

李承地 著

断裂判据与

在混凝土工程中的应用

FRACITURE CRITERION & ITS APPLICATION
IN CONCRETE ENGINEERING

科学出版社

断裂判据与 在混凝土工程中应用

尹双增 著



科学出版社

1996

内 容 简 介

本书是在著者多年研究成果的基础上撰写而成的专著。它系统地论述了国际上几种断裂判据,重点阐释著者提出的两个新的判据理论。还就断裂判据理论的工程应用问题进行了研究,特别是对在混凝土工程中的应用进行了分析和计算。

断裂判据是断裂力学及断裂分析中的中心问题,国内外学者对此作了很多探讨和研究。在线弹性断裂力学中,比较通行的有最大周向正应力理论、能量释放率理论、应变能密度理论等。著者提出的塑性区最短距离理论,是基于裂纹尖端塑性区在裂纹扩展中的力学行为进行研究的,所得出的判据理论和计算结果,更接近实际,计算也更方便。在弹塑性断裂力学中,较通用的是 COD 判据和 Rice 积分理论。著者提出的 T 积分准则包含了线弹性与弹塑性两个阶段的不同情况,比 Rice 积分的物理概念和定义域更加明确。

书中主要内容是著者的研究成果。这些研究成果不仅有明显的工程应用价值,而且有较高的理论价值。

本书可供从事断裂力学、材料科学及水利、土木、交通、铁路、桥梁、化工等工作的研究人员、工程技术人员及有关专业的教师、研究生阅读和参考。

断裂判据与在混凝土工程中应用

尹双增 著

责任编辑 陈文芳

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996 年 10 月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1996 年 10 月第一次印刷 印张:5 1/4

印数:1--1100 字数:134 000

ISBN 7-03-005357-5/O · 858

定价:20.80 元

前 言

断裂判据是断裂力学中的一个中心问题. 为此, 国内外学者作了大量的探讨和研究. 在线弹性断裂力学中通行的有最大周向正应力理论、能量释放率理论、应变能密度理论等. 本人提出的塑性区最短距离判据, 是基于裂纹尖端塑性区在裂纹扩展中的力学行为进行研究的. 它得出的结论和结果比前几种理论更接近实际, 计算也方便. 在弹塑性断裂力学中通用的是 COD 判据和 Rice 积分. 本人提出的 T 积分准则包含了线弹性和弹塑性两个阶段的不同情况, 比 Rice 积分的物理概念和定义域更清楚.

本书系统地论述了目前国际上流行的几种断裂判据理论, 重点阐述了作者提出的两个判据理论. 还就判据理论的工程应用问题进行了研究, 特别是对在混凝土工程中的应用, 进行了较深入的理论分析和计算.

本书大部分内容是作者的研究成果, 其中 § 3-1 和 § 3-5 是作者和翟奇愚先生合作研究的; § 3-2 和 § 3-4 是和林泉、翟奇愚、周晶先生合作研究的; § 4-3 和 § 4-4 是与魏群、章灵文、高传昌合作研究的.

作者 60 年代毕业于清华大学. 在清华大学的 6 年学习中, 不仅打下了较坚实的基础, 也训练出刻苦钻研的精神和较好的思维方法, 这对以后的学习和研究有极大的益处. 现将此书献给母校, 以报答她对我的培育之恩.

本书的出版得到了海南省科学协会、海南经典文化传播有限公司和香港爱华基金会的支持和帮助, 海南大学缪加玉教授对书稿进行了细致的校核, 在此一并表示衷心的感谢.

限于作者水平,本书可能存在不少缺点和错误,敬请读者批评指正.

