現代应用数学丛书

复变函数论

〔日〕功力金二郎 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

复变函数論

〔日〕功力金二郎 著
刘书琴 譯
楊宗磐 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书扼要地讲述了复变函数論的一些初步概念：复数及綫性函数、正則函数及初等函数、Cauchy 积分定理、单值函数的正則性及孤立奇点、解析开拓、共形映射、单純函数、椭圓函数等共八章。原书分二册，現合幷成一册出版。

本书可供有关高等学校作为教学参考书，也可供工程师、科学工作者参考。

現代应用数学丛书

复 变 函 数 論

原书名 複素函数論 I II
原著者 〔日〕功力金二郎
原出版者 岩波书店，1958
譯者 刘书琴
校者 楊宗磐

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业營业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 7 28/32 字数 186,000
1963年6月第1版 1963年6月第1次印刷
印数 1—7,350

統一书号：13119 · 512
定价：（十四）1.35 元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的質量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数*	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原满洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数値計算法*	森口繁一等	閻昌龄
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論* 变形几何学	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論*	喜安善市等	陆志刚
自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
网絡拓扑学·	近藤一夫	張設
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計过程論	北川敏男	刘璋温
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法*	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論*	官澤光一	張毓椿
綫性规划*	森口繁一等	刘源張
經济理論中的数学方法*	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有*者已經出版，有·者即将出版。

譯 者 序

复变数函数論是数学中发展得成熟的一个分支，也是近代数学的基础之一，內容非常丰富。本书作者在不大的篇幅內介紹了它的主要內容的初步，对材料的取舍和安排作了不少努力，应当說这是一本学习复变数函数論的較好入門讀物。

由于客观的需要，复变数函数的研究在十八世紀就已开始。如果再往前追溯的話，有关的个别概念还更早一些。例如本书中提到的Cauchy-Riemann方程，事实上在十八世紀初已由d'Alembert和Euler研究过。尤其是Euler还研究了复变数函数在流体力学、地图制作法及积分学上的应用。但是对之作系統的研究，从而形成为数学的一个独立分支的，則应当首推Cauchy，其次有Riemann和Weierstrass也都作出了不少貢献。在上一世紀，随着生产发展的需要和数学其他分支的影响，这門学科得到了飞跃的发展而趋于成熟，到今天已成为数学的主要基础之一。

自从Weierstrass提出了"函数$f(z)$在其本性奇点的邻域內可趋近于任一値"的性质以后，Picard在1879年应用模函数証明了所謂Picard定理(第7章)。从此展开了近代的整函数及半純函数的理論。对于整函数，由于Borel, Valiron, Hadamard等人的研究，以更精密的結果丰富了Picard定理的內容，同时对于整函数的値的分布，函数模增长的状况作了不少的研究[1]。到本世紀三十年代，R. Nevanlinna利用Jensen公式(§ 20)証明了所謂第一、第二基本定理(§ 20)，把过去得到的关于整函数和半純函数

---

[1] 例如，可参看Б. Я. Левин: Распределение Корней целых Функций, 1956; Boas: Entire functions, 1954; 及Cartwright: Integral Functions, 1956.

的某些个别結果加以統一，树立了半純函数值的分布理論，推广了 Picard 定理❶。和以上理論緊密地联系着的有聚值集理論，半純函数的反函数，Riemann 面型的問題等，都在近代得到了发展❷。

以具有某些性质的函数族作为研究的对象，由个别函数的理論促进了函数族理論的发展。反过来，又由函数族的理論推导出个别函数的一系列性质。例如正規族的理論，就是本世紀复变数函数論的新的內容之一。正規族理論的研究，不只解决了古典函数論中一些重大問題，也刺激了其他函数族理論的发展❸。

