● 研 究 生 用 书 ●

THEORY METHODS AND APPLICATION OF STABILITY

华中理工大学出版社

廖晓昕

稳定性的理论、方法和应用

图书在版编目(CIP)数据

稳定性的理论、方法和应用/廖晓昕
武汉:华中理工大学出版社, 1999年4月
ISBN 7-5609-1921-9

Ⅰ.稳…
Ⅱ.廖…
Ⅲ.李雅普诺夫稳定性
Ⅳ.O175.13

稳定性的理论、方法和应用

廖晓昕
责任编辑　李立鹏
*
华中理工大学出版社出版发行
(武昌喻家山　邮编:430074)
华中理工大学出版社照排室排版
新华书店湖北发行所经销
武汉市青联彩印印刷厂印制
开本:850×1168　1/32　印张:12.25　插页:2　字数:284 000
1999年4月第1版　1999年4月第1次印刷
印数:1-2 000
ISBN 7-5609-1921-9/O·187
定价:16.80元

内 容 简 介

本书用现代数学工具介绍了经典的李雅普诺夫稳定性理论、方法及几类典型的应用，全书分为五章：第一章为预备知识和近代工具的介绍；第二章陈述李雅普诺夫稳定性直接法的基本定理；第三章讨论直接法思想的各种拓广；第四章分析了线性系统的稳定性、可控可观性等基本理论；第五章给出了对几类典型的动态系统的应用. 本书可作为自动控制系的硕士生的学位课程教材，稍加增删也可作为其它理工科系的博士生、硕士生教材或参考书，还可供有关理工科教师及科技人员参考.

Abstract

In this book, by using modern tools, we introduce the classical Lyapunov stability theory, method and some kinds of typical applications. This book contains five chapters. Chapter 1 is an introduction of preliminaries and modern tools; In chapter 2, the basic theorems of Lyapunov's direct method for stability are presented. Many extensions of the idea of Lyapunov's direct method are discussed in Chapter 3; In chapter 4, we analyse the basic theories of stability, controllability and observability for linear systems, respectively; Some applications of typical dynamical systems are given in chapter 5. This book can be used as a textbook of master degree students of automatic control. By slight additions or deletions, this book can also be a textbook or a reference book of other engineering doctor or master degree students. Moreover, this book can be a reference of engineering teachers and technologist.

“研究生用书”总序

研究生教材建设是提高研究生教学质量的重要环节，是具有战略性的基本建设。各门课程必须有高质量的教材，才能使学生通过学习掌握各门学科的坚实的基础理论和系统的专门知识，为从事科学研究工作或独立担负专门技术工作打下良好的基础。

我校各专业自1978年招收研究生以来，组织了一批学术水平较高，教学经验丰富的教师，先后编写了公共课、学位课所需的多种教材和教学用书。有的教材和教学用书已正式出版发行，更多则采用讲义的形式逐年印发。这些讲义经过任课教师多年教学实践，不断修改、补充、完善，已达到出书的要求。因此，我校决定出版“研究生用书”，以满足本校各专业研究生教学需要，并与校外单位交流，征求有关专家学者和读者的意见，以促进我校研究生教材建设工作，提高教学质量。

“研究生用书”以公共课和若干门学位课教材为主，还有教学参考书和学术专著，涉及的面较广，数量较多，准备在今后数年内分批出版。编写“研究生用书”总的要求是从研究生的教学需要出发，根据各门课程在教学过程中的地位和作用，在内容上求新、求深、求精，每本教材均应包括本门课程的基本内容，使学生能掌握必需的基础理论和专门知识；学位课教材还应接触该学科的发展前沿，反映国内外的最新研究成果，以适应目前科学技

术知识更新很快的形势；学术专著则应充分反映作者的科研硕果和学术水平，阐述自己的学术见解。在结构和阐述方法上，应条理清楚，论证严谨，文字简炼，符合人们的认识规律。总之，要力求使“研究生用书”具有科学性、系统性和先进性。

我们的主观愿望虽然希望“研究生用书”的质量尽可能高一些，但由于研究生的培养工作为时尚短，水平和经验都不够，其中缺点、错误在所难免，尚望校内外专家学者及读者不吝指教，我们将非常感谢。

华中理工大学研究生院院长

陈　珽　　黄树槐

1989.11.

前　言

稳定性概念的出现，有悠久的历史了，早在 17 世纪就出现过托里斯利(Torricelli)原理，即物体仅受重力作用，当重心位置最低时其平衡是稳定的，反之是不稳定的. 但在动力学方面，对应于稳定运动的严格的解的选择原理却未建立.