尹双增

1996 年 4 月于海南大学

目 录

前言

第一章 材料的强度和断裂..... (1)

§ 1-1 论材料力学性能的研究..... (1)

§ 1-2 一种混凝土四参数强度准则的研究..... (9)

§ 1-3 传统力学和断裂力学..... (15)

§ 1-4 用宏观和微观相结合的方法研究断裂力学..... (22)

第二章 断裂判据理论..... (29)

§ 2-1 一种新的复合型断裂判据——塑性区最短距离 $r_{\min}$ 判据..... (29)

§ 2-2 论脆性断裂判据..... (43)

§ 2-3 裂纹尖端张开角 CTOA 及其与 J 积分的联合判据..... (51)

§ 2-4 J 积分的扩展与改进..... (55)

§ 2-5 T 积分准则..... (61)

第三章 断裂判据理论在混凝土中的应用..... (67)

§ 3-1 虚裂纹模型在分析平面裂缝扩展问题中的应用..... (67)

§ 3-2 用线弹性断裂力学与虚裂纹模型相结合的方法研究混凝土
裂缝的亚临界扩展..... (84)

§ 3-3 用 LEFM 和 FCM 相结合的方法研究混凝土裂缝的扩展
规律..... (95)

§ 3-4 三维弹性压剪问题的有限元分析方法..... (101)

§ 3-5 混凝土三维裂缝的研究..... (114)

第四章 尺寸效应等问题..... (127)

§ 4-1 混凝土断裂能 C_F 的尺寸效应..... (127)

§ 4-2 确定混凝土断裂能尺寸影响的一种方法..... (136)

§ 4-3 无纺土工布梯形试样尺寸及角度对撕裂强度影响的试验
研究..... (142)

§ 4-4 无纺土工布对土-布抗剪强度影响的试验研究..... (151)

参考文献..... (157)

第一章 材料的强度和断裂

§ 1-1 论材料力学性能的研究

如何进一步加强材料的力学性能研究是人们极为关心的问题. 众所周知, 材料的力学性能是进行工程设计、评定材料、研制新材料、新工艺及选用代替材料的重要依据, 也是研究材料科学和工程科学的一个重要内容. 近年来, 材料力学性能的研究已经取得了迅速的发展. 对于这种发展, 应当从研究的理论和方法方面进行分析, 以探索其趋势和规律.

1. 从传统力学向断裂力学发展

传统力学理论是长期以来在工程上对构件强度或结构强度进行计算的方法. 它以材料力学和结构力学为基础; 假定材料为均匀的连续体; 计算时只要工作应力不超过材料的许用应力, 就认为构件或结构是安全的. 这种计算理论已有 100 多年的历史, 它在过去的工程实际中发挥了重要作用, 是一种传统的力学理论.

但是, 工程中发生的一系列“低应力脆断”事故, 使人们对传统的力学理论产生了怀疑. 通过大量的观察与研究, 发现低应力脆断的主要原因是实际构件材料中存在着各种过去忽略的微小缺陷和裂纹. 人们越来越认识到, 必须对含裂纹的物体作进一步的研究, 弄清裂纹尖端附近应力应变情况, 掌握裂纹在荷载作用下扩展规律, 从而提出抗断裂的设计方法. 断裂力学就是在这种背景下产生和发展起来的. 由于断裂力学能把含裂纹构件的断裂应力和裂纹大小及材料抵抗裂纹扩展的能力(即材料的断裂韧性)定量地联系在一起, 因此它不仅能圆满地解释传统力学不能解释的低应力脆断事故, 而且也为避免这类事故找到了解决的办法, 为发展新材

料、新工艺指明了方向. 正因为断裂力学显示了巨大的生命力, 所以这些年来获得了迅猛的发展.

传统力学的力学模型是把材料看作连续、均匀和各向同性的物体, 并采用连续介质力学的方法对构件进行整体的受力和变形分析, 其强度计算的方法是按照构件承受的载荷、构件的材料及使用条件, 选用一定的强度理论, 计算构件中某一危险点的相当应力 σ_{rd} , 使其满足强度条件, 以保证构件安全工作, 即

$$\sigma_{rd} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

$$\sigma_{rd} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

其中, $[\sigma]$ 为许用应力, n_s 、 n_b 分别为屈服极限 σ_s 和强度极限 σ_b 的安全系数. 这个相当应力 σ_{rd} 是指构件中某一点的应力, 它是加载和构件的函数, 对于均匀、连续、各向同性的材料, 它是衡量构件受力强度、判断构件是否会强度破坏的一个有效力学参量. 但对于承认存在缺陷或裂纹的构件来说, 在其缺陷或裂纹附近的应力变化复杂得多, 就不能再以一点的应力作为衡量整个构件受力程度的力学参量了. 这时的应力因素不仅是外载和构件的函数, 而且必须考虑缺陷或裂纹对应力因素的影响.

