

计算机控制

COMPUTER CONTROL

邬学礼 赵莹琳 赵文成 编

北京航空航天大学出版社

TP273
5

计 算 机 控 制

邬学礼

赵莹琳 编

赵文成

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍计算机控制系统的分析和综合。全书可分三部分：（1）离散动态系统的数学模型和分析方法；（2）系统的直接设计和现代设计方法；（3）系统的微机实现问题。分析是基础，综合（设计）是目的。本书在第一部分有较多例题，有助于读者加深理解，掌握基础。设计部分着重介绍概念、思路和问题。本书作为教材内容力求简明扼要，有助于在分析和设计计算机控制系统方面打下良好基础。

本书作为机械制造控制与检测专业、机电一体化类专业的本科生教材，亦可作为从事上述专业和在计算机控制方面感兴趣的工程技术人员和读者的参考。

计 算 机 控 制 JISUANJI KONGZHI

邬学礼

赵莹琳 编

赵文成

责任编辑 马晓虹

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经售

北京京辉印刷厂印装

开本787×1092：1/16 印张：16.5 字数：422千字
1990年3月第一版 1990年3月第一次印刷 印数：4000册
ISBN 7-81012-150-2/TP·023 定价：3.35元

前 言

本书是根据机械制造控制与检测专业本科生“计算机控制”课程的需要而编写的。

随着微电子技术和计算机技术的飞速发展,极大推动着机械制造中的自动化的发展,由大量生产自动化向多品种少批量生产的自动化即柔性自动化发展,极大丰富了机械制品的品种和缩短了生产周期,劳动生产率也有很大提高。计算机与自动化结合,出现了各种计算机控制系统,它也是机械制造自动化的基础。计算机控制系统的理论基础是离散时间动态系统。离散时间动态系统及其数学模型可用于描述许多工程、经济和社会系统。动态系统分析可以解决许多领域中的问题。

因此本书的目的是使学生系统了解计算机控制系统的分析和设计的基本原理和方法。全书共分三部分,共六章:

- (1) 离散系统的数学模型和分析方法(第二章,第三章)
- (2) 系统的直接设计和现代设计方法(第四章,第五章)
- (3) 系统的微机实现问题(第六章)

第一章是概述,主要叙述计算机控制问题在机械制造过程中的地位和计算机控制系统的基本特点。

第二章,离散系统数学模型。这一章主要介绍 Z 变换方法和应用 Z 变换分析离散系统的方法。为了便于理解,我们对照连续系统的分析方法进行叙述。

第三章,线性系统状态变量分析。重点讨论线性离散和数字控制系统的状态空间分析方法、状态方程的建立和求解、状态转移矩阵的计算、数字系统的信号流程图,并讨论在现代控制理论中占有重要地位的能控性和能观测性、李亚普诺夫稳定性分析。

第四章,数字控制系统的设计。在这一章,重点介绍在实际中应用最广的PID调节器的离散化问题及其实现中的一些问题;另一个讨论的重点是直接设计法——快速无波纹控制系统设计方法。

第五章,最优控制。这章主要讨论以状态变量为基础的最优数字控制系统的设计,内容包括线性二次型最优控制、极点配置问题、状态观测器的设计、提供最优控制的基本概念。

第六章,控制器的计算机实现问题。内容包括算法实现结构形式、量化误差生成和传递及量化误差对系统的影响、字长选择和采样周期的选择,这些都是控制问题计算机实现中的重要问题。

分析是基础,设计是目的。为了有助于读者加深理解,掌握基础,本书主要章节都有较多的例题。本书作为教材着重介绍概念、思路和问题,内容力求简明扼要,便于自学,有助于在分析和设计计算机控制系统方面打下良好基础。

全书由北京航空航天大学 and 沈阳航空学院联合编写。其中第二、三章由北航赵莹琳同志编写,第四、五章由沈航赵文成同志编写,第一章、第六章由北航邬学礼同志编写,并由其汇总。

目 录

第一章 计算机控制系统概述

§1.1 计算机和自动化	(1)
§1.2 计算机控制系统	(3)
§1.3 计算机控制系统的分析与综合	(5)

第二章 离散系统及其数学模型

§2.1 概述	(6)
§2.2 采样与保持	(8)
§2.3 Z 变换	(13)
§2.4 Z 反变换	(21)
§2.5 用Z 变换解差分方程	(27)
§2.6 脉冲传递函数	(31)
§2.7 采样系统的离散输出 $y^*(t)$ 与连续输出 $y(t)$ 的关系	(47)
§2.8 采样系统的稳定性	(51)
§2.9 采样系统的闭环输出特性	(57)
§2.10 用根轨迹法分析采样系统	(61)

第三章 线性系统状态变量分析

§3.1 基本概念	(70)
§3.2 线性定常连续系统的状态变量法	(73)
§3.3 线性离散系统	(96)
§3.4 线性数字控制系统的状态空间分析	(106)
§3.5 线性离散系统的可控性和可观测性	(113)
§3.6 李亚普诺夫稳定性分析	(141)