稳定性概念也早被拉普拉斯(Laplace)、拉格朗日(Lagrange)、马克斯威尔(Maxwell)、汤姆逊和德特(Thomson and Tait)、庞加莱(Poincare)等采用过，但都无精确的数学定义. 达郎倍尔、(D'Alambert)、拉格朗日、马克斯威尔、魏施涅格特斯基(Вышнегралский)、茹可夫斯基(ЖykoBckий)及斯图多(Ctodola)等采用过一次近似方法，研究稳定性但未从数学上严格证明其合理性. 因此，可以说，在这之前，稳定性的一般理论，迟迟没有形成.

1892 年，俄国数学力学家李雅普诺夫(Ляпунов)的博士论文"运动稳定性的一般问题"才给出了运动稳定性的严格的精确的数学定义和一般方法，从而奠定了稳定性理论的基础. 但人们对李雅普诺夫理论的了解、欣赏继承和发展，也有一个漫长的过程.

1952 年，苏联著名数学家马尔金(Малкин)的专著《运动稳定性》及 1955 年苏联著名控制论专家列托夫(Легов)的专著《非线性调节系统的稳定性》同时在序言中提到"现代自动调节理论，不论它以何种体系出现，总是发轫于一个唯一牢固的基础李雅普诺夫运动稳定性学说."

1957—1958 年中国科学院数学所秦元勋教授为纪念李雅普诺夫诞生一百年及逝世四十周年而编写了《运动稳定性的一般问题讲义》在数学所讲授李雅普诺夫博士论文中的主要内容，同一时期前后还有中山大学的许淞庆教授、山东大学的张学铭教授，先后

把李雅普诺夫稳定性理论在中国传播.之后,我国在稳定性理论和应用方面,许多学者做出了重要贡献.

1976年美国布朗大学著名数学家Lasalle教授在动力系统稳定性的序言中写到:“在某种程度上可以说,李雅普诺夫的直接法在西方重新发现是五十年代中期的事.至少那时在非线性控制系统的设计中已广泛地承认了它的重要性.我对于李雅普诺夫理论的理解和赏识始于1959年……”他在60年代还说过:“稳定性理论在吸引着全世界数学家的注意,而且李雅普诺夫直接法得到了工程师们的广泛赞赏”,“稳定性理论在美国正迅速变成训练控制论方面的工程师们的一个标准部分.”

1992年在美国佛罗达召开的规模很大的首届非线性世界大会.其中有一个分会的主题就是纪念李雅普诺夫博士论文发表100周年学术报告会.人数很多,会堂还有李雅普诺夫的巨幅画像.

稳定性的重要意义,可想而知,小至一个具体的控制系统,大至一个社会系统、金融系统、生态系统,总是在各种偶然的或持续的干扰下运行的.承受这种干扰之后,能否保持预定的运行或工作状态,而不致于失控,摇摆不定,至关重要.

近十多年来,人工神经网络的理论和应用的研究,形成了世界性的热潮,其中稳定性扮演重要的角色,利用动力系统的吸引子和电子电路的实现来完成某些智能优化计算、联想记忆、学习算法.从而,对稳定性理论感兴趣的已远远不止数学、力学、自动控制专业的学者.

本书是根据我在1982年～1994年期间先后在华中师范大学为两届高校微分方程教师进修及三届数学系运筹与控制硕士生讲授的“稳定性的数学理论”内容及1995年～1998年期在华中理工大学自控系为三届博士、硕士生主讲的动力系统稳定性的教学内容删繁就简改写而成的.全书共分为五章.第一章介绍一些预备知

识，全书要用到的基本工具，特别是各种稳定性、吸引性的概念，以及它们之间的蕴涵或等价关系；第二章采用现代的证明方法叙述经典的李雅普诺夫稳定性直接法的基本定理，期望读者以较少的时间和精力掌握这一理论的精髓；第三章详尽地介绍李雅普诺夫直接法的各种各样的推广. 这些丰富的内容，也可以说是常微分方程稳定性的近代内容. 学习完这三章，应该说，可以掌握稳定性的概况，优秀的学生便可进入研究的前沿；第四章介绍线性系统稳定性的基本理论. 由于线性系统解空间的线性结构. 一些性质，均可从标准基本解矩阵（也称 Cauchy 矩阵）反映出来，故我们以 Cauchy 矩阵为纲来分析整个理论；第五章是应用篇，主要介绍了李雅普诺夫稳定性的 V 函数法在分离变量非线性系统. 非线性控制系统、人工神经网络系统、电机及电力系统、一类化学反应模型、一类经济动态模型、一般生态系统、两类力学系统稳定性分析等方面的应用，全书尽可能将我们自己的一些研究成果与心得介绍给读者，以期相互促进，共同提高.