断裂力学从构件缺陷或裂纹的现实出发, 建立了外载、构件、缺陷之间的定量关系. 如一“无限大”板, 具有中心、穿透裂纹, 当远方受到双轴均匀拉伸力时 (图 1.1), 则在裂纹尖端附近的应力场为

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

从公式可以看出, 当 $r \rightarrow 0$ 时, 上述应力 $\sigma_{ij} \rightarrow \infty$, 具有奇异性, 再无

法用一点的应力值来衡量构件的受力程度. 公式中, 除了 K_I 外其他都是角度 θ 的函数, K_I 是应力场唯一的决定因素. 它的表达式为

$$K_I = \sigma \sqrt{a} y$$

其中, σ 是外加应力, a 为裂纹半长, y 为裂纹形状、加载方式的函数. 显然, 用应力强度因子 K_I 作为含裂纹体受力程度的力学参量, 比用一点应力作力学参量更确切、更全面了. 总之, 断裂力学能较好地解决材料的强度和韧度的统一关系, 用断裂力学处理问题, 既能保证构件不发生强度破坏, 又能保证构件不发生低应力脆断.

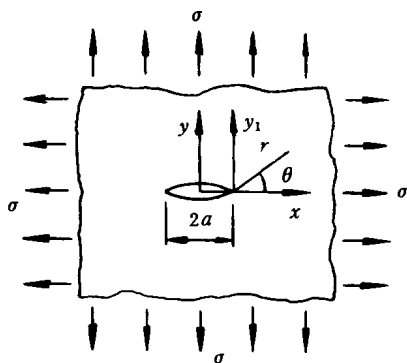


图 1.1

2. 从常规力学性能研究向接近使用条件下性能研究发展

常规力学性能通常是指瞬时抗拉强度、冲击韧性和疲劳极限等. 而对于在高温下使用的构件, 还包括持久和蠕变等性能. 长期以来, 这些指标一直是设计计算、材料选择的主要依据, 它的基础是假定材料的常规性能真实地代表使用情况. 但是, 实际上并非如此. 有些材料的常规性能很好, 使用中却常出问题; 而有些材料常规性能很差, 使用起来却很保险. 可见, 要做到合理设计和正确选材, 必须研究在接近使用条件下的性能. 为此, 首先要正确地分析零件的真实受力状态, 然后尽量模拟真实使用条件对材料进行检验.

对大量工程零件的服役条件和失效分析表明, 许多零件处于

交变荷载和复杂应力下工作. 据统计, 在损坏的机器零件中, 大部分是由于疲劳造成的. 有人估计在发动机中表现为疲劳断裂的零件占 95% 左右. 在高温下工作的零件, 往往同时存在蠕变、疲劳及腐蚀介质对材料的交错作用(图 1.2). 如航空发动机零件, 由于发动机多次启动、运行和停机以及振动等因素, 总有疲劳荷载; 又由于在使用中不可避免地存在环境介质的影响, 因此零件又遭受氧化腐蚀作用. 因此, 不能只根据单项性能指标选材或设计, 必须测出所用材料在使用条件下蠕变、疲劳和环境同时作用的性能.

近年来, 国内外对高温低周疲劳性能和蠕变、疲劳、环境交互作用的研究十分活跃. 低周疲劳是反复的机械应力或热应力作用的

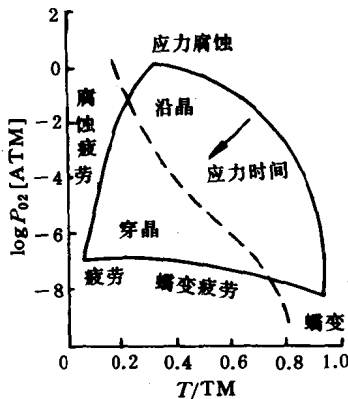


图 1.2 疲劳、蠕变和腐蚀交互作用

的结果. 这种零件的工作应力尽管不是很高, 但由于缺陷的存在, 局部应力往往超过材料的屈服应力而发生塑性变形, 从而大大缩短使用寿命. 低周疲劳在高温下工作, 实际上就是蠕变和疲劳共同作用. 目前, 对蠕变、疲劳、环境联合作用下, 特别是蠕变和疲劳联合作用下的损伤特点已经有了一定的了解, 并建立了许多寿命估算方法, 如线性累积损伤

