矢量、并矢分析与符号运算法

方能航 著

科学出版社

矢量、并矢分析与符号运算法

方 能 航 著

科 学 出 版 社

1 9 9 6

(京)新登字092号

内 容 简 介

本书系统地介绍了经典矢量分析、并矢分析等内容，指出了长久以来关于矢量分析基本概念的模糊认识. 在此基础上重点介绍新符号矢量▽的理论及由此推演出的符号运算法.

矢量分析、并矢分析是电磁学、流体力学，以及所有要用到场概念学科的数学基础，是天线、微波技术理论中的基本数学工具. 本书作者经过多年的努力，严格地论证了矢量及并矢分析方法，指出并纠正了所存在的问题，提出了新的符号矢量，建立了一套完整的符号运算法的理论，为完善、总结矢量分析、并矢分析这一学科的理论作出了贡献.

本书可供从事电磁学、流体力学等研究工作的科研人员和从事天线、微波技术工作的科技人员阅读，也可作大专院校该专业的教师、本科生和研究生的教学用书.

矢量、并矢分析与符号运算法

方能航 著

责任编辑 唐正必

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1996年1月第一版 开本：850×1168 1/32

1996年1月第一次印刷 印张：11 1/4 插页：2

印数：1—1 380 字数：294 000

ISBN 7-03-004909-8/TN·176

定价：25.00元

序　言

矢量分析和并矢分析，在工程技术，以及在物理学尤其是电磁学中，得到了非常广泛的应用。目前它们已经成为大学的基础课程之一。与此相应，已出版的有关矢量和并矢分析的中外文书籍可以说为数不少，内容包罗万象。但是，纵观已出版的书籍，可以看出有两个问题还解决得不够完善。第一个是有关正交曲线坐标系的问题。正交曲线坐标系在工程中用得很多，理论上也没有什么问题。一般矢量和并矢分析的书都涉及到这个问题，可是总觉讲得不够详细和完整。另一个是符号运算法问题。

矢量和并矢分析中有一个特殊的现象，就是作者常常列出一张公式表让读者去查阅和记忆。这就使得读者(尤其是初学者)在应用矢量和并矢分析时产生了一定的难度。有没有简便的运算方法呢？回答是肯定的。

早在本世纪初，Heaviside 在 Gibbs 符号系统基础上就提出了有关符号运算法的设想，不过当时并没有形成什么理论，只是给后人指出了努力的方向。以后前苏联数学家 Кочин 提出了最终可以得到正确结果的规则，把符号运算法推进了一大步。正是由于这一点人们才认为：依靠现有的 ∇ 符号系统来建立一套严格的理论是有可能的，但当时没有取得多大的发展。关键性的突破应归功于前苏联数学家 Шилов。他对含有 ∇ 符号的表达式赋予了新的意义，实际上建立了符号运算法理论。但是，由于用的是老符号 ∇，而且他不但没有明确指出新意义与老意义之间的差别，反而强调它们的一致性，加之理论方面前后逻辑上又有矛盾，结果他的理论连在前苏联也没有得到重视和推广。本书著者对其理论加以完善和补充后，得出了符号运算法的严格理论。但是由于是老符号新意义，容易和现有意义产生混淆。这是美中不足之处。

C. T. Tai 通过引入新符号的办法最终给符号运算法打上了句号.

本书就是为了向读者系统地介绍上述两个问题的内容而编写的. 希望读者在阅读本书之后能彻底掌握正交曲线坐标系和符号运算法问题,以达到节省时间和精力的目的.

矢量分析和并矢分析方面的其他问题，读者可参阅别的有关书籍,这里就不赘述了.

本书在编写过程中，得到了南京电子技术研究所所长严敦善和包养浩、总工程师张直中和张光义的热情鼓励和支持,在此表示深切的谢意. 丁夑华高级工程师审阅了全稿，提出了许多宝贵的意见，在此一并表示感谢.

