线性整数规划的数学基础

马仲蕃 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助项目

线性整数规划的数学基础

马仲蕃 著

科学出版社

1995

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

本书系统地论述了整数规划的割平面理论和算法、混合整数规划的分解方法、组合规划和组合多面体方法、拟阵理论，以及下料、装箱、时间表、厂址选择、货郎等著名特殊整数规划问题，较全面地介绍了与整数规划有关的各种基本方法和最新进展．本书可作为运筹学、管理科学、应用数学、计算数学、系统工程等专业的大学生、研究生的教材或教学参考书．

线性整数规划的数学基础

马仲蕃 著

责任编辑 徐宇星

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1995 年 2 月第一次印刷 印张：9 3/4

印数：1—1 500 字数：257 000

ISBN 7-03-003943-2/O · 687

定价：13.50 元

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

引　言

这是一本线性整数规划方面的数学基础书．其中介绍了单纯形算法和它的列生成、分解、松弛技巧；整点凸包、割平面理论和割平面算法；网络流和网络单纯形算法、截集树和最小奇截集；拟阵最优基和最优交算法、拟阵多面体；匹配多面体、2-匹配多面体、奇集不等式、梳子不等式；线性规划对偶理论、非负矩阵对偶理论、组合对偶和全对偶整数性；以及集合分解、集合覆盖、厂址选择、背包、货郎等著名的整数规划问题．本书包含了线性规划、组合规划和整数规划中的一些最基本的定理．我们期望它将来能被各理工科院校和各师范院校用作运筹学和线性代数方面的补充教材．阅读本书只需具备数学分析和线性代数的基本知识，各章节的内容以及所用的数学符号，都是比较独立的，因此，读者也可以随意挑选其中感兴趣的章节阅读．

第一章扼要地介绍了线性规划的理论和方法．这是以后各章的基础．

线性规划问题是一个特殊的条件极值问题：寻求一个定义在（n 维线性空间中的）凸多面体

$$\{x \mid x \in R^n, Ax \leqslant b\}$$

上的多元线性函数 cx（通常称作目标函数）的最大（或最小）值．其中 A, b, c 为给定的 $m \times n, m \times 1, 1 \times n$ 的有理数矩阵，R^n 表示有理数域上的 n 维线性空间．

顶点、棱和边界面是凸多面体的三个基本的几何概念．在线性规划问题中，每个（不是多余的）约束条件，对应于（n 维线性空间中的）凸多面体的一个边界面．用代数语言描述的基本允许解和极方向对应于凸多面体的顶点和棱的方向．大家都知道，线性

方程组

$$Ax = b$$

的通解可表示为如下的形式

$$x = x^* + \sum_i \beta_i y^i,$$

其中 x^* 是方程组的任意一个特解，$\{y^i\}$ 是对应的齐次方程组

$$Ay = 0$$

的基本解系.线性不等式组:

$$Ax \leqslant b$$

的通解,也可类似地表示为如下的形式:

$$x = \sum_i \lambda_i x^i + \sum_j \mu_j y^j,\ \lambda_i, \mu_j \geqslant 0,\ \sum_i \lambda_i = 1,$$

其中 $\{x^i\}$ 是多面体的所有顶点，$\{y^j\}$ 是对应的齐次不等式组

$$Ay \leqslant 0$$

的基本解系,在线性规划中,被称作极射向.

线性规划的一个基本性质是:假如目标函数的最大值存在,则必可在基本允许解上达到. 单纯形方法的思路是从某个基本允许解出发,沿着极方向，从一个基本允许解走到另一个基本允许解，使对应的目标函数值不断改进,最后达到最大(或最小)值. 然而，困难就在于不一定每一次叠代都能使目标函数值得到改进. 在所谓"退化"的情形下，甚至有产生"死循环"的危险(参见第一章 §11 中的习题 6). 如何排除死循环,便是单纯形方法的重要理论部份. 书中介绍了两种排除死循环的方法: "小指标优先"(Bland 法则)和"字典序"(Dantzig 法则). 而字典序也是整数规划中的一个基本概念.