第四章 数字控制系统的设计

§4.1 PID数字控制器	(155)
§4.2 最快速响应数字控制系统的设计	(165)
§4.3 快速无波纹控制系统的设计	(175)
§4.4 非最小拍数字控制器的设计法	(185)

第五章 最优控制

§5.1 最优控制的一般提法	(193)
----------------	-------

§5.2	线性二次型最优控制——具有状态反馈的线性最优控制系统	(197)
§5.3	离散系统线性二次型最优控制	(201)
§5.4	极点配置问题	(213)
§5.5	状态观测器的设计	(222)

第六章 控制器的计算机实现问题

§6.1	控制算法实现的结构形式	(234)
§6.2	量化误差的生成与传递	(239)
§6.3	控制器系数的量化误差的影响	(246)
§6.4	由于量化误差引起控制器的非线性——死区和极限环	(248)
§6.5	A/D、D/A变换器，计算机运算单元，存储器的字长选择	(251)
§6.6	采样周期的选择	(253)

习 题	(254)
-----------	-------

主要参考书及文献	(256)
----------------	-------

第一章 计算机控制系统概述

§ 1.1 计算机和自动化

微电子技术和计算机技术的发展与应用于各种不同领域的机械产品结合起来,出现了机电一体化的产品,为社会提供了各种多用途的高性能机械。这种机电一体化的趋势已深入到社会各个最重要的领域,如数控设备、电子化量具量仪、智能仪表及自动控制系统、电机电器、工业机器人、轻工机械、医疗器械、办公设备、照相机、印刷机械、汽车发动机电子控制、农业机械等。计算机特别是微处理机的引入,极大地提高了机械性能和性能价格比,并出现了新的功能领域和新系统,在使用上也有很大灵活性。

微电子技术和计算机技术引入到工业生产领域,给社会带来巨大经济效益。仅从我国近年来改造的 500 多座工业用锅炉和窑炉来看,普遍节能 8~10%,提高了产品的成品率和减少钢材烧损,其年经济效益达 1 亿人民币。

微电子技术和计算机技术引入机械制造业,给生产带来显著的变化,它正在改变着工厂的面貌。工厂使用着计算机控制的机床和加工设备以及能完成各种操作的机械手和机器人。计算机正在控制和监视着工厂的加工过程,它比起操作人员工作得更加出色,效率更高。过去高度自动化技术仅适用于大量生产方式。如今借助计算机,高度自动化技术被引入了多品种小批量生产中,刚性的生产自动化转变为柔性自动化。这使多品种小批量生产极大地提高了劳动生产率,缩短了生产周期,降低了生产成本,带来了巨大的经济效益。机器人、计算机辅助设计和制造 (CAD/CAM) 以及柔性制造系统 (FMS) 正在为计算机综合自动化制造系统 (CIMS) 的形成创造条件。计算机将全面控制自动化的工厂。无人操作的“未来工厂”看来是可行的。

通常,工业的生产过程的全局控制是采取多级递阶控制的形式,如图 1.1 所示。

工业生产过程控制从下向上大致可分成五级:

第一级是过程控制,用前馈或反馈方法直接控制生产过程的可测变量 Y 。参考值 W 既是常数也可由上一级提供。如果控制的变量多于一个,称为多变量控制。生产过程的自动启停也是这一级的任务。

第二级是过程监督。检查过程的各项功能,测试指定的参数是否超过某一限值。监督可以仅限于当前的变量参数,也可包括预估未来的变量值。过程监督级的输出通常是向工艺操作人员提供生产现况和报警。若能自动处理生产和工艺装置的故障和停车则称为保安控制。

第三级是过程最优化。其目标是使产量和效率达到最高、消耗和成本降至最小。生产稳定并使性能最优化往往是最重要的。若实现在线最优化,则其性能指标按测量到的过程输出 Y 来计算,并使用最优化方法,通过系统地改变输入值即参考值 W 来搜索性能指标的极值。