法、应变范围划分法(SRP), 频率修正和频率分离法, 滞后能损伤系数法等. 在一定条件下, 这些方法一般都能达到二倍寿命之内的估算精度. 一个好的寿命估算方法不仅要有足够的可靠性, 而且方程式的参量尽量要少, 物理意义要明确, 适应性要广. 线性累积损伤法应用较广, 也适用于静应变循环, 且已纳入工业规范, 但不适用于强度交互作用的材料; SRP 法很有希望, 近年来对它的修正改善了预测精度, 但只适用应变反复的情况, 而对复杂波形和变温条件下的应用, 仍有较大困难. 到目前为止, 多数研究集中在蠕变

与疲劳的交互作用上；也有些研究讨论了环境与蠕变或疲劳的交互作用；对于同时存在三者联合作用的情况研究得还不多。一般说来，高温下蠕变起主导作用，循环应变幅的影响不大；低温下疲劳起主导作用；在它们中间存在着蠕变-疲劳的交互作用区。

循环温度、循环应力、循环频率和循环波形对材料寿命及其损伤机制都有很大的影响，而且对不同的材料又可能产生不同的结果。一般可把循环条件对材料行为的影响分为循环强化和循环弱化两种类型。通常，以断裂的累计时间或循环次数来衡量，即将材料在非循环条件下的寿命与循环条件下相应寿命相比，如果后者大于前者，则认为循环强化；反之，则认为循环弱化。由于影响材料断裂寿命的因素要比影响材料蠕变速率的因素复杂得多，因此往往又以循环或非循环条件下蠕变第二阶段的减速或加速作为衡量循环强化或弱化的标准，这样更能反映循环因素的影响。

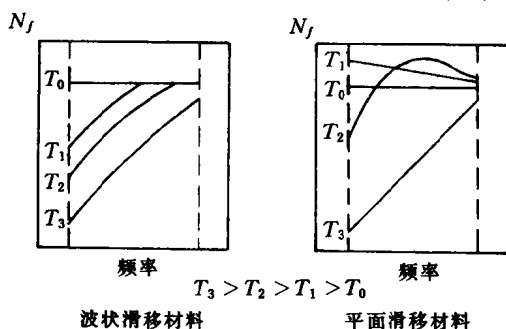


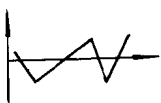
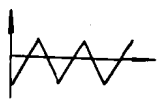
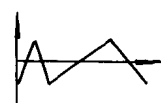
图 1.3 温度和频率对疲劳寿命的影响

图 1.3 总结了温度和频率对波形滑移材料及平面滑移材料的疲劳寿命的影响。当温度升高时，屈服强度下降，总应变中塑性应变所占比例增加；同时晶界迅速变弱，材料由穿晶断裂迅速转为沿晶断裂，这两个因素迅速使疲劳强度下降。另一方面，当温度升高时，又可使应变时效材料表现出相反的趋势，也可使镍基合金的平面滑移变得更为分散，从而提高穿晶断裂的疲劳寿命。这种相互矛盾的影响带来了高温疲劳的复杂性，但前者情况居多。在常温下，除非进入高频区域，频率对疲劳寿命影响不大；但在高温下，依赖

于时间的过程起主要作用,疲劳寿命随频率的降低而减少.

表 1.1 为三种不同的循环波形(慢-快型、等速型、快-慢型)对损伤的影响. 由于循环波形的不同,损伤的形式存在显著的差别;在不同的环境(空气或真空)下,同样的循环波形也会造成不同的损伤.

