的分析与处理; S. Mallat 将二进小波变换用于图像的边缘检测、图像压缩与重构; M. Farge 将连续小波变换用于涡流的研究^[23,24]; M. V. Wickerhauser 将小波包的理论用于图像的压缩^[58,59]; M. Frisch 等将小波变换用于噪声中的未知瞬态信号^[42]; P. Dutilleux 等将小波变换用于语音信号的分析、变换和综合^[16]; H. Kim 等将小波变换用于时频分析^[45]; G. Beylkin 将正交小波变换用于算子及拟微分算子的化简; E. Bocry 等将小波变换的自适应性用于解微分方程; 以及本书作者将小波变换用于电磁场领域的若干问题研究^[50~52,80~82]等, 都取得了初步成果.

总之, 小波变换作为一种数学理论和方法在科学技术界引起了越来越多的关注和重视. 在数学家们看来, 基于小波变换的小波分析技术是泛函分析、调和分析、数值分析等半个多世纪以来发展最完美的结晶, 是正在发展中的新的数学分支. 在工程应用领域, 特别是在信号处理、图像处理、模式识别、语音识别、量子物理、地震勘测、流体力学、电磁场、CT 成像、机器视觉、机械故障诊断与监控、分形、数值计算等领域, 它被认为是近年来在工具及方法上的重大突破. 可以预料, 在今后数年中, 它将成为科技工作者经常使用的又一锐利的数学工具, 会极大地促进科技及工程应用的各个领

域的新发展.

本书旨在将小波变换基本理论及典型应用介绍给广大读者. 基于这种思想, 我们尽量避免繁琐复杂的数学推导, 采用工程观点及物理概念叙述其思想. 书中还加有大量的实例, 以揭示小波变换的实质, 但同时也不失数学的完美性.

第一章 预备知识

小波分析是在现代调和分析的基础上发展起来的,其基础知识涉及到泛函分析、傅里叶分析、信号与系统、数字信号处理等诸多方面.在这里我们简要介绍一下与小波分析有关的泛函分析、傅里叶分析及多分辨率数字信号处理的有关基础知识.

1.1 函数空间与基

在本书中,我们将采用如下标准符号:

Z 代表整数集, R 代表实数集, C 代表复数集, Z^+ 代表正整数集, R^n 代表 n 维欧氏空间, 内积为 $\langle x, y \rangle = \int_R x(t) \cdot \overline{y(t)} dt$, $\overline{y}$ 表示 y 的共轭.

泛函分析是本世纪初开始发展起来的一个重要数学分支,它是以集合论为基础的现代分析的一个基本组成部分.在泛函分析的研究中,一个很重要的基本概念是函数空间.所谓函数空间,即由函数构成的集合.为了便于研究,人们又在集合上赋予各种代数、拓扑结构.在此,我们给出几种最简单最常用的函数空间的定义,并列出它们的主要性质.然后再给出空间的基和算子的概念.

1.1.1 函数空间

定义1 距离空间

设 X 是任一集合,如果 X 中任意两个元素 x 与 y ,都对应一个实数 $\rho(x, y)$,而且满足:

①非负性: $\rho(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时, $\rho(x, y) = 0$,

②对称性: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

③三角不等式: 对于任意的 $x, y, z \in X$, 有 $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, 则称 $\rho(x, y)$ 为 x 与 y 之间的距离, 而称 X 为以 $\rho(x, y)$ 为距离的距离空间. 常用的距离空间有如下几种:

(1) n 维欧氏空间. 设 R^n 表示 n 维向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的全体所组成的集合, 称为 n 维欧氏空间, 其中 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 都是实数.

对于任意的 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$, 定义

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

为 R^n 空间的距离, 因此, 按照 $\rho(x, y)$, R^n 是一个距离空间.

(2) 连续函数空间 $C[a, b]$. 令:

$$C[a, b] = \{x(t) : x(t) \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数} \} \quad (1.2)$$

则称 $C[a, b]$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数空间, 在 $C[a, b]$ 上定义

$$\rho(x, y) = \max |x(t) - y(t)|, \quad t \in [a, b]; x, y \in C[a, b] \quad (1.3)$$

可以证明 $\rho(x, y)$ 满足距离三条件, 故 $C[a, b]$ 按照距离 $\rho(x, y)$ 是一个距离空间.