著　者

目　录

第一章 矢量代数

本书重点研究矢量分析中的符号运算法．由于它是用矢量代数方法、公式来变换矢量微分函数的，因此我们在这一章里先复习一下矢量代数的术语和公式，以便后面引证使用．熟悉矢量代数的读者，可以直接读第二章或第三章．

1-1 矢量函数的表示方法

矢量函数既有大小又有方向．一般来说，我们在科学问题中所遇到的许多矢量函数都是空间和时间的函数．在本书中我们只讨论它们作为空间变量函数的特性．

矢量函数用 $\mathbf{F}$ 来表示．几何上，它用一个在三维空间中带箭头的线段来表示．线段的长度对应于它的大小，而线段的方向则表示矢量函数的方向．用矢量来表示物理量的方便之处可以通过图 1-1 中的简单例子来说明．该例子描述一个质点在真空中在恒定重力吸引下的运动情况．质点以初速 $\mathbf{v}_0$ 沿与地平面成 θ_0 角的方向抛出．在飞行过程中，不同位置上的质点的速度函数（矢

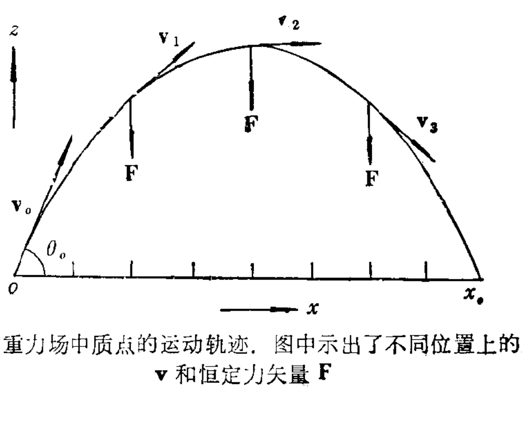

图 1-1 重力场中质点的运动轨迹．图中示出了不同位置上的速度 $\mathbf{v}$ 和恒定力矢量 $\mathbf{F}$

量)既改变大小，又改变方向，如图中的 $\mathbf{v}_1$，$\mathbf{v}_2$ 等所示. 作用在质点上的重力假设是恒定的，在图中用 $\mathbf{F}$ 表示. 恒定矢量函数的意思是指其大小和方向都是常数，并且在这个例子中它与空间变量 x 和 z 无关.

两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 用几何法表示的相加规则见图 1-2(a)，(b) 或 (c). 代数上，它写成两个标量函数数字相加的形式，即

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \tag{1-1}$$

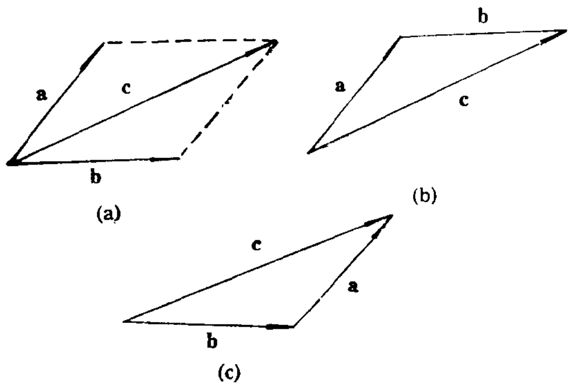

图 1-2　矢量的相加：$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$

矢量 $\mathbf{a}$ 减去矢量 $\mathbf{b}$ 定义为矢量 $\mathbf{d}$，它加上 $\mathbf{b}$ 后应等于$\mathbf{a}$. $\mathbf{d}$ 或者说 $\mathbf{a}$ 减去 $\mathbf{b}$ 写成下列形式：

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}-\mathbf{b} \tag{1-2}$$

注意，$\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 是一个整体符号. 根据 $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 的定义

$$\mathbf{d}+\mathbf{b}=\mathbf{a} \tag{1-2a}$$

我们定义 $(-\mathbf{b})$ 是一个大小和 $\mathbf{b}$ 一样但方向相反的矢量（这里没有减法的意思）. 在式 (1-2a) 两边加上同一个矢量 $(-\mathbf{b})$，得

$$\mathbf{d}+\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$$

根据 $(-\mathbf{b})$ 的定义 $\mathbf{b}+(-\mathbf{b})=0$，于是，

$$\mathbf{d}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}) \tag{1-2b}$$

因此式(1-2)可以看成是 $\mathbf{a}$ 和 $(-\mathbf{b})$ 的相加. 式(1-2)的几何意义见图 1-3.