表 1.1 不同循环波形对损伤的影响

环 境	损伤模型	循 环 波 形		
		慢-快型	等速型	快-慢型
				
空 气	断裂表面 内 部 环 境 损伤模型*	沿晶, 取决于 $+\epsilon$ 晶界空位裂纹 局部断裂, 取决于 $+\epsilon$ C+E+F	取决于 $+\epsilon$ 无 局部断裂, 取决于 $+\epsilon$ E+F	穿 晶 无 小, 取决于 $+\epsilon$ E+F
真 空	断裂表面 内 部 环 境 损伤模型	沿晶, 取决于 $+\epsilon$ 晶界空位损伤 无 C+F	穿晶 无 无 F	穿晶 无 无 F

* C——空位损伤; E——环境损伤; F——循环应变损伤.

大量的研究表明, 当材料同时承受蠕变、疲劳和环境介质的作用时, 由于它们之间存在着交互作用, 这种交互作用有时能提高材料的寿命, 有时却使寿命下降. 因而用材料的常规力学性能或者将材料的蠕变、疲劳和抗蚀性能分割开来进行研究并进行线性累积的方法, 来作为评价材料优劣和估算使用寿命的依据都是很不可靠的.

目前, 美国已采用了所谓“推进系统结构完整性”方案, 对于发动机所用材料的力学性能检验增加了一些新项目, 如低周疲劳试验、周期持久试验及断裂力学试验等, 对叶片材料还要另加热冲击

模拟试验. 这些检验项目在很大程度上反映了发动机在接近使用条件下的性能. 根据这些参数进行设计、选材和质量控制, 显然比常规力学性能更为合理. 当然, 这并不是说, 常规力学性能的检验已经没有实际意义了. 事实上, 在某些情况下这些性能仍然是评定材料的重要手段. 但是, 单凭这些性能就不够了, 今后必须大力开展材料在接近实际使用条件下力学性能的研究.

3. 从宏观力学性能向宏观与微观相结合的方向发展

长期以来, 人们已经对传统力学以及单纯的蠕变、疲劳或腐蚀的问题进行了大量的研究, 积累了许多实验资料和规律, 并建立了不少理论模型. 这些都是研究它们之间交互作用的基础. 但是, 人们对这些问题的本质了解很少. 如工程上认识疲劳问题已有 100 多年了, 在实践中总结出来的一些公式, 如指数规律的应力和寿命关系, Coffin-Manson 的应变和寿命关系, Miner 的线性累积损伤公式, 甚至近年借助应力强度因子表示的 Paris 裂纹扩展速率公式, 都是建立在经验基础上的. 由于这些公式均缺乏物理的和力学的基础, 因此其应用受到限制.

由于力学冶金和断裂力学的发展, 使人们认清了疲劳破坏的物理过程基本上是一个裂纹扩展过程. 首先由于局部晶粒中的反复滑移而形成裂纹核, 然后从微观裂纹向宏观裂纹扩展, 直至最后破坏. 由于对疲劳的机理有了进一步的认识, 使得原来应力-寿命公式、Coffin-Manson 公式、Miner 公式和 Paris 公式都可以从裂纹扩展的模型中推导出来, 并使这些公式的应用范围得到进一步的扩大. 这是 30 多年来疲劳研究工作所取得的主要进展.

另一方面, 近年来断裂力学和蠕变、疲劳、环境交互作用的研究发展很快, 这些研究又提出了许多微观问题. 如断裂力学的研究提出了脆性解理断裂和韧性纤维断裂的微观机制, 及其宏观的韧性参数与微观组织的联系等问题. 许多问题目前还没有搞清楚, 如裂纹前缘的脆性解理过程究竟是成核控制的还是扩散控制的? 究竟是临界剪应力起主导作用还是临界拉应力起主导作用? 又如, 已

经证明韧性纤维断裂是由于裂纹前缘空穴的形成、长大、聚集这一系列过程产生的,但是它的决定性因素是什么?能不能把材料的宏观韧性值与显微组织的微观特征联系起来?