(3) 平方可积函数空间 $L^2(R)$. 令:

$$L^2(R) = \left\{ x(t) : \int_R |x(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1.4)$$

则称 $L^2(R)$ 为平方可积空间, 在 $L^2(R)$ 上定义

$$\rho(x, y) = \left(\int_R [x(t) - y(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad x, y \in L^2(R) \quad (1.5)$$

则 $L^2(R)$ 空间按照式(1.5)为一距离空间.

(4)平方可和离散序列空间 l^2 . 令:

$$l^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\} \quad (1.6)$$

则称 l^2 为平方可和离散序列空间. 若 $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \in l^2, y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \in l^2$, 定义

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

则 l^2 按照上式为一距离空间.

定义2 线性空间

设 X 为一非空集合, 若在 X 中规定了线性运算——元素的加法和元素的数乘运算, 并满足相应的加法或数乘的结合律及分配律, 则称 X 为一线性空间或向量空间. 对于线性空间的任一向量我们用范数来定义其长度.

定义3 线性赋范空间

设 X 为一线性空间, 若对于任意 $x \in X$ 有一个确定的非负实数 $\|x\|$ 与它对应, 并满足:

① $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$, 当且仅当 $x = \theta$ 时, $\|x\| = 0$;

② $\forall x \in X$ 及 $\lambda \in R, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

③ $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

则称 $\|x\|$ 为 x 的范数, X 为线性赋范空间.

由范数可诱导距离: 令 $\rho(x, y) = \|y - x\|$, 因此线性赋范空间一定是距离空间.

定义4 巴拿赫空间

若空间 X 中的任一柯西序列 $\{x_i\}_{i \in Z}$ 都有极限, 且此极限都在 X 中, 则该空间为完备的, 完备的线性赋范空间称为巴拿赫空间. 其中柯西序列 $\{\mu_i\}_{i \in Z}$ 是指当 $n, m \rightarrow \infty$ 时, $\|\mu_n - \mu_m\| \rightarrow 0$.

定义5 希尔伯特空间(Hilbert 空间)

设 X 为复数域 C 上的线性空间, 若从 $X \times X$ 到 C 中定义一个函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 使对任意 $x, y, z \in X$, 满足:

① $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

② $\forall \alpha, \beta \in C$, 有 $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

③ $\langle x, x \rangle \geq 0$, 当且仅当 $x = \theta$ 时, 有 $\langle x, x \rangle = 0$;

则称函数 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 X 中的内积, 定义了内积的空间 X , 称为内积空间. 在内积空间中, 定义范数 $\|\cdot\|$ 如下: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, 而定义距离 $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$, 则内积空间必为线性赋范空间. 完备的内积空间称为 Hilbert 空间.

1.1.2 基底、正交基、双正交基、框架及紧框架

本书涉及到的另外一个重要的泛函概念为函数空间的基及函数展开的问题. 本书中我们不仅会遇到熟悉的正交基概念问题, 还会遇到双正交基及框架概念问题, 因此, 在这里我们先对这些重要概念作一介绍.

1. 基、正交基和双正交基

定义6 由函数序列张成的空间

设 $e_k(t)$ 为一函数序列, X 表示 $e_k(t)$ 所有可能的线性组合构成的集合, 即

$$X = \left\{ \sum_k a_k e_k(t); t, a_k \in R, k \in Z \right\} \quad (1.8)$$

称 X 为由序列 $e_k(t)$ 张成的线性空间, 记作

$$X = \text{span}\{e_k\} \quad (1.9)$$

也即对任意 $g(t) \in X$, 有

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \quad (1.10)$$

定义7 基底

若 $e_k(t)$ 是线性无关的, 使得对任意 $g \in X$, 式(1.10)中的系数 a_k 取唯一的值, 我们称 $\{e_k(t)\}_{k \in Z}$ 为空间 X 的一个基底.

定义8 正交

x, y 为内积空间 X 的两个元素, 若 $\langle x, y \rangle = 0$, 则称 x, y 为正交的, 用 $x \perp y$ 表示.