共形映照是古典問題之一，十九世紀以前，已在逐漸发展，自 Riemann 开始作了系統研究，給出了共形映射的基本定理(§17)，开辟了几何函数論的新途徑，遂成为复变数函数論的基本內容之一。自此以后，經过 Schwarz, Picard, Poincaré, Koebe 等人的努力，到本世紀初，Carathéodory 給出了領域核的概念❹，并研究了边界对应的关系（§17)。最簡单的問題是单連通域的单叶映射，对应的函数就是单叶函数。单叶函数的理論自 Koebe 开始，經过 Bieberbach, Löwner, Littlewood, Голузин, Schiffer 等人的研究，到現在已有极大的发展。在单叶函数論中，例如偏差定理，旋轉定

---

❶ 可参看，例如辻正次：函数論上下卷，日本朝仓书店，1952；清水辰次郎：輓近函数論，日本岩波数学讲座，1935；R. Nevanlinna: Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Gauthier-Villars, Paris, 1929 及 R. Nevanlinna: Eindentige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1953.

❷ 参看李国平：半純函数的聚值綫理論，科学出版社，1958；能代清：最近ノ函数論，日本岩波书店，1941；R. Nevanlinna: Eindentige analytische Funktionen, Springer, 1953.

❸ 参看前引清水辰次郎的书及 P. Montel: Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications, Gauthier-Villars, Paris, 1927.

❹ 例如参看葛鲁淨：复变函数几何理論，科学出版社，1956；小松勇作：等角写象論，上下册，日本共立社，1949；柏格曼：核函数和共形映照，科学出版社，1958.

理，遮盖問題及系数問題等方面，或則已全部解决，或者已解决了一部分；这些問題的解决不仅对单叶函数論本身有极大的价值，即在数学的其他領域也受到不小的影响❶。不仅如此，由这些問題的研究而产生的方法(例如变分方法)已成为研究某些其他分支的有利工具。

在单叶映射研究的影响下，非单叶映射也有了很大发展，这就是多叶函数的研究。这应当归功于 Littlewood, Голузин, Spencer, Hayman 等人❷。

至于多連通域的映射，Koebe, Poincaré, Grötzsch, Grunsky 等人在这方面作了不少的工作❸。

多值函数的研究引出了許多新的問題，Riemann 面和单值化問題就是其中主要的方面。本书对于 Riemann 面已經給与了近代化的定义 (§15)，在 Ahlfors-Sario 和 Weyl❹ 的书上有进一步的闡述。至于单值化問題，那就是研究域 D_w 和域 R_z 之間的多值关系表为单值关系的問題，十九世紀末期曾經有不少人，如 Poincaré, Klein, Schwarz 等作了一些奠基性的以及某些特殊情况的研究。例如代数函数的单值化可以由自守函数完全解决；由此引起了拓扑与共形映射理論的結合。到 1908 年，Koebe 和 Poincaré 同时解决了这一問題，最近有关这一問題的研究，更有了极大的发展❺。

---

❶ 例如参看葛魯淨：单叶函数的某些問題，科学出版社，1956; Shaeffer and Spencer: Coefficient regions for schlicht functions, Am. Math. Soc., 1950. Hayman: Multivalent functions. 此外，或可参看上引葛魯淨及前引淸水辰次郎的书。

❷ 参看 Hayman: Multivalent functions.

❸ 参看前引葛魯淨的复变函数几何理論及小松勇作的书。

❹ Ahlfors-Sario: Riemann surfaces, Princeton univ. Press, 1960; Weyl: Die Idee der Riemannschen Fläche, 3te Aufl., 1955.

❺ 可参看尼凡林那：单值化，科学出版社，1960.