在蠕变、疲劳、环境同时作用的情况下,材料的损伤机制发生了很大变化.为了使寿命预测建立在较好的物理基础上,使外推更加可靠,必须研究其损伤机制,确定在不同负荷条件下主要的损伤方式及它们之间的过渡. Ashby 的形变断裂机制图的概念是一种可取的公式. 图 1.4 是 Nimonic 80 合金的形变断裂机制图. 它比较清楚地描述了温度、应力和断裂寿命对断裂方式的影响. 显然,我们在这个基础上确定各种损伤方式的数学方法,进而建立描述全过程的方程式,这样就可以使寿命预测更为可靠.

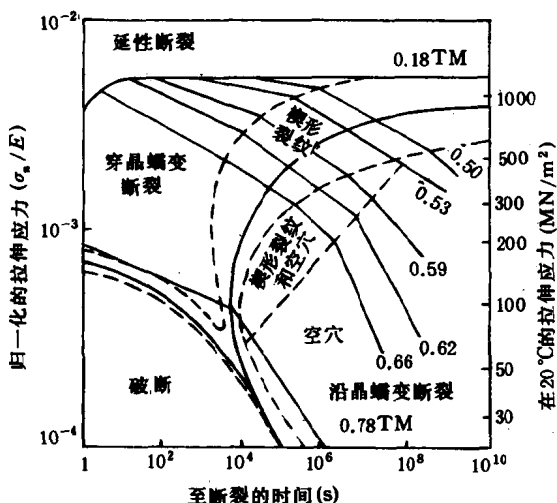


图 1.4 Nimonic 80 合金的形变断裂机制图

研究蠕变、疲劳交互作用的中心环节是研究晶界损伤的性质和发展规律. 空穴是晶界损伤的主要形式,一般认为空穴的长大过程可以是扩散控制的(图 1.5),可以是应力控制的(图 1.6),也可以是扩散加应力两者联合控制的(图 1.7)裂纹生长过程. 因此,空穴的成核长大规律、交变载荷对空穴化过程的影响、发展中的裂纹

与空穴化晶界的交互作用,都是这个领域中重要的研究课题。

从工程构件的设计考虑,既希望获得强度和韧性的最佳综合指标,又要求可以成型;对于在不同环境下应用的构件来说,还必须考虑环境介质对这些力学参量及其微观机制的影响;另外,构件往往处于复杂的应力状态下工作,因而对损伤机制和力学参量又将产生更为复杂的影响。总之,必须从断裂力学的观点,

研究接近使用条件下的性能,并将宏观的力学研究与微观的显微组织状态及物理化学过程紧密地结合起来,才有可能使设计计算,评定和选择材料建立在更可靠的基础上。

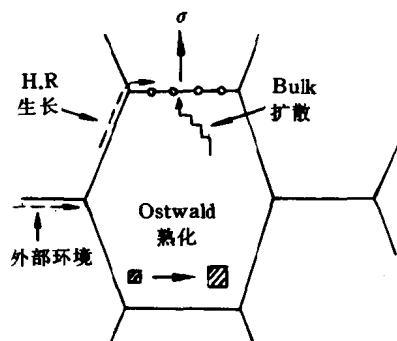


图 1.5 扩散控制的裂纹生长过程

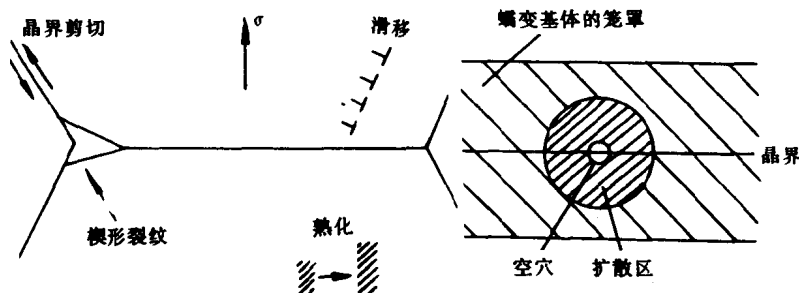


图 1.6 应力控制的裂纹生长过程

图 1.7 扩散和应力两者控制的空穴生长

§ 1-2 一种混凝土四参数强度准则的研究

随着结构物朝大型发展和结构型式的复杂化,进一步扩大了混凝土的使用范围,同时也增加了在较大荷载下及在严酷环境中使用混凝土的可能性. 与此相应,迫切需要研究混凝土的物理性质

和力学性能,以探求和掌握混凝土在这些条件下破坏的规律.破坏是由于体系中潜在的各种缺陷引起的,它在各量级单元中的表现是局部的不连续变形.随着外荷载的增加或其他原因,这种非均匀的不连续变形将发展扩大,直至体系总体很快降低承载能力并导致最终破坏.