定义9 标准正交系

若内积空间 X 中元素列 $\{e_n\}$ 满足

$$\langle e_m, e_n \rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases} \quad (1.11)$$

则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的标准正交系.

定义10 完全的标准正交系

设 X 为内积空间, $\{e_n\}$ 为 X 中的一个标准正交系, 若 $x \in X, x \perp e_n (n=1, 2, \dots)$, 则必有 $x = \theta$. 换句话说, X 中不再存在非零元素, 使它与所有的 e_n 正交, 则称 $\{e_n\}$ 为 X 中的完全的标准正交系.

定理1 设 $\{e_n\} (n=1, 2, \dots)$ 为 Hilbert 空间 X 中的标准正交系, 且令 $M = \overline{\text{span}\{e_n; n=1, 2, \dots\}}$, 则下列四个条件是等价的:

$$(1) \quad \{e_n\} \text{ 为 } X \text{ 的完全标准正交系} \quad (1.12)$$

$$(2) \quad M = X \quad (1.13)$$

$$(3) \quad \text{对 } \forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2, \text{ (Parseval 等式)} \quad (1.14)$$

$$(4) \quad \text{对 } \forall x \in X, x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \quad (1.15)$$

称式(1.15)为 x 关于完全标准正交系的傅里叶展开, $\langle x, e_n \rangle$ 称为傅里叶展开系数. 其几何意义是: x 等于它的各分量 $\langle x, e_n \rangle e_n$ 之向量和.

通过上述定理, 把数学分析中的傅里叶展开式推广到了抽象的 Hilbert 空间中, 并揭示了完全标准正交系、Parseval 等式(能量守恒定律)及傅里叶展开式之间的本质联系. 因此, 只要找到这种正交系, 则空间中的任意元素均可表示为一个傅里叶级数的形式:

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \quad (1.16)$$

其中

$$a_k = \langle g(t), e_k(t) \rangle \quad (1.17)$$

称为傅里叶级数. 例如, 复空间 $L^2(0, 2\pi)$ 的一组规范正交基为函数系 $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$, 则 $L^2(0, 2\pi)$ 内的任意函数在该系下的展开系数称为傅里叶级数. 傅里叶级数是用来分析周期 $T=2\pi$ 的函数的. 当周期 $T \rightarrow \infty$ 时, 我们可得到任意非周期函数的傅里叶展开, 只是这时级数被积分取代了, 这就引出了我们所熟悉的傅里叶变换. 对于 $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-j\omega x} dx \quad (1.18)$$

定义11 双正交基

有些情况下, 基底 $e_k(t)$ 之间并不满足式(1.11)的正交关系. 对于这种情况, 引入对偶基 $\tilde{e}_k(t)$ 的概念:

$$\langle e_l(t), \tilde{e}_k(t) \rangle = \delta(l - k) \quad (1.19)$$

则我们也可得到形如式(1.15)的函数分析和综合公式:

$$g(t) = \sum_k \langle g(t), \tilde{e}_k(t) \rangle e_k(t) \quad (1.20)$$

由于这里正交性存在于展开系和对偶系之间, 所以这种基称为双正交基.

2. 框架和紧框架

由正交基和双正交基的概念知道, 若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组正交基, 则对于任意函数 $g(t) \in X$, 可按式(1.15)将其展开; 若函数序列 $e_k(t)$ 是空间 X 的一组双正交基, 则对任意函数 $g(t) \in X$, 可按(1.20)式将其展开. 在这两种展开形式下, 其展开系数是唯一的. 因为无论正交基还是双正交基, 它们的基元素之间都是不相关的.

如果一个函数序列 $\psi_k(t)$ 是相关的, 并且仍然允许空间 X 中的元素按照式(1.20)展开, 此时我们称这个函数序列 $\psi_k(t)$ 为框架. 若我们希望框架下的展开系数 $\langle g(t), \psi_k(t) \rangle$ 能够很好地表述原信号 $g(t)$, 则在两域(原始信号和展开域)之间必须有一个能量对应关系, 相似于正交基的 Parseval 定理(式(1.14)), 对框架来说, 必须满足下述定义12.