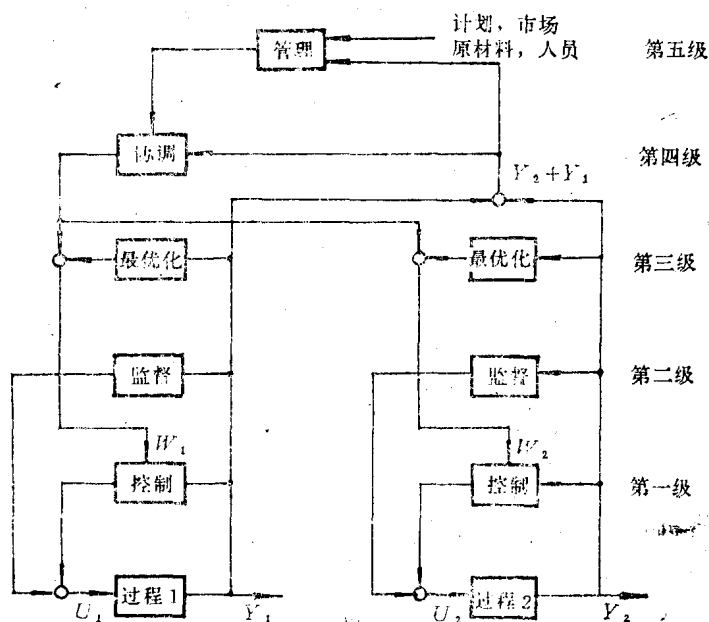


图 1.1 多级递阶过程控制

第四级是协调级。通常工业大生产总有若干过程结合在一起，需要协调它们的工作。对一组火力和水力发电厂来说，需要协调的是负荷分配。对钢铁工业企业的设备协调就是高炉、炼钢厂和轧钢厂间相互的配合。

第五级是综合管理，也是最上面的一级。通常是全厂或全公司的经营管理。其主要功能有产品预测；制订长期发展规划；根据市场需求、订货要求、原材料供应情况、企业生产情况、人员情况制订生产计划、销售计划、产品发运计划等，组织好企业的生产。

在机械制造中，自动化制造系统（柔性制造系统FMS或计算机综合制造系统 CIMS 等）是在计算机控制下的集成系统。从生产规划和控制角度来看，它也是一个分级递阶控制形式，

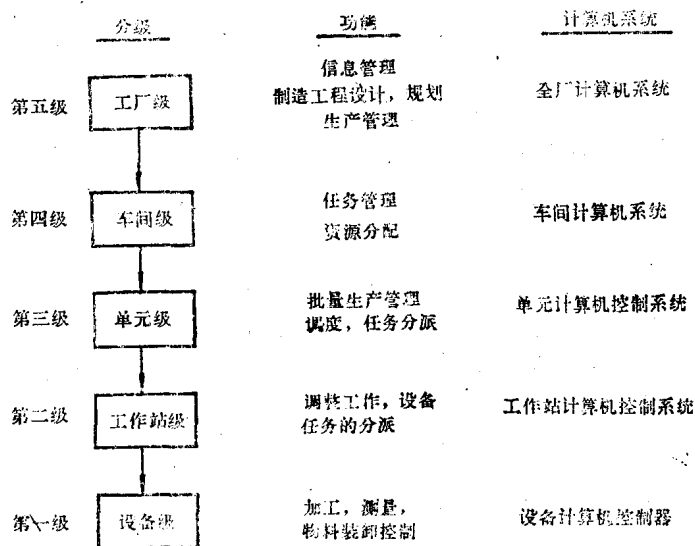


图 1.2 自动化工厂系统的控制分级

如图1.2所示。它共分五级。为了与生产过程控制的分级相协调，也从下向上编号。

最上一级是第五级工厂级。它的任务是对工厂进行综合管理：进行工艺过程设计、生产管理（包括长期调度计划）和信息管理（包括财务和办公室机关职能）。其功能与上述过程控制全局控制中的第五级相似。

其次是第四级，即车间级。它的任务是管理车间内生产资源和作业任务的协调工作。在多品种批量生产中，通常按成组技术（GT）分类模式将作业分成组，按批量投产。在这一级提出虚拟制造单元的概念，这是一个动态的概念。虚拟单元按动态模式将机床组成单元，在不同的时间，虚拟单元中的机床数目和配置都可能是不同的。

在车间级任务中，还包括将工夹量具、材料毛坯分派至指定工作站。车间级的活动可以根据来自单元级的反馈信息或来自工厂级的变更要求而重新组织和协调。

在车间级下面是第三级——单元级。在这一级中对作业调度进行控制。作业已按GT划分成组，这样，派定给每一单元的作业都有某些类似之处。作业调度任务包括单元内的工具和材料毛坯的装卸的调度任务。

第二级是工作站级。其任务是协调工作站内各部分的活动。通常工作站由机械手或机器人、数控机床、材料或毛坯、半成品中间储存站和控制计算机等组成。工作站控制计算机的任务，是根据指派给单元控制系统的作业的安排，完成所需的操作顺序。

最低级是第一级——设备级。设备级的控制任务由各个生产资源（例如数控机床、机器人物料装卸装置等）的控制器来完成。这一级是生产活动中最基本的单位。

在生产系统的每一级中都包括有一套不同规模和功能计算机控制系统，它接收上一级的目标指令，执行本级控制任务，并对下一级发布命令和派定任务，接受其反馈信息。每一级都可以看作是一个反馈控制结构，如图1.3所示。

因此，不论是计算机化的机电一体化产品、工业过程控制还是机械制造中自动化制造系统，只有在良好的控制情况下才能正确地协调工作。为了能正确地运用和设计出良好的计算机控制系统，有必要使未来的工程师们在学习期间了解和掌握计算机控制的基本理论和方法。