此外，在复变数函数論中还有很多重要分支，例如特殊函数，多复变数函数，广义解析函数，拟似共形映射等都有很大发展，可資参考的书籍很多，这里不能一一列举。

限于譯者的水平，謬誤之处，請讀者批評指正。

刘书琴

1962年9月

目　　录

第1章　复数及綫性函数

§1　复　数

复变数函数論簡称复变函数論，更簡单地叫做函数論。它是由十八世紀末开始，在十九世紀建立了巩固的基础，本世紀更进一步成为数学主流之一，随着年代的增加，加入了新开拓的分支，直至最近已成为一門龐大的学科。其中大体可分为一变数及多变数两种情形。这里只介紹一变数的情形。

所謂一变数函数論，即給定一个独立变数 z，对应着一个从属变数 w，复变函数論就是研究当 z 及 w 全是复数的情形。現今有企图用更复杂的其他数以替代复数的。但是这样就不能保持复数情形的协調。这恐怕是因为复数在数系里占有一种独特的地位所招致的。故我們首先应当考虑复数在数系內占有如何的地位。

1）**复数在数系中的地位**　先假定我們对于实数是已經知道的，則用实数定义新数，应当先看一看究竟要得出怎样的結果。最初对于这样新的数（今后簡单地叫做**数**），規定服从以下的四个公理，即希望**加法**为可能。

A_1 任意两数 α, β，可以施行加法 $\alpha+\beta$. 其結果为唯一确定的一个数。

A_2 服从加法結合律：$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$.

A_3 服从加法交換律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

A_4（减法的可能性）对于任意两数 α 及 β，方程 $\alpha+z=\beta$ 至少有一个根 z 存在。

由以上四公理可以簡单地証明：对于数中的任一数 α，使 $\alpha+\theta=\theta+\alpha=\alpha$ 成立的数 θ 只有一个存在，且 $\alpha+z=\beta$ 的根 z 由 α 及 β

唯一地确定(参閱本丛书中的《代数学》)。这样的 z 写成 $\beta-\alpha$.

其次，我們增添用实数 a 乘数 α 的假定，且满足以下的四个公理：

S_1 全体的数 α 可以用实数 a 乘，就是可以作出 $a\alpha$. $a\alpha$ 为由 a 及 α 所决定的数。特别地，对于任意数 α 有 $1\cdot\alpha=\alpha$.

S_2 对于任意的实数 a 及任意两数 α 及 β，下式成立：

$$a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta.$$

S_3 任意二个实数 a, b 以及任意数 α 之間，下式成立：

$$(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha.$$

S_4 任意二个实数 a, b 以及任意数 α 之間，下式成立：

$$(ab)\alpha=a(b\alpha).$$

由此公理，对于所有的数 α 有 $0\cdot\alpha=\theta$，对于全体的实数 a 有 $a\theta=\theta$. 又只要 $a\neq 0$, $\alpha\neq\theta$, 则 $a\alpha\neq\theta$.

今对于 n 个数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，假定只当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时才使 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=\theta$. 这种性质叫做 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 彼此**綫性独立**。因此，对于它假定以下公理成立：

D　有限的自然数 m 存在，任何 $m+1$ 个数都不能为綫性独立。

命这一公理中的自然数 m 中的最小的为 n，并設 θ 之外还有数存在。这样恰好有 n 个綫性独立的数 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 存在，使其他的任意数 ξ 常可用以下的形状唯一地表示：

$$\xi=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n, \tag{1.1}$$

即可考虑为具有坐标 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的向量。

这里，我們再考虑眞的乘法，

M_1　任意两数 α, β 之間可以施行乘法。它的結果是唯一的，用 $\alpha\beta$ (或 $\alpha\cdot\beta$) 表示。

M_2　加法与乘法之間分配律成立。即对于任意的 α, β, γ 有

$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$, $(\beta+\gamma)\alpha=\beta\alpha+\gamma\alpha$.

M_3　乘法及实数乘法之間有以下关系成立:对于任意的数 α, β 及实数 a, b 有 $(a\alpha)\cdot(b\beta)=(ab)(\alpha\beta)$.

由此,对于任意的数 α 有 $\alpha\theta=\theta\alpha=\theta$.

作为乘法的性质,还考虑以下的两公理:

M_4　乘法服从結合律。对于任意的 α, β, γ 有

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

M_5(单位的存在)　存在数 ε, 对于任意的数 α 有 $\varepsilon\alpha=\alpha\varepsilon=\alpha$.