"列生成"、"分解"和"松弛"是单纯形方法的重要组成部分.正是由于应用了这些技巧，才能解决变量和条件都上万的大规模线性规划问题.

对偶定理是线性规划理论的核心部分.很多组合规划问题,往往必须依靠对偶定理来判别是否达到了最大值或最小值. 若把列

生成技术应用到对偶线性规划上，则对原来的线性规划问题而言，便是应用了松弛技术(或者，我们可以称其为“行生成”技术)。

因为本书主要想介绍单纯形方法和对偶理论在整数规划中的推广应用，不想涉及算法复杂性方面的内容。因此，如 Khachian 方法，Karmarkar 方法，以及单纯形方法的有效性的概率分析等方面，虽然都是标志着线性规划的最新进展，这里就不介绍了。

第二章介绍了线性整数规划的割平面理论和方法。

人们常常用 0,1 变量来表示取与舍，开与关，有与无等逻辑关系。例如对事件 j，用 $x_j=1$ 表示事件发生；$x_j=0$ 表示事件不发生。那末，条件

$$\sum_j x_j \leqslant 1,\ \text{所有}\ x_j\ \text{取}\ 0\ \text{或}\ 1$$

表示最多有一事件发生。条件

$$\sum_j x_j \geqslant 1,\ \text{所有}\ x_j\ \text{取}\ 0\ \text{或}\ 1$$

表示至少有一事件发生。条件

$$\sum_j x_j = 1,\ \text{所有}\ x_j\ \text{取}\ 0\ \text{或}\ 1$$

表示恰好有一事件发生。条件

$$x_i - x_j = 0,\ x_i\ \text{和}\ x_j\ \text{取}\ 0\ \text{或}\ 1$$

表示事件 i 和 j 同时发生或同时不发生。条件

$$x_i \leqslant x_j,\ x_i\ \text{和}\ x_j\ \text{取}\ 0\ \text{或}\ 1$$

表示只有在事件 j 发生后，i 才有可能发生。

假设

$$P_1 = \{x \mid x \in R^n, A'x \leqslant b'\},$$
$$P_2 = \{x \mid x \in R^n, A''x \leqslant b''\},$$

那末，和集 $P_1 \cup P_2$ 可表示为如下的形式

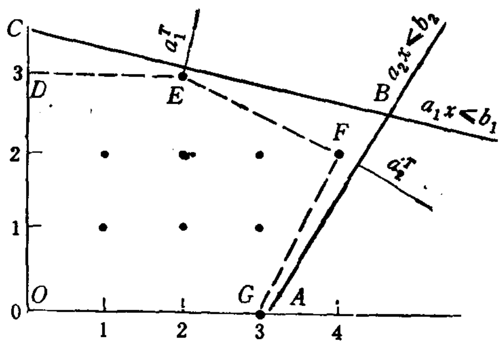
$$A'x \leqslant b' + w(1-\bar{x}_1),$$
$$A''x \leqslant b'' + w(1-\bar{x}_2),$$
$$\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \geqslant 1,$$

其中的 $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ 是 0,1 变量，w 是一个分量都足够大的向量。

线性整数规划是一类要求全部变量取整数值的线性规划问题：

$$\max \; cx$$

满足 $Ax \leqslant b$，x 是非负整数向量。只要求一部分变量取整数值的线性规划问题，称为线性混合整数规划问题。当所有的整数变量都取 0 或 1 时，则称其为 0,1 规划问题。因此，线性整数规划问题的定义域是所有分量为整数的允许解（即某个多面体中的"整点"）。如上图所示。



线性整数规划中的一个最基本的概念是"整点凸包"，即包含所有整数允许解的最小的凸多面体。如图中的 $ODEFGO$。假如我们能写出整点凸包的不等式条件，那末，只要在整点凸包上，应用单纯形方法求线性规划问题的基本最优解，便可得到整数规划问题的最优解。寻求整点凸包的边界面，是整数规划中的一个核心问题。一般地说，要完整地写出整点凸包的边界面，是非常困难的。但是，从计算角度，假如我们应用了松弛技术，那末，实际上只需写出一部分边界条件就足够了。