本书将集中研究过程控制和生产控制中执行第一级任务的计算机控制问题。其理论上主要涉及时间离散动态系统。更高几级的计算机控制问题除涉及上述理论基础外，还涉及复杂的管理问题和离散事件动态系统（Discrete Event Dynamic Systems）理论，对这些问题的研究已超出本书范围。

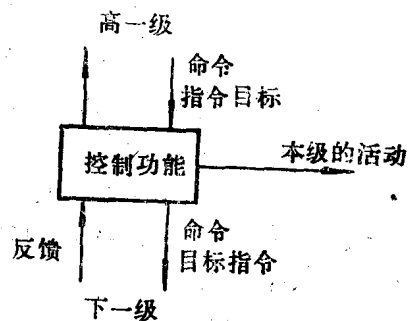


图 1.3 级的控制结构

§ 1.2 计算机控制系统

随着计算机技术的发展，使计算机在工业中应用日益广泛。数字技术对自动化和测量控制技术的影响与日俱增，从70年代开始，计算机已成为工业过程自动化的标准设备投入在线的开环或闭环运行。以微处理器为核心的数字调节器和可编程序控制器，已经以商品形式在

市场出售。数字调节器可以替代各种模拟调节器，还可以执行新的功能，例如，设定程序化的程序控制、被控变量和操作变量的自动切换、极值附加监控、数字调节器间通信、故障自动检测、故障诊断、选择不同的算法等。控制系统由于采用数字调节器或计算机作为控制器，就成为数字控制系统 (Digital Control System) 或计算机控制系统。

当今大多数实际运行的数字控制系统中，既有数字式部件，又有模拟式部件，例如：工作在离散状态的数字计算机或数字调节器和具有连续工作状态的被控对象。这样，在系统中就会既有数字信号，又有模拟信号。模拟信号要通过采样、量化变为采样信号和数字信号，并提供给计算机或数字调节器。经过计算机处理后的数字信号通过保持器恢复成模拟信号。对于这样的系统，通常称为数据采样控制系统，有时也称之为时间离散控制系统。本书主要研究这类系统。数字或数据采样控制理论主要就是研究这类系统的。通常这类系统具有如图

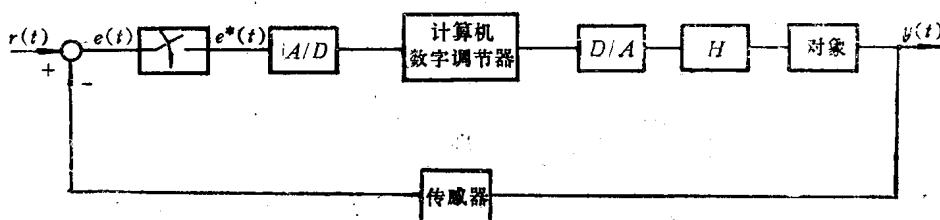


图 1.4 数字采样控制系统

1.4所示的结构。如果输入信号 $r(t)$ 是连续量，被控对象是模拟部件，即输出量 $y(t)$ 也是连续量。当采用数字计算机作为控制器时，为了信号的转换加入了模/数变换器 (A/D)、数/模变换器 (D/A)、保持器 (H)。

在实际工作中，控制系统采用连续系统还是数字控制系统取决于我们对任务的理解和对各种控制系统的了解。

数字控制的优点：

- ▲改进了灵敏度 通过采用低能耗高灵敏度的控制元件。
- ▲可采用数字传感器 这类传感器对噪声和非线性引起的信号畸变不敏感。与模拟传感器相比有较高的精度。
- ▲采用数字信号 采用数字信号便于存储和采用复杂的算法来处理，并有较高的精度。
- ▲采用数字计算机 特别是采用高性能微处理机，具有成本低、重量轻、能耗少的优点。并可采用现代控制理论的研究成果，用高性能算法实现如高阶状态变量算法、卡尔曼滤波、随机控制、自适应控制等，以提高系统性能。采用数字计算机使系统设计具有很大灵活性和适应性。

数字控制的缺点：

- ▲它的数学分析比连续系统复杂并费时。
- ▲影响系统稳定性 通常将已有的连续控制系统，不改变系统参数而直接转变为数据采样系统时，要增加保持器，由于其迟后特性，从而降低了系统的稳定裕度。
- ▲信号信息在重建连续信号过程中会有丢失。
- ▲存在软件误差 控制过程的复杂性在用软件实现的算法中可能会有误差，若处理不当会影响系统的性能。

§ 1.3 数字控制系统的分析与综合

在本书中,我们对数字控制环节和系统采用两种数字模型:一种是输入输出模型,采用 n 阶差分方程来描述,通过 Z 变换方法可建立环节和系统的脉冲传递函数;一种是状态模型,采用状态空间分析方法,建立环节和系统的状态方程。