可以推出这样的单位只有一个。作为另外的乘法公理,可以考虑 $\alpha\neq\theta$ 的 α 作除数的除法可能性,但是我們不作这样的假定,而假定比它弱的下列公理:

M_6　对于任意两数 α, β, 假定 $\alpha\neq\theta$, $\beta\neq\theta$, 則 $\alpha\beta\neq\theta$.

这里,命 a 为实数,在数 $a\varepsilon$ 及 a 之間建立对应,这对应

$$a\varepsilon\leftrightarrow a$$

是一一对应,并且加减乘除也是互相对应的,因之,成为同构。因此在这里实数的乘法和眞的乘法就沒有区别了。这样,具有形如 $a\varepsilon$ 的数的全体,卽便考虑为实数也不会有矛盾。这就是說实数作为数的特别情形,而是数中的一部分,因为 θ 与 0 对应,故今后写作 $\theta=0$.

命 $e_1=\varepsilon$, 当 $n=1$ 时,就只是实数了。因此問題就在于 $n\geqslant 2$ 的情形。

在 $n\geqslant 2$ 的时候,由于还存在着实数以外的数,取其中的任一个,命其为 ξ, 作出

$$\xi,\ \xi^2,\ \xi^3,\ \cdots,\ \xi^{n+1}.$$

因为它們不是綫性独立,故以下的代数方程成立:

$$a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_{n+1}\xi^{n+1}=0, \tag{1.1}$$

其中的系数 a_1, a_2, $\cdots$, a_{n+1} 全是实数。由此可以把 (1.1) 左端因

数分解,其中的因子最高为二次式,由 M_6 知道其中至少有一个是0,也就是:对于不是实数的数 ξ,有实数 u, v 存在,使

$$(\xi-u)^2+v^2=0, \quad v\neq 0.$$

由于 $e_2, e_3, \cdots, e_n$ 不能是实数,命 $\xi=e_i\ (i=2, 3, \cdots, n)$ 求出 u_i, v_i。命

$$e_1'=e_1=1, \quad e_i'=\frac{e_i-u_i}{v_i}$$

以代替 e_i,则有 $(e_i')^2=-1, \quad i=2, 3, \cdots, n$.

今暂且假定 $n\geqslant 3$,命 $r, s=2, 3, \cdots, n$,然后作出 $(e_r'+e_s')$, $(e_r'-e_s')$,这些都不是实数(因为 e_r', e_s', 1 是綫性独立)。因此有 u, v, u', v' 存在,且 v, $v'\neq 0$,将

$$\begin{aligned}&\{(e_r'+e_s')^2-u\}^2+v^2=0,\\&\{(e_r'-e_s')^2-u'\}^2+v'^2=0\end{aligned} \tag{1.2}$$

两边相加,再整理之,得

$$-4-2(u+u')e_r'-2(u-u')e_s'+u^2+v^2+u'^2+v'^2=0.$$

由于 e_r', e_s', 1 为綫性独立,故它們的系数为0,所以

$$u=0, \quad u'=0, \quad v^2+v'^2=4.$$

若 v, $v'\neq 0$, $v^2+v'^2=4$,则有

$$0<v^2<4. \tag{1.3}$$

更由于 $u=0$,故由(1.2)有 $(e_r'+e_s')^2+v^2=0$. 由此去掉括弧得

$$-2+(e_r'e_s'+e_s'e_r')+v^2=0.$$

故
$$e_r'e_s'+e_s'e_r'=2-v^2.$$

再由(1.3)有

$$0\leqslant(e_r'e_s'+e_s'e_r')^2<4. \tag{1.3'}$$

由此命

$$e_1''=e_1'=1,\ e_2''=e_2',\ e_\nu''=x_\nu e_2'+y_\nu e_\nu'\ (\nu=3, 4, \cdots, n), \tag{1.4}$$

适当的挑选实数 x_ν, y_ν ($y_\nu\neq 0$),使 e_1'', e_2'', $\cdots$, e_n'' 全是綫性独立,

且能够使

$$\left.\begin{array}{l} e_1''=1,\ e_2''^2=-1,\ e_3''^2=-1,\ \cdots,\ e_n''^2=-1, \\ e_2''e_\nu''+e_\nu''e_2''=0, \qquad \nu=3,\ 4,\ \cdots,\ n. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

把(1.4)代入(1.5),则由(1.3′)可以求出 x_ν, y_ν.