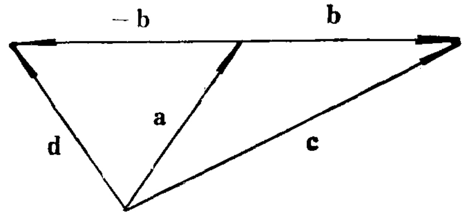

图 1-3 矢量的相减：$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{d}$

由式(1-2b)可以得出结论：矢量 $\mathbf{a}$ 减去矢量 $\mathbf{b}$ 就是矢量 $\mathbf{a}$ 加上一个与 $\mathbf{b}$ 大小相等、方向相反的矢量．两个矢量的和及差满足交换律，即

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{1-3}$$

和

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=-\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{1-4}$$

这两个关系式可以推广到任意数目的矢量上．

矢量相加的规则表明，任意一个矢量都可以看成由与某一坐标系有关的几个基本分量所组成．最便于应用的坐标系是笛卡儿坐标系或直角坐标系．这种坐标系中的空间变量通常用 x，y 和 z 表示．大小等于 1 并指向 x 轴正方向的矢量称为 x 方向上的单位矢量，用 $\mathbf{i}$ 表示．类似的单位矢量还有 $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$．在这样的坐标系中，一般作为位置函数的矢量函数 $\mathbf{F}$，可以写成下列形式：

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}F_x+\mathbf{j}F_y+\mathbf{k}F_z \tag{1-5}$$

三个标量函数 F_x，F_y 和 F_z 称为 $\mathbf{F}$ 分别相应于 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 方向上的分量，而 $\mathbf{i}F_x$, $\mathbf{j}F_y$ 和 $\mathbf{k}F_z$ 则称为 $\mathbf{F}$ 的矢量分量．$\mathbf{F}$ 的几何表示见图 1-4．从图中可以看出：F_x，F_y 和 F_z 可以是正的，也可以是负的．图 1-4 中的 F_x 和 F_z 是正的，但 F_y 是负的．

除了式(1-5)这种表示方式之外，$\mathbf{F}$ 的另一种有用表示方式是通过其大小(用 $|\mathbf{F}|$ 表示)和方向余弦来表示，即

$$\mathbf{F}=|\mathbf{F}|(\cos\alpha\mathbf{i}+\cos\beta\mathbf{j}+\cos\gamma\mathbf{k}) \tag{1-6}$$

式中，α, β 和 γ 是 $\mathbf{F}$ 分别相应与 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 所成的角度，如图 1-4 所示．由图形的几何结构显然可见

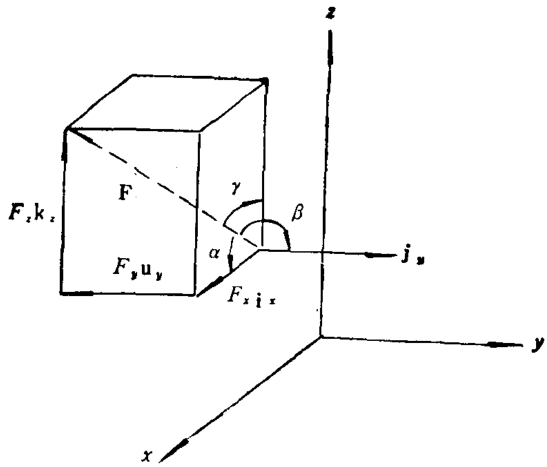

图 1-4 直角坐标系中的矢量分量

$$|\mathbf{F}| = (F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1-7}$$

以及

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{|\mathbf{F}|}, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{|\mathbf{F}|}, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{|\mathbf{F}|} \tag{1-8}$$

其次,有关系式

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{1-9}$$

这可通过将式(1-8)中的三式平方相加并利用式(1-7)得出. 由式(1-9)可见只有两个方向余弦是独立的,即可任意给定两个方向余弦,第三个由式(1-9)决定. 由此可见,一般来说共需要三个参数来确定一个矢量函数. 这三个参数可以是 F_x, F_y 和 F_z, 或者是 $|\mathbf{F}|$ 和两个方向余弦角. 式(1-5)和(1-6)的表示方式可以推广到其他正交坐标系上去. 这个问题我们在第三章中讨论.

最后,我们还要指出,三个矢量 **a**,**b**,**c** 满足结合律, 即

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$$

这条规律也可推广到任意数目的矢量上去.