假定一个控制系统的结构已知,求出系统的动态方程以后,对这个系统的动态性能进行研究,给出评价,这就是分析问题。至于如何设计系统,使其具有指定的性能指标,满足提出的要求,这就是综合问题。分析是为了掌握系统的特性及其运动规律,用以指导设计具体的系统。分析是基础,综合是目的。

为了便于理解,对数字控制系统的分析参照连续系统的方法,着重分析稳定性、过渡过程特点和稳态误差,并在介绍了 Z 变换方法之后进行分析。在稳定性分析中还着重介绍了李雅普诺夫方法。

关于系统设计,我们先介绍常用的PID调节器的数字化问题。最小拍设计是离散系统所特有的,为系统的直接设计提供了思路。系统的最优控制是我们追求的目标,本书介绍了最优控制的基本概念和方法。

最后,我们着重讨论了计算机控制系统的实现问题,它涉及算法的结构形式、有限字长的影响、采样周期的选择等,这些都是计算机系统实现中应特别注意的问题。

第二章 离散系统及其数学模型

§ 2.1 概 述

用计算机代替连续系统的校正环节，计算机输入、输出的信息是断续的数字信号——离散信号，与被控对象、传感器（其输入、输出都是连续的物理量）相连接，组成数字控制系统，如图2.1(b)所示。

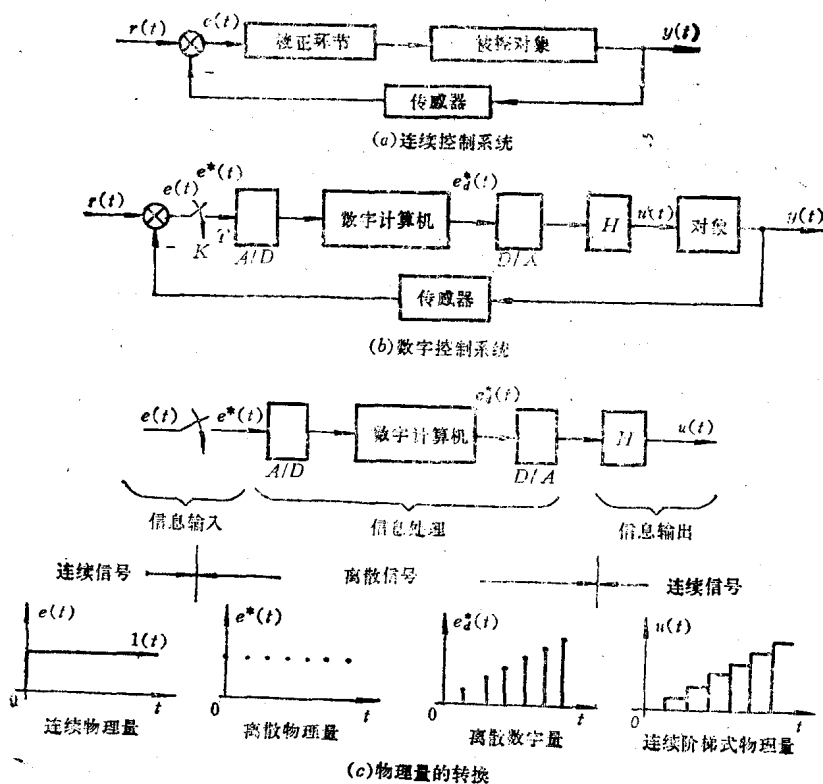


图 2.1 连续控制与数字控制的区别

为了连接离散信号与连续信号，增加下列辅助部件：

A/D——模拟-数字转换器

D/A——数字-模拟转换器

K——采样开关，采样周期为 T

H——零阶保持器

由连续的物理量 $e(t)$ 到连续的阶梯式的物理量 $u(t)$ 之间的转换，如图2.1(c)所示。

一、A/D——模/数转换过程

输入连续信号 $e(t)$ ，每隔 T 秒被采样一次，采样后的信号为 $e^*(t)$ ， $e^*(t)$ 是时间上离散

的物理量。在数字计算机中，任何数值只能表示成最小位二进制数的整数倍。为此，将 $e^*(t)$ 采样信号在数值上表达成最小位二进制数的整数倍的过程，称为整量化（简称量化）。A/D转换装置最小的二进制单位，称为量化单位，用 q 表示。采样信号 $e^*(t)$ 经过量化后变成数字信号 $e_d^*(t)$ ，这就是编码过程，如图2.2所示。所以，数字计算机中信号的断续性不仅表现在时间上，还表现在幅值上。

应指出：A/D转换装置采用类似于四舍五入的整量方法，即把小于 $q/2$ 的值舍去，大于或等于 $q/2$ 的值进位。无疑，量化会使信号失真，给系统带来量化噪声，影响系统的精度和过程的平滑性。量化噪声的大小取决于量化单位 q 的大小。为了降低量化噪声对系统精度和