感谢华中理工大学校、系及研究生院和出版社的积极支持，也感谢历届研究生对教学、教材的宝贵建议. 更感谢许多兄弟院校同行朋友对曾使用过我写的“稳定性的数学理论和应用”一书的所提的宝贵意见.

由于编者水平有限，加之时间仓促，对书中必然存在的缺点和错误，衷心地希望和欢迎读者批评指正.

廖晓昕

1998 年 4 月于华中理工大学

自动控制科学与工程系

目　录

第一章　预备知识、基本工具

为了体系的完整，本章先介绍常微分方程理论中的几个基本定理且给出一些几何解释，但略去证明，因为几乎任何一本常微教材中都有证明. §1.2 叙而不证微分和积分不等式及比较原理，指出有证明的参考书；§1.3～§1.4 详尽地给出了李雅普诺夫函数，楔函数[K 类函数]的定义、实例、几何解释及等价关系. 李雅普诺夫函数是整个稳定性理论的核心工具. 楔函数则是简化经典定理证明的现代工具；§1.5 介绍了狄尼(Dini)导数概念及与函数单调性的关系；§1.6 论述了矩阵特征多项式的霍尔维茨(Hurwitz)条件，对称矩阵的定号(正、负定、半正、负定)的赛尔维斯托(Sylvester)条件以及 M 矩阵的条件的统一简化形式；§1.7～§1.8 则是集中地系统地介绍了各种稳定性、吸引性、渐近稳定性的数学定义、几何解释、以及各种概念之间的相互蕴涵关系. 这些工具概念贯穿全书始终.

"工欲善其事、必先利其器". 读者如愿多花点精力和时间弄清这些概念掌握这些工具. 将会加速后几章的顺利阅读. 笔者的意图和愿望，也正如此.

§1.1　常微分方程的基本定理[11,12]

本节，先不加证明地叙述常微分方程的几个基本定理，这些定理的证明可以在许多常微分方程教材中找到，但这里给予一些几何解释.

考虑微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = g_i(t, x_1, \cdots, x_n), \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1.1-1}$$

时间 t 属于某开区间 $I=(t_1,t_2)$，$t_1\geqslant-\infty$，$t_2\leqslant+\infty$，状态向量 $\mathrm{col}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega\subset R^n$，$g_i\in C[I\times\Omega,R^1]$. 表示 g_i 的定义域为 $I\times\Omega$，值域为 R' 的连续函数.

(1.1-1)式可写成向量形式：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$

若$\forall$ $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$，$\forall$ $t\in I$. $\exists$ 常数 $L>0$，使得

$$|g_i(t,\boldsymbol{x})-g_i(t,\boldsymbol{y})|\leqslant L\sum_{j=1}^{n}|x_j-y_j|.$$

则称 g_i 在 $I\times\Omega$ 上满足 Lipschitz 条件，显然，若 $g_i(t,\boldsymbol{x})$的所有偏导数存在，且在 $I\times\Omega$ 上有

$$\frac{|\partial g_i(t,x_1,\cdots,x_n)|}{\partial x_j}\leqslant K\qquad(i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中 K 为某正实数，则 Lipschitz 条件满足.

以下几个定理是微分方程理论的基础定理.

定理 1.1 （解的存在唯一性定理）若 $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})=\mathrm{col}(g_1(t,\boldsymbol{x}),\cdots,g_n(t,\boldsymbol{x}))$在 $I\times\Omega$ 上连续，且满足 Lipschitz 条件，则$\forall$ $(t_0,\boldsymbol{x}_0)\in I\times\Omega$，总存在常数 $t^*>0$. 使得在区间$[t_0-t^*,t_0+t^*]$内存在唯一的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0));\\ \boldsymbol{x}(t_0,t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0.\end{cases}\tag{1.1-2}$$

这时，也称(1.1-1)式的 Cauchy 问题的解是存在唯一的.

定理 1.2(解的可延拓性) 定理 1.1 中由任意初始条件 $t_0,\boldsymbol{x}_0$ 确定的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$，当 t 向前延拓时(令 t 无限增大)或者 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$在某时刻 τ 到达 Ω 的边界，或者恒位于 Ω 内. 向后延拓也是一样.

如图 1.1-1 所示.

定理 1.1 说明，在初始状态$(t_0,\boldsymbol{x}_0)$的邻域内存在唯一的解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$.