1-2 矢量的乘积和矢量恒等式

两个矢量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的标量积用 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 表示。它定义为

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \qquad (1\text{-}10)$$

式中，θ 是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的角度，如图 1-5 所示。因为这种乘积的符号中有“$\cdot$”号，所以它有时也称为点积。将式(1-10)用到三个相互正交的单位矢量 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2$，$\mathbf{u}_3$ 上，得

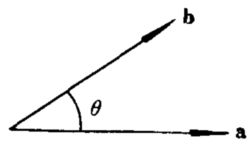

图 1-5 两矢量的标量积：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$

$$\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_j=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & \mathbf{i}\neq\mathbf{j}\end{cases} \quad i,j=1,2,3 \qquad (1\text{-}11)$$

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的值也可以通过 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在任意正交坐标系中的分量来表示。令所考虑的坐标系是直角坐标系统，并令 $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$，于是

$$|\mathbf{c}|^2=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta$$

由此得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}&=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta=\frac{|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2}{2}\\ &=\frac{\begin{array}{c}a_x^2+a_y^2+a_z^2+b_x^2+b_y^2+b_z^2-(a_x-b_x)^2\\ -(a_y-b_y)^2-(a_z-b_z)^2\end{array}}{2}\\ &=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\\ &=a_xb_x+b_ya_y+b_za_z\\ &=\cdots\end{aligned} \qquad (1\text{-}12)$$

将式(1-10)和(1-12)等同起来，我们得到

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{1}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)\\ &=\cos\alpha_a\cos\alpha_b+\cos\beta_a\cos\beta_b+\cos\gamma_a\cos\gamma_b\end{aligned} \qquad (1\text{-}13)$$

这是一个解析几何学中众所周知的关系式。

下面我们来证明标量积所满足的分配律，即

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-14}$$

令 $\mathbf{B}=\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2$，于是 $\mathbf{B},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 在 $\mathbf{A}$ 方向或 $\hat{\mathbf{A}}$（单位矢量）上的矢量分量为 $\mathbf{B}',\mathbf{B}'_1,\mathbf{B}'_2$，如图 1-6 所示．由 $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 和 $\mathbf{B}$ 所组成

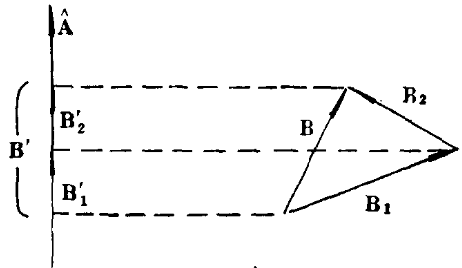

图 1-6　$\mathbf{B},\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$ 在 $\hat{\mathbf{A}}$ 方向上的投影

的三角形是一个三维空间中的三角形，它不一定与 $\mathbf{A}$ 共面，于是

$$\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'_1+\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'_2 \tag{1-15}$$

因为

$$\left.\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'\\ \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'_1\\ \hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2&=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}'_2\end{aligned}\right\} \tag{1-16}$$

所以我们得到

$$\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}=\hat{\mathbf{A}}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_1+\hat{\mathbf{A}}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-17}$$

将式(1-17)乘以 $|\mathbf{A}|$（即 $\mathbf{A}$ 的大小），有

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2 \tag{1-18}$$

将式(1-18)重复地应用到三个以上的矢量函数中去，我们可以把它推广到任意数目矢量的情况．例如，如果

$$\mathbf{A}=\sum_i A_i\hat{\mathbf{x}}_i,\quad \mathbf{B}=\sum_j B_j\hat{\mathbf{x}}_j \tag{1-19}$$

那末

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}&=\sum_i\sum_j A_iB_j\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\hat{\mathbf{x}}_j\\ &=\sum_i A_iB_i\end{aligned} \tag{1-20}$$

分配律也可以用式(1-12)来证明. 根据式(1-12)我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)\\
&=A_x(B_{1x}+B_{2x})+A_y(B_{1y}+B_{2y})\\
&\quad+A_z(B_{1z}+B_{2z})\\
&=(A_xB_{1x}+A_yB_{1y}+A_zB_{1z})\\
&\quad+(A_xA_{2x}+A_yB_{2y}+A_zB_{2z})\\
&=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}_2
\end{aligned}
$$

一旦证明了标量积的分配律之后，式(1-12)就可以通过取 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 各矢量分量之间的标量积之和来验证.

两个矢量函数 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的矢量积用 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 表示. 它的定义如下:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\mathbf{u}_c \tag{1-21}$$

式中，θ 表示 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 之间的角度，从 $\mathbf{a}$ 算起至 $\mathbf{b}$; $\mathbf{u}_c$ 表示一个既垂直于 $\mathbf{a}$ 又垂直于 $\mathbf{b}$ 的单位矢量，而且它指向一个由 $\mathbf{a}$ 旋至 $\mathbf{b}$ 右手螺旋的前进方向. 图 1-7 中示出了相对于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的 $\mathbf{u}_c$ 的位置.