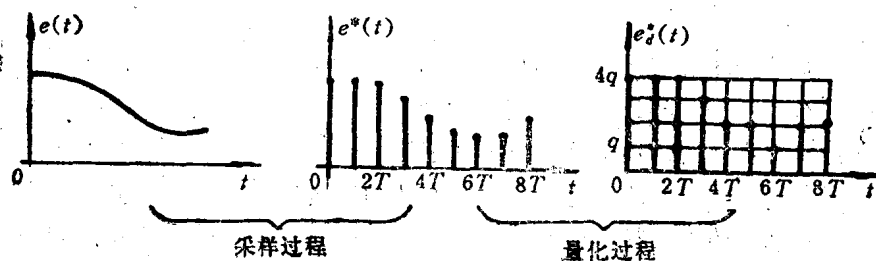


图 2.2 系统与量化过程

平滑性的不利影响，希望 q 值要足够小，同时计算机中的数码有相应的字长。

二、D/A——数/模转换过程

要将数字计算机经数码运算后输出的数字信号 $e_d^*(t)$ 恢复成连续信号，最简单的办法是通过计算机的输出寄存器，使数字信号在每个采样周期内保持为常值[因输出寄存器能把 kT 时刻的数字保持一个采样周期，直到下次采样时刻 $(k+1)T$]，然后再经解码网络，将数字信号转变为模拟电信号 $u(t)$ ，如图2.3所示。

显然， $u(t)$ 是一个阶梯形信号，计算机的输出寄存器和解码网络起到了信号保持器的作用。当采样频率足够高时， $u(t)$ 趋近于连续信号。

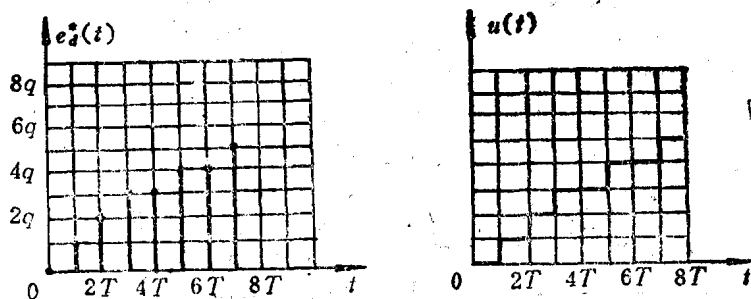


图 2.3 数字保持过程

综上所述，可把数字计算机中的数字信号等效地看成理想脉冲，把数码运算器等效地看成一个传递函数为 $G_c(s)$ 的脉冲线路和理想开关相串联的环节，等效脉冲线路的输入为 $e^*(t)$ ，输出为 $u(t)$ ， $u(t)$ 经理想开关采样后，得到理想脉冲信号 $u^*(t)$ 。若忽略由于量化所引起的数字信号幅值上的断续性，那么图2.1(b)中的数字控制系统就可以等效地用如图2.4所示的采样系统结构图来表示。

图中 $G_c(s)$ 为等效脉冲线路的传递函数, $G_h(s)$ 为等效D/A过程的保持器传递函数, $G_p(s)$ 为被控对象的传递函数, $H(s)$ 为测量元件的传递函数。实际上,图2.4也是数字控制系统的典型结构图。

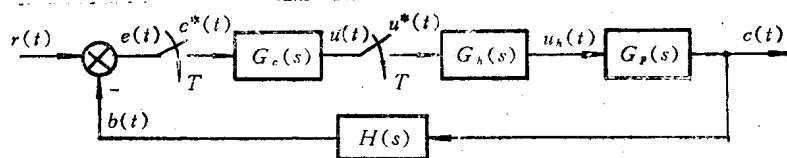


图 2.4 数字控制系统

采样和数字技术在自动控制领域中得到了广泛地应用,主要原因是由于采样系统特别是数字控制系统比一般的连续系统具有一系列的优点。例如:采样系统中,允许采用高灵敏度的控制元件来提高系统的灵敏度;只要数字信号的位数足够多,就能保证足够的计算精度;采样信号特别是数字信号的传递,可以有效地抑制噪声,从而提高了系统的抗干扰能力;可以用一台计算机代替控制器,利用采样进行分时控制若干个被控对象,以提高设备的利用率;特别是由于数字计算机易于通过改变计算程序而灵活地实现控制所需要的信息处理和校正运算(如自适应、最优化等),从而大大提高了控制系统的性能等等。因此,数字控制系统得到了极广泛的应用。