定义12 框架

设 H 为一 Hilbert 空间, $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 H 中的一个函数序列, 若对于任意 $f \in H$, 存在 $0 < A < B < \infty$, 使得下述不等式成立:

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (1.21)$$

则称 $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为一个框架; 称 A, B 分别为框架的上、下界.

定义13 紧框架

若 $A=B$, 则称此框架为一紧框架, 此时式(1.21)变为

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 = A\|f\|^2 \quad (1.22)$$

由此式可推得

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \quad (1.23)$$

需要特别指出, 满足上式的紧框架 $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 一般并非正交的. 例如, 我们假设空间 H 为 C^2 , 即二维向量的空间, 取 $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 如图1.1所示. 对任意矢量 $V = (v_1, v_2) \in C^2$, 有

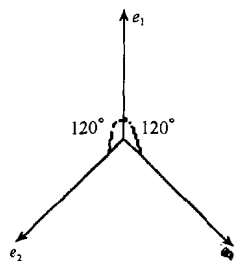


图1.1 紧框架

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^3 |\langle V, e_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} [|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2} \|V\|^2\end{aligned}\quad (1.24)$$

由此可知, $\{e_1, e_2, e_3\}$ 构成了 C^2 空间的一个紧框架, 且 $A=B=3/2$, 但它显然不是一个正交基 ($e_1+e_2+e_3=0$, 三者相关). 框架界 $3/2$ 给出了这个离散框架的冗余度 (用三个矢量描述二维空间). 若 $A=B=1$, $\|\psi_j\|=1 (j \in Z)$, 则此时 ψ_j 为一正交基, 并且

$$f = \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \quad (1.25)$$

式 (1.25) 给出了紧框架情况下由 $\langle f, \psi_j \rangle$ 重建原函数的公式. 下面我们推导当 $A \neq B$ 时, 由 $\langle f, \psi_j \rangle$ 重建原函数的公式. 首先定义算子 F 如下:

$$Ff = \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \overset{\text{记作}}{\psi_j} = g$$

则其逆运算可形式地表示成

$$f = F^{-1}g = F^{-1} \left[\sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \right] = \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle F^{-1} \psi_j \quad (1.26)$$

令 $F^{-1} \psi_j = \tilde{\psi}_j$, 则式 (1.26) 可写为

$$f = \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \cdot \tilde{\psi}_j \quad (1.27)$$

以上说明重建原函数的关键在于寻找 ψ_j 的对偶序列 $\tilde{\psi}_j$. 对偶的严谨数学推导较为复杂, 我们在这里不作讨论, 文献 [4] 中对此问题作了较深入的研究, 现把一些主要结果列举如下:

1) $\tilde{\psi}_j$ 也构成一个框架, 其上、下界恰与 ψ_j 的上、下界呈倒数关系, 即

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in Z} |\langle f, \tilde{\psi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \quad (1.28)$$

2) 在 A 与 B 比较接近时, 作为一阶近似, 可取

$$\tilde{\psi}_j = \frac{2}{A+B} \psi_j \quad (1.29)$$

因此

$$f(t) \approx \frac{2}{A+B} \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \cdot \psi_j(t) \quad (1.30)$$

若计入误差

$$f(t) = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in Z} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j(t) + R_f \quad (1.31)$$

式中 R_f 表示 $f(t)$ 作一阶逼近的残差.

$$\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A} = \frac{r}{2+r}, \quad r = \frac{B}{A} - 1 \quad (1.32)$$

所以

$$\|R_f\| = \|R\| \cdot \|f\| = \frac{r}{2+r} \|f\| \quad (1.33)$$

1.2 短时傅里叶变换

对于一些常见的非平稳信号, 例如, 音乐信号、语音信号、探地信号等, 它们的频域特性都是随

时间而变化的,我们称这样的信号为非平稳信号.对这一类信号用傅里叶变换进行分析,不能提供完全的信息,也即通过傅里叶变换,我们虽然可以知道信号所含有的频率信息,但不能知道这些频率信息究竟出现在哪些时间段上.可见,若要提取局部时间段(或瞬间)的频域特征信息,傅里叶变换已经不再适用了.