定理 1.2 表明过上述$(t_0^*,\boldsymbol{x}_0)$的解的延拓，对于 I 中任何包含

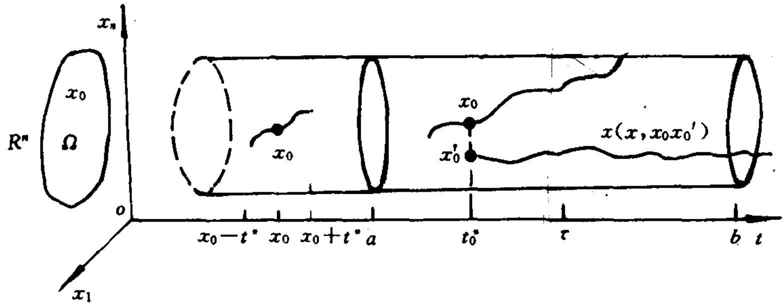


图 1.1-1

t_0 的有限区间 $I^*=[a,b]$. 解 $\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 或者从空间方向，或者从时间方向总要越出有限区域

$$I^* \times \Omega$$

定理 1.3 （解对始值的连续依赖性和可微性）

设定理 1-1 的条件满足. 且

1) 若(1.1-1)式的两个解 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t)=x(t,t_0,\boldsymbol{x}_0^{(1)})$，$\boldsymbol{x}^{(2)}(t)=x(t,t_0,\boldsymbol{x}_0^{(2)})$ 在 $[t_0,t_1]$ 上均有定义，均位于 Ω 内，则 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$.

当 $\|\boldsymbol{x}_0^{(1)}-\boldsymbol{x}_0^{(2)}\|<\delta$，有 $\|\boldsymbol{x}^{(1)}(t)-\boldsymbol{x}^{(2)}(t)\|<\varepsilon$，在 $[t_0,t_1]$ 内恒成立.

2) 若 $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$ 连续，则

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial x_{j0}}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

也连续.

解对始值的连续依赖性有明显的几何解释如图 1.1-2.

说明若在 t_0 时始值 $\boldsymbol{x}_0^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}_0^{(2)}$ 相差甚微，则在整个 $[t_0,t_1]$ 内，$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ 亦相差很小.

我们后面所要详细讨论的稳定性，只不过是把解对始值连续依赖性由有限区间 $[t_0,t_1]$ 推广到无穷区间 $[t_0,+\infty)$，即要研究当 $t\to+\infty$ 时，解 $\boldsymbol{x}(t)$ 的渐近行为，因此，我们只研究系统的解在 $[t_0,+\infty)$ 上，甚至在 $(-\infty,+\infty)$ 上都存在的情况.

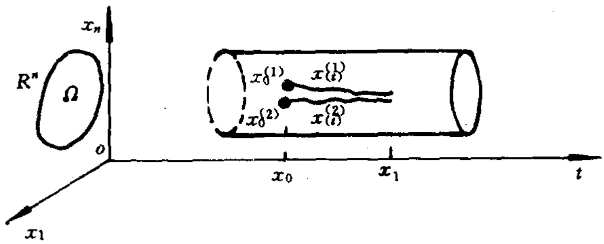


图 1.1-2

下面考虑依赖于参数的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\mu). \tag{1.1-3}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\Omega, t\in I$. 参数 $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$, $g(t,\boldsymbol{x},\mu)\in C[I\times\Omega\times[\mu_1,\mu_2], R^n]$. 对每个 μ, $\boldsymbol{g}$ 满足 Lipschitz 条件.

定理 1.4 （解对参数的连续性与可微性）

1）对于 $t_0\in I, \boldsymbol{x}_0\in\Omega, \mu_0\in[\mu_1,\mu_2]$，存在常数 $\rho>0, a>0$，使得当 $|\mu-\mu_0|\leqslant\rho$ 时，方程组(1.1-3)式有唯一解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\mu)$ 满足始值 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 在$[t_0-a,t_0+a]$上有定义，且是 μ 的连续函数.

2）若 g_i 是一切变量的解析函数，则当 $\mu\in(\mu_1,\mu_2)$ 解 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,t_0,\mu)$ 也是 μ 的解析函数.

3）若 g_i 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 及 μ 的连续可微函数，则解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\mu)$ 对 μ 连续可微.

图 1.1-3 给出了定理的几何解释，即 μ 有一微小变化 δ_μ，则新的方程组(1.1-3)中 μ 代之以 $\mu+\delta\mu$ 的解. 在其共同的定义域上也充分地接近.