§ 2.2 采样与保持

如前所述,采样是数字控制系统的一个组成部分,系统中至少有一处的信号是一串脉冲或数码。把连续信号变成脉冲或数码信号的过程称为采样。

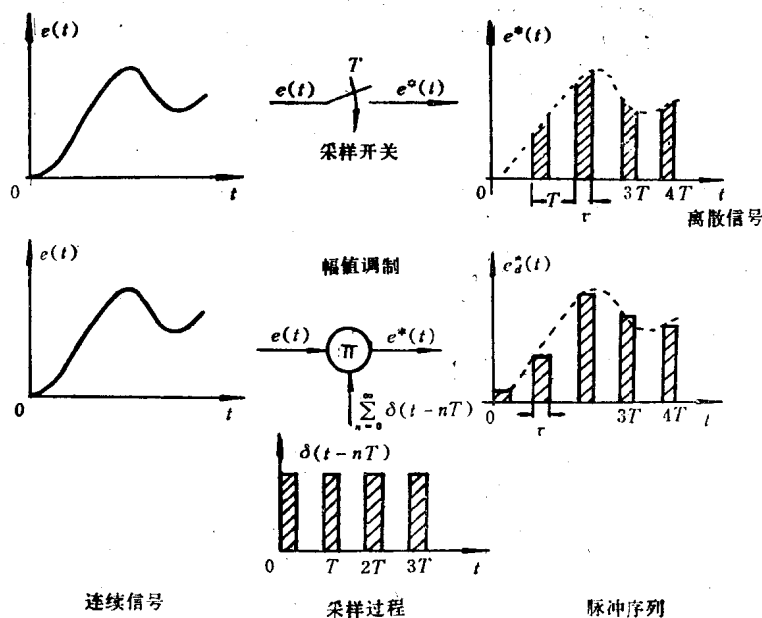


图 2.5 采样开关示意图

采样过程可以用一个周期性闭合的采样开关来表示,也可以看成是一个幅值调制过程,如图2.5所示。

由周期性闭合的采样开关来看:采样开关闭合的周期为 T ,每次闭合的时间为 τ ,通常

$$\tau \ll T$$

近似

$$\tau \rightarrow 0$$

这就使离散信号变为脉冲序列,两者可近似为

$$e^*(t) \approx e_s^*(t)$$

以后统一用 $e^*(t)$ 表示

由幅值调制过程来看:

$$\delta(t - kT) = \begin{cases} \infty & t = nT \\ 0 & t \neq nT \end{cases} \quad (2-1)$$

理想脉冲

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) dt = 1 \quad (2-2)$$

T 为理想脉冲采样周期。

$$\begin{aligned} \text{幅值调制} \quad e^*(t) &= e(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\ &= e(0) \cdot \delta(t) + e(1) \cdot \delta(t - T) + e(2) \cdot \delta(t - 2T) + \cdots \\ &\quad + e(kT) \cdot \delta(t - kT) + \cdots \end{aligned}$$

所以

$$e^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT) \quad (2-3)$$

采样器相当于一个幅值调制器, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ 是幅值调制器的载波,它是以 T 为周期的单位理想脉冲序列,脉冲的面积为1,其数学表达式为式(2-2)。 $\delta(t - kT)$ 被输入连续信号 $e(t)$ 调幅后,其输出 $e^*(t)$ 为脉冲序列,如式(2-3)所示。

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ 是一个周期性函数,它可以展成傅氏级数:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j k \omega_s t}$$

其中, $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 称为采样角频率; c_k 是傅氏系数,其值为

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right] \cdot e^{-j k \omega_s t} dt$$

因为只限于 $-\frac{T}{2}$ 到 $\frac{T}{2}$ 时间内的积分,而 $\delta(t)$ 在积分域内仅在 $t=0$ 处有意义,所以

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) \cdot e^{-j k \omega_s t} dt = \frac{1}{T}$$

得

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j k \omega_s t} \quad (2-4)$$

已知, 幅值调制

$$\begin{aligned}
 e^*(t) &= e(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \\
 &= e(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_s t} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(t) \cdot e^{jk\omega_s t}
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

对式 (2-5) 求拉氏变换:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[e^*(t)] &= E^*(s) \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(s + jk\omega_s)
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

对式 (2-3) 作拉氏变换:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[e^*(t)] &= \mathcal{L}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \cdot \delta(t - kT)\right] \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \cdot e^{-s kT}
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

不难看出:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e(kT) \cdot e^{-s kT} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(s + jk\omega_s) \tag{2-8}$$

上式的两端在数值上是相等的, 但性质不同, 式 (2-7) 对应等式左边, 它与采样过程相联系; 式 (2-6) 对应等式右边, 由它可直接求出 $e^*(t)$ 的频率响应。

采样后, 连续信号 $e(t)$ 将变为离散信号 $e^*(t)$, 若需要恢复成连续信号 $e'(t)$, 要求 $e'(t) \approx e(t)$, 失真越小越好。现从频谱着手分析。

$e^*(t)$ 的频率特性 $E^*(j\omega)$ 可由式 (2-6) 得到。令

$$s = j\omega$$

则有

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j\omega + jk\omega_s) \tag{2-9}$$