不论原子量级或结晶量级,我们都以平均的概念来研究问题.假定它们是连续的,并存在拉应力强度、剪应力强度等材料特性,则材料体系内所有点的应力和应变状态,均可以某种函数形式表示并建立破坏条件.

我们可以借助于等价应力表示材料宏观破坏的条件,并假设

$$\sigma_e = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \lambda_0, \lambda_1, \dots, x_1, x_2, \dots) = \sigma^*(T, t) \quad (1.1)$$

其中 $\lambda_0, \lambda_1 \dots$ 为材料参数; $x_1, x_2 \dots$ 为反映加载历史的参数; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 为主应力; σ^* 是一个与温度 T 和时间 t 有关的临界应力. 根据不同用途的准则, σ^* 可以分别取 $\sigma^* = \sigma_b$ (拉伸强度极限), $\sigma^* = \sigma_s$ (屈服极限), 或其他适当的应力极限值等.

函数 f 应为变量 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 的一阶齐次函数. 这样等价应力 σ_e 就建立了复杂应力状态和单向应力状态之间的对应关系, 能够较简单地确定强度安全系数.

如果采取一次近似, 且不考虑结构参数的影响, 则可采用下列强度准则的形式:

$$\sigma_e = \lambda_0 \sigma_i + \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 = \sigma_b \quad (1.2)$$

其中, σ_b 为拉应力临界值; σ_i 为应力强度:

$$\sigma_i = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} / \sqrt{2}$$

式(1.2)在一般情况下, 就是一个四参数强度准则, 只需根据一些简单的基础试验定出 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 即可.

由塑性力学知道, 如果我们用三个主应力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 作为坐标, 可以构成一个三维的应力空间. 物体中任意一点的应力状态都可以用应力空间中相应点的坐标矢量来表示. 当应力 σ_{ij} 足够小时, 材料处于弹性阶段. 这就是说, 在应力空间中, 围绕坐标原点有

一个弹性区. 当应力增长到一定程度时, 材料才进入塑性阶段, 形成一定的塑性区. 我们把弹性区与塑性区的交界的曲面称之为屈服面. 这条曲线就叫屈服轨迹. 例如, 平均应力为常量时, 即 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = C$ (C 为常量) 时, 其应力曲面如图 1.8 所示.

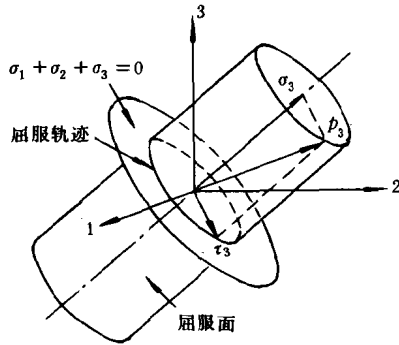


图 1.8

根据混凝土材料的具体特点, 我们可以作如下的简化和假定:

- (1) 作为宏观破坏性状, 假定各向是同性的;
- (2) 在应力空间中, 初始屈服面具有与破坏面相同的形状;
- (3) 对于初始屈服面内的应力, 可认为混凝土是弹性的; 而在屈服面和破坏面之间的应力, 混凝土的性状是塑性的.

这样, 混凝土的失效函数也可以用主应力空间 (A. Mendelson, 1968) 坐标系写出来:

$$f(\rho, \gamma, \theta) = 0 \quad (1.3)$$

式中

$$\rho = \frac{1}{3} I_1 \quad \gamma = \sqrt{2 J_2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{S_1}{\sqrt{2}} \quad |\theta| \leq 60^\circ$$

其中, $S_1 = \sigma_1 - \frac{1}{3} I_1$ 为最大主偏应力.