为了研究信号在局部范围的频域特征,1946年 Garbor 提出了加窗 Fourier 变换(也称 Garbor 变换).其基本思想是,取时间函数 $g(t)=\pi^{-1/4}e^{-t^2/2}$ 作为窗口函数(如图1.2(a)所示),用 $g(t-\tau)$ 同待分析函数(本节中我们称信号为函数) $f(t)$ 相乘,然后再进行傅里叶变换:

$$G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt = \langle f(t) \cdot g'_{\omega, \tau}(t) \rangle \quad (1.34)$$

其中

$$g'_{\omega, \tau}(t) = \overline{g(t-\tau)e^{-j\omega t}} = g(t-\tau)e^{j\omega t} \quad (1.35)$$

称上式为窗口函数 $g(t)$ 的窗口 Fourier 变换或 Garbor 变换.

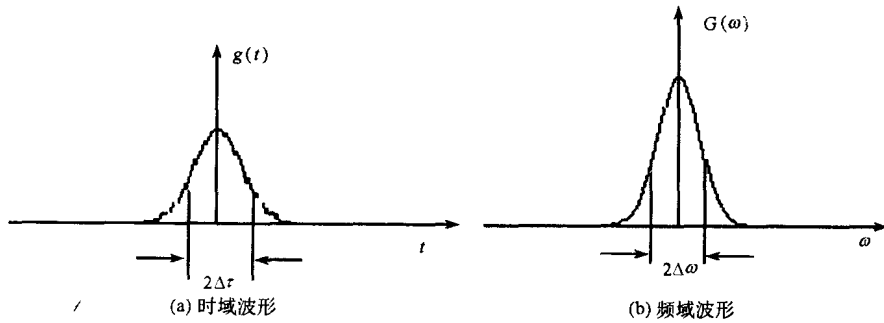


图1.2 Gabor 变换窗口函数的时、频域波形

由 Garbor 变换得知, $G_f(\omega, \tau)$ 表示的是 $f(t)$ 的以 τ 为中心、左右为 $\Delta\tau$ (如图1.2(a)所示)局部时间内的频谱特性.窗口宽度 $\Delta\tau$ 的大小决定了时间域的分辨率.由于式(1.34)中 $G_f(\omega, \tau)$ 实际上是 $f(t) \cdot g(t-\tau)$ (即加窗后的 $f(t)$) 的傅氏变换.设 $G(\omega)$ 为窗口函数 $g(t)$ 的傅氏变换,其形状如图1.2(b)所示.由

$$G_f(\omega, \tau) = F(\omega) * G(\omega)e^{j\omega\tau} \quad (1.36)$$

可知,在 $\tau=\tau_0$ 时, Gabor 变换 $G_f(\omega, \tau_0)$ 实际上描述的是信号频谱 $F(\omega)$ 经频域窗 $G(\omega)e^{j\omega\tau_0}$ 卷积平滑后的结果(式(1.36)).其平滑对原函数频谱 $F(\omega)$ 的影响由 $G(\omega)$ 的窗口 $2\Delta\omega$ 决定,因此窗口函数 $g(t)$ 的频域窗口 $2\Delta\omega$ 的大小又决定了 Gabor 变换的频域分辨率.总之, Gabor 变换的时频域分辨率是由窗口函数的时频域窗口大小直接决定的,一旦窗口函数 $g(t)$ 选定,其时频分辨率就已确定,并且不随频率 ω 和时间 τ 而变化.将图1.2(a)和(b)的窗口绘在一张图上,我们得到了图1.3 Gabor 变换 $(G_f(\omega, \tau))$ 的时频相平面.由图可知, Gabor 变换确实能反映出一个信号在任意局部范围的频域特征,这是它比傅里叶变换优越之处;而且 Gabor 变换具有反演公式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} g(t-\tau) G_f(\omega, \tau) d\tau \quad (1.37)$$

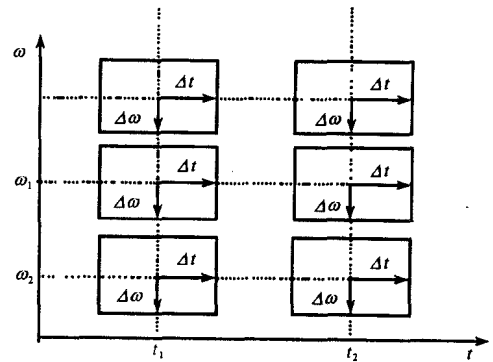


图1.3 Gabor 变换的相平面

因此, $G_f(\omega, \tau)$ 也确实包含了 $f(t)$ 的全部信息.