即$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0$，当 $|\Delta\mu|<\delta$，

$$\|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\mu)-\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0,\mu+\delta)\|<\varepsilon.$$

例 1 考虑二阶线性系统

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\mu\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\mu=0. \tag{1.1-4}$$

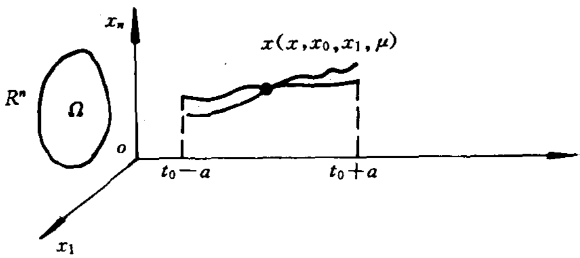


图 1.1-3

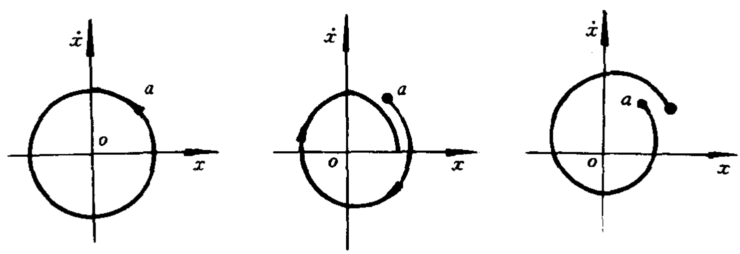
当 $\mu=0$ 时,方程(1.1-4)有解

$$x = A\sin(t + a), \dot{x} = A\cos(t + a).$$

其中 A 及 a 为积分常数,消去 t 得轨线方程

$$\dot{x}^2 + x^2 = A^2.$$

当 A 变化时,得到一族圆,在图 1.1-4(a)只画出一个,每个圆表示系统(1.1-4)的一个周期解.



(a) (b) (c)

图 1.1-4

当 $\mu>0$ 时,若 μ 甚小,按解与参数 μ 连续依赖性(定理 1.4),系统的轨线与图 1-4(a)相差甚微.因为这时系统是小阻尼衰减振动,轨线是向内趋于原点的平缓螺线的一段.

当 $\mu<0$,且 $|\mu|\ll1$,系统的轨线与 $\mu>0$ 相反,如图 1-4(c)所示,系统是一平缓发散的振动系统.

可以看到：若 $|\mu|\ll 1$、$\mu>0$、$\mu=0$ 与 $\mu<0$ 情况下一段时间上的轨线定量上十分相近. 如图上的实线所示，但定性上（或拓扑结构）却有本质差异. $\mu=0$ 对应闭轨线，$\mu>0$，$\mu<0$ 分别对应于螺线型轨线，但轨线的走向却相反，虽然它们都是从同一初始状态 a 出发的.

§1.2 微分、积分不等式[14,33]

本节不加证明介绍在研究稳定性及其它性质中都很有用的微分积分不等式，详细证明读者可参考文献.[14,33]

定理 2.1 设纯量函数 $\varphi(t)$ 在区间 $\tau\leqslant t<b$ 上连续，右导数 $D_+\varphi(t)$ 存在且满足

$$D_+\varphi(t)\leqslant F(t,\varphi(t)),\varphi(\tau)=\xi. \tag{1.2-1}$$

其中 $F(t,x)$ 是在含曲线 $x=\varphi(t)$ $(\tau\leqslant t<b)$ 的某一区域 G 内定义的连续函数，若 $x=\Phi(t)$ 在区间 $\tau\leqslant t<b$ 上是微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t,x);\\ x(t_0)=\eta\geqslant\varphi(\tau)=\xi\end{cases} \tag{1.2-2}$$

的 G 内右行最大解，则有

$$\varphi(t)\leqslant\Phi(t)\qquad(\tau\leqslant t<b).$$

定理 2.2 设函数 $f(t,x)$ 在平面区域：$\overline{R}$：$|t-\tau|\leqslant a$，$|x-\xi|\leqslant b$ 上连续且关于 x 是不减的，$x=\varphi(t)$ 在 $|t-\tau|\leqslant a$ 上连续且当 $|t-\tau|\leqslant a$ 时 $(t,\varphi(t))\in\overline{R}$. 且满足积分不等式：

$$\begin{cases}\varphi(t)\leqslant\xi+\displaystyle\int_\tau^t f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s,\tau\leqslant t\leqslant\tau+h;\\ \varphi(\tau)\leqslant\xi,\end{cases} \tag{1.2-3}$$

而 $\Phi(t)$ 在 $\tau\leqslant t\leqslant\tau+h$ 上满足微分不等式：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x);\\ x(\tau)=\xi,\end{cases} \tag{1.2-4}$$