由式 (2-9) 可以看出, $E(j\omega)$ 是 $e(t)$ 的连续频谱, 采样后 $e^*(t)$ 的频谱为 $E(j\omega + jk\omega_s)$, 只有当 $k=0$ 时, 它才为采样前连续信号 $e(t)$ 的频谱, 其余各频谱 ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 都是由于

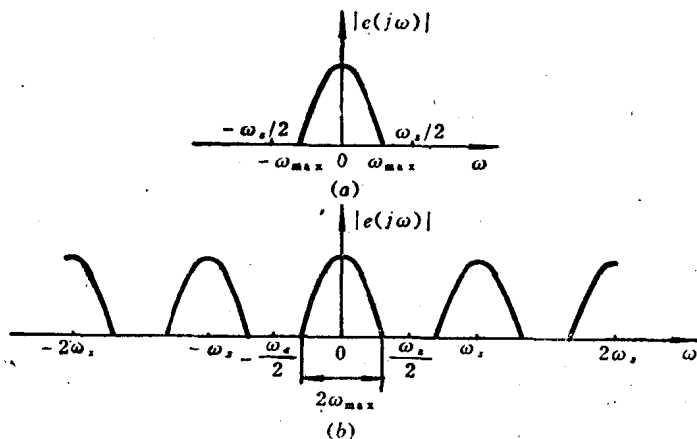


图 2.6 采样前后频谱的变化

采样而引起的高频频谱,如图2.6(b)所示。

由图2.6看到,当 $\omega_s \geq 2\omega_{max}$ 时(ω_{max} 是连续信号的最高角频率),即可不失真地复现输入信号。相邻两频谱不相互重迭的条件是

$$\omega_s \geq 2\omega_{max}$$

为使采样后的离散信号 $e^*(t)$ 能以最小的失真恢复成原连续信号 $e(t)$,必须使采样角频率 ω_s 足够高,保证频谱之间的距离拉开。

若连续信号是某一单频率 ω_{max} ,采样点越密,即 ω_s 越高,离散信号就越容易恢复成原连续信号,如图2.7所示。

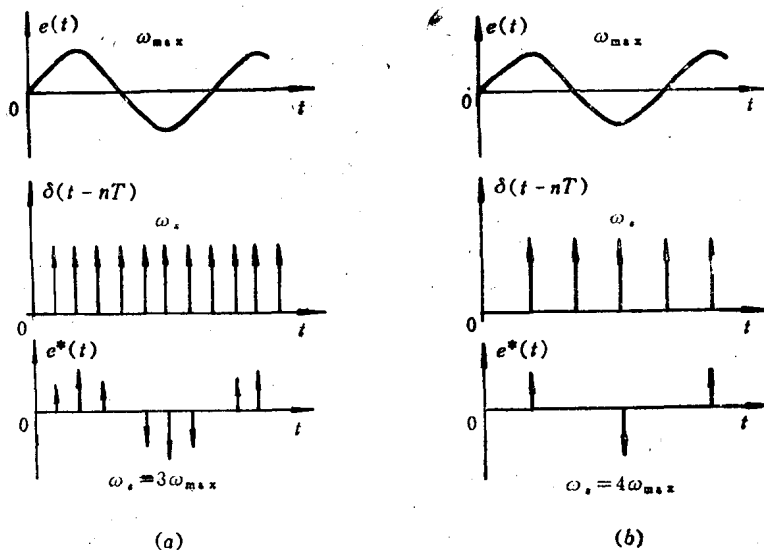


图 2.7 不同采样频率时的输出

综上所述,得采样定理:

如果采样频率 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 大于或等于 $2\omega_{max}$,即

$$\omega_s \geq 2\omega_{max}$$

式中 $2\omega_{max}$ 为连续信号 $e(t)$ 的有限带宽,则采样的离散信号 $e^*(t)$ 能够无失真地恢复到原连续信号 $e(t)$ 。

信号恢复 由 $e^*(t)$ 的频率特性

$$E^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(j\omega + jk\omega_s)$$

看出,此 $e(t)$ 的频率特性 $E(j\omega)$ 增加了 $k \neq 0$ 时无穷多个附加的辅助分量,若想恢复成原来的信号,需要增加滤波器,最理想的滤波器如图2.8所示。滤波器均放在采样器之后,消除采样后增加的高频分量。但理想的采样器是不存在的,在工程上,通常只能采用接近理想的滤波器来近似代替。最简单、最常用的低通滤波器是零阶保持器。

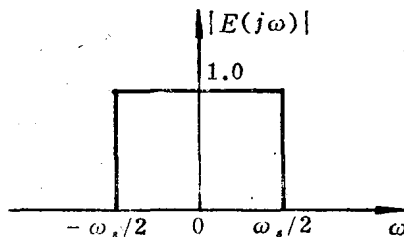


图 2.8 理想零阶保持器的频谱