通常为了提高时、频域的分辨率, 我们希望 $\Delta\tau, \Delta\omega$ 都尽量小. 但由傅里叶变换的性质知, $\Delta\omega$ 或 $\Delta\tau$ 不可能同时减小, 其一方的减小必引起另一方的增大. 因此, 对同一窗口函数来说, 时、频域的分辨率是相互关联的. 著名的海森堡测不准原理所告诉我们: $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq c$ (c 为一常数), 因此时、频域的分辨率不可能无限制地提高.

在 Garbor 变换的基础上, 为了适应不同问题的需要, 人们又构造了多种形式的窗口函数, 如常用的矩形窗, 汉明窗等. 我们将这一类的加窗 Fourier 变换统称为短时傅里叶变换 (Short Time Fourier Transform, 简称为 STFT). 目前 STFT 在许多领域获得了应用.

STFT 变换虽然可以描述某一局部时间段上的频率信息, 但是其时、频域的窗口 Δt 和 $\Delta\omega$ 不随

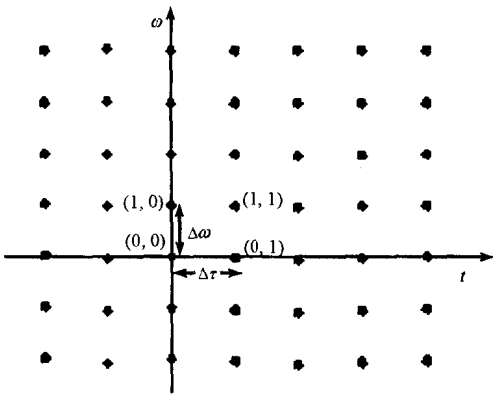


图1.4 离散傅里叶变换分辨元的相空间表示

ω 和 τ 的变化而变化. 对于我们要分析的非稳态信号来说, 也许某一小时间段上是以高频信息为主, 我们希望用小时间窗口进行分析, 而在紧跟着的一个长时间段上是一些低频信息, 我们希望用一个大时间窗进行分析. 因此, 对一个时变的非稳态信号, 我们很难找到一个“好的”时间窗口来适合于不同的时间段. 这又是 STFT 的不足之处.

此外, 还可以证明, 无论将 ω, τ 如何离散化 (如图 1.4 所示), $g_{\omega\tau}(t)$ 都不能形成 $L^2(R)$ 上的正交基. 因此, 为了不丢失信息, 在信号分析或数值计算中必须采用非正交的冗余基, 这就增加了不必要的计算量和存储量. 这些缺点, 使 STFT 的应用受到了局限. 本书

介绍的小波变换, 继承和发展了 STFT 局部化思想, 同时又克服了窗口大小不随频率变化, 缺乏离散正交基等缺点, 是进行信号时、频域分析, 处理非卷积型线性算子、变系数线性微分算子等的比较理想的数学工具.

1.3 多采样率数字信号处理的一些基本关系

与多采样率有关的两个最基本概念为插值和抽取

(1) 插值

插值时的波形及符号如图 1.5 所示.

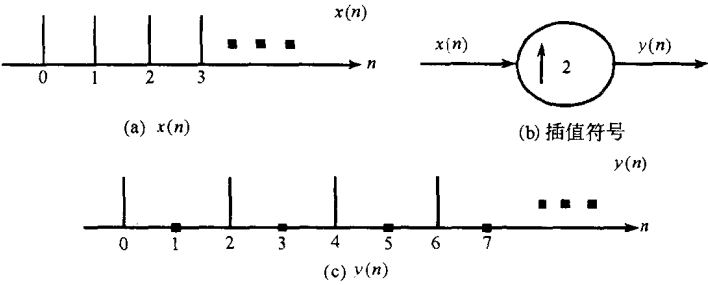


图1.5 插值时域波形及符号 ($M=2$)