考虑整数规划问题：

$$\max\{cx \mid x \in P\},$$

其中

$$P = \{x \mid Ax \leqslant b,\ x \text{ 是整数向量}\}.$$

假设 P 的凸包为：

$$(P)^{\Delta} = \{x \mid E_j x \leqslant d_j, j \in J\},$$

那末，上述整数规划问题等价于如下的线性规划问题：

$$\max\{cx \mid E_j x \leqslant d_j, j \in J\}.$$

假设我们已有 J 的一个子集 R，使得松弛问题

$$\max\{cx \mid E_j x \leqslant d_j, j \in R\}$$

有最优解．并且,不妨可设,运用单纯形算法，求得的最优基为

$$B = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix},$$

最优解为 $x^* = B^{-1}d$，其中

$$d = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

假如 x^* 是整数向量,且使 $Ax^* \leqslant b$，那末，x^* 便是我们所考虑的整数规划问题的最优解．相反,必存在某个 $s \in J \backslash R$，使得

$$E_s x^* > d_s.$$

运用对偶单纯形算法,以 s 为旋转行,可确定旋转列r,$1 \leqslant r \leqslant n$.
定义:

$$\bar{R} = (R \backslash \{r\}) \cup \{s\}.$$

用 $\bar{R}$ 代替 R，继续考虑新的松弛问题:

$$\max\{cx \mid E_j x \leqslant d_j, j \in \bar{R}\}.$$

从理论上说,反复进行上述过程,必能找到整数规划的最优解．关键之处是如何找出使 x^* 不满足的凸包面

$$E_s x \leqslant d_s.$$

这是一个大家注目的难题.

1958 年，R. E. Gomory 首先提出了"割平面"的概念，建立了割平面算法,从而使整数规划逐步形成为一个独立的分支.

考虑整数规划问题的约束条件:

$$S = \{x \mid Ax \leqslant b, x \geqslant 0, x \text{ 是整数向量}\}.$$

若有一行向量 $u \geqslant 0$，使得 uA 是一个整数向量，ub 不是整数，那末,容易看出:

$$x \in S \Rightarrow (uA)x \leqslant \lfloor ub \rfloor.$$

其中符号 $\lfloor r\rfloor$ 表示不超过 r 的最大整数。这时的条件

$$uAx \leqslant \lfloor ub\rfloor$$

就称为 S 的一个割平面。

函数 $f: R^m \to R^1$，若满足：

$f(d_1) + f(d_2) \leqslant f(d_1 + d_2)$（对任意的 $d_1, d_2 \in R^m$），

则称 f 是一个超加（Superadditive）函数。函数 f 若满足：

$f(d_1) \leqslant f(d_2)$（对任意的 $d_1 \leqslant d_2$），

则称 f 是一个非降函数。

设 $A = (P_1, \cdots, P_n)$，$P_j \in R^m$。设 f 是一个非降的超加函数，则有关系

$$x \in S \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} f(P_j) \leqslant f(b).$$

这是一类更广泛的割平面。可以证明，S 的整点凸包的任何边界面，都可用上述方法生成.关键是如何找出适当的非降超加函数。

Gomory 的割平面算法也是一种松弛方法。用一系列松弛线性规划问题的最优解去迫近整数规划最优解。他巧妙地利用了单纯形表中的系数，不断地生成具有上述性质的向量 $u \geqslant 0$，从而生成一系列的割平面：$uAx \leqslant \lfloor ub\rfloor$，使得加上这些割平面条件后，整数规划问题就化为一个等价的线性规划问题. Gomory 的割平面算法，能保证在有限步内求得整数规划最优解。理论上是很精美的，但是，实际计算时，往往效果不很好。这是因为 Gomory 割平面不一定是整点凸包的边界面。1979 年，M. Grötschel 和 M. W. Padberg 等人，对一些特殊的整数规划问题，例如货郎（Travelling Salesman）问题和背包（Knapsack）问题等．提出了一种新的割平面算法，效果较好。它的特点是所加的割平面大都是凸包的边界面。