根据 (1.5) 当 $n\geqslant 3$ 时不能要求乘法的交换律。这是由于如果乘法的交换律成立,则有 $e_2''e_\nu''=0$,因而 e_2'', e_ν'' 至少有一个为 0,而这是不合理的。

一方面当 $n=2$ 时,因为 $e_1''=1$, 故有 $e_1''e_2''=e_2''e_1''$. 其他的数全部由(1.1) (用 e_1'', e_2'' 代替 e_1, e_2 后) 表示出来, 这时自然遵守乘法的交换律。

$n=2$ 时,这样的数叫做**复数**,习惯上常用文字 i 代替 e_2''.

因此, 全体的复数都可唯一的写成 $z=x+iy$ (这里 x, y 是实数) 的形状, x 叫做 z 的**实部**, y (或 iy) 叫做 z 的**虚部**, 分别用 $x=\Re z$, $y=\Im z$ 表示。特别地, 当 $x=0$ 时, z 叫做**純虚数**, i 叫做**虚数单位**。

因此,我們得出以下的定理。

定理 1 满足 $A_1\sim A_4$, $S_1\sim S_4$, D, $M_1\sim M_6$ 等 15 个公理, 并且服从乘法交换律($\alpha\beta=\beta\alpha$)的数系与复数一致。

2) **关于复数的四則算法** 在 1) 內我們已經知道复数可以表示成 $z=x+iy$ 的形状,其中 x, y 是实数。这里的 i 满足 $i^2=-1$. 現在把复数的四則算法写出来。命 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ 为两复数,

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$

$$z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \quad (z_2\neq 0).$$

为了計算的便利,还有所謂**共軛复数**。給定复数 $z=x+iy$, 和

它具有相同的实部、虚部只相差一負号的复数，即 $x-iy$ 叫做 $z=x+iy$ 的共軛复数，用 $\bar{z}$ 表示。

对于共軛复数与四則运算，有以下关系成立：

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2,\quad \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,$$

$$(\overline{z_1\cdot z_2})=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad (z_2\neq 0).$$

同时显然有 $(\bar{\bar{z}})=z$.

其次，有 $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$. 它叫做 z 的**模方**(norm)，用 $\mathrm{N}(z)$ 表示。$\sqrt{\mathrm{N}(z)}\ (\geqslant 0)$ 叫做 z 的**絕对值**用 $|z|$ 表示。关于此有以下的法則：

(I)　只当 $z=0$ 时，才有 $|z|=0$.

(II)　对于任意两个复数 z_1, z_2 有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{1.6}$$

(III)　对于任意两个复数 z_1, z_2 有

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|. \tag{1.7}$$

§2　复数的几何表示

1) Gauss 平面　复数几何表示的最簡单方法为規定平面上的直角坐标，平面上点 P 的坐标为 (x, y) 时，复数

$$z=x+iy$$

即用 P 点表示。由此坐标原点 O 与 $z=0$ 对应，x 軸表示实数，y 軸表示純虚数。因此，x 軸也叫做**实軸**，y 軸也叫做**虚軸**。

这种方法虽在1806年由法人 Argand 发表，其实 Gauss 在1799年的学位論文中已經用到了，故現在叫做 Gauss 方法。表示复数(它与平面上的点一一对应)的平面被人們叫做 **Gauss 平面**，我們也采用这一称呼。

由以上方法，复数 $z=x+iy$ 不只可以看作是 Gauss 平面上的