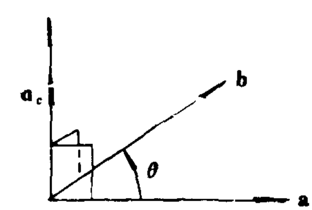

图 1-7 两个矢量的矢量积，$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\mathbf{u}_c$, $\mathbf{u}_c\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{u}_c\perp\mathbf{b}$

由于矢量积的符号中有“×”号，故有时它也称为叉积. 这一名称可与将标量积称为点积的情况相比拟. 对于右手坐标系中的三个正交单位矢量，根据矢量积的定义，我们立即可以看出 $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$. 显然，$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=0$, $\mathbf{j}\times\mathbf{j}=0$, $\mathbf{k}\times\mathbf{k}=0$. 这里由于 $\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{i}$ 等之间的夹角 $\theta=0$, 故叉积为 0. 由式(1-21)所规定的矢量积定义，可得

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{1-22}$$

式(1-21)中 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 的值，也可以通过 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 在直角坐标系中的分量来表示. 如果我们令 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{v}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$, 由于它既垂直于 $\mathbf{a}$ 又垂直于 $\mathbf{b}$, 因此

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}=a_xv_x+a_yv_y+a_zv_z=0 \tag{1-23}$$

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}=b_x v_x+b_y v_y+b_z v_z=0 \tag{1-24}$$

对 v_x/v_z 和 v_y/v_z 求解，由式(1-23)和(1-24)我们得到

$$\frac{v_x}{v_z}=\frac{a_y b_z-a_z b_y}{a_x b_y-a_y b_x},\quad \frac{v_y}{v_z}=\frac{a_z b_x-a_x b_z}{a_x b_y-a_y b_x}$$

由此

$$\frac{v_x}{a_y b_z-a_z b_y}=\frac{v_y}{a_z b_x-a_x b_z}=\frac{v_z}{a_x b_y-a_y b_x}$$

令这三个量的公共比值为 c。c 值可以通过考虑 $\mathbf{a}=\mathbf{i}$ 和 $\mathbf{b}=\mathbf{j}$ 的情况来确定。这时，$\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{k}$，由于 $v_z=1$ 和 $a_x=b_y=1$ 而 $a_y=b_x=0$，故按最后一个比例式可得 $c=1$。由此，$\mathbf{v}$ 的三个分量由下式表示：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=a_y b_z-a_z b_y\\ v_y&=a_z b_x-a_x b_z\\ v_z&=a_x b_y-a_y b_x \end{aligned}\right\} \tag{1-25}$$

这组表示式可以综合成行列式的形式，表示如下：

$$\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ a_x&a_y&a_z\\ b_x&b_y&b_z\end{vmatrix} \tag{1-26}$$

下面我们来证明矢量积满足分配律，即

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}\times\mathbf{B}_1+\mathbf{A}\times\mathbf{B}_2 \tag{1-27}$$

由 $\mathbf{B}$,$\mathbf{B}_1$ 和 $\mathbf{B}_2$ 所组成的三角形，在一个垂直于 $\hat{\mathbf{A}}$ 的平面

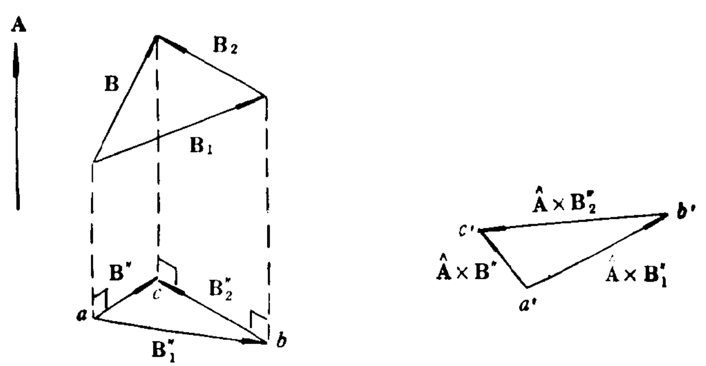

图 1-8 $\mathbf{B}$,$\mathbf{B}_1$,$\mathbf{B}_2$ 在垂直于 $\hat{\mathbf{A}}$ 的平面上的投影