第三章介绍了线性混合整数规划的几种基本算法：Gomory 割平面算法、Benders 分解算法、拉格朗日松弛法、以及一般的分枝估界法。Benders 分解法和拉格朗日松弛法之间有其内在的联

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

系，是互为对偶的方法．它们巧妙地利用了线性规划的对偶理论、分解原则和松弛方法．这些算法是整数规划计算方法中很重要的部分．这些方法已经在场址选择等问题中得到了较好的应用．

第四章介绍了图上的一些特殊的线性组合规划问题．这是一些能够完整地写出它的整点凸包的0,1规划问题． 可以认为，它们是属于线性规划和整数规划之交．这些组合问题本身也是图论和组合最优化中的著名问题．然而，在这里，我们只涉及与线性规划对偶理论和整点凸包有关的内容．

在§1,2两节中，首先介绍了图论中有关的基本概念，说明图的很多基本参数都可叙述成0，1规划问题． 特别地，当图的关联矩阵是全单位模矩阵时（矩阵中任何阶子行列式的值为0，1或－1），例如当图是二部图时，则图的很多参数，可直接写成线性规划问题．这时，它的所有基本允许解都是0,1解，因此，这时的约束条件本身便是一个整点凸包．

§3中介绍了匹配问题的整点凸包，即著名的 J. Edmonds 多面体．这是一个能够完整地写出整点凸包的整数规划问题．匹配问题整点凸包的边界条件是一些“奇集”不等式，这些不等式可以利用最小截集算法生成．

§4中介绍了2-匹配问题的整点凸包． V. Chvátal 称它的边界条件为“梳子”不等式．这些不等式也可以利用最小截集算法生成． 后来，M. Grötschel 和 M. Padberg 等人把梳子不等式的概念，成功地推广应用到了货郎问题，取得了惊人的效果．

§5中介绍了一类特殊的0,1矩阵，叫做均衡矩阵（Balanced Matrices)，它是全单位模矩阵的一种推广．若A是一个m行n列的均衡矩阵，则约束条件

$$\{x \mid Ax = \mathbf{1}, x \geqslant 0\}$$

的所有基本允许解都是0，1解（其中的$\mathbf{1}$表示分量都为1的向量），并且具有如下整数形式的对偶定理

$$\max\left\{\sum_{i} w_i x_j \mid Ax \leqslant \mathbf{1},\ x\text{是非负整数向量}\right\}$$

$$=\min\left\{\sum_i y_i \mid yA \geqslant w,\ y\text{是非负整数向量}\right\}$$

(其中的 $w=(w_1,\cdots,w_n)$ 是任意给定的非负整数向量).

§6 中介绍了 D. R. Fulkerson 建立的,反映非负矩阵对偶性的 Block 和 Antiblock 理论. 从几何角度讲,它是研究一类凸多面体的点、面对偶性. 这里,我们根据所含的内容,称其为非负矩阵的配偶理论,它是线性规划对偶理论的应用和发展. 例如,对非负矩阵

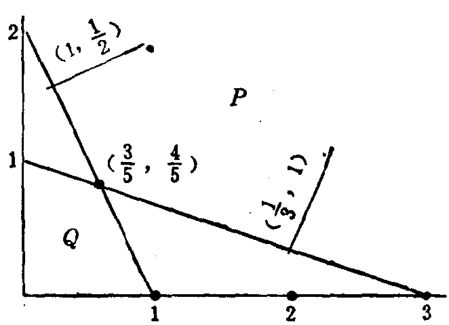
$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

可以定义两个多面体

$$P=\{x \mid Ax \geqslant 1, x \geqslant 0\}$$

和

$$Q=\{x \mid Ax \leqslant 1, x \geqslant 0\}.$$



如左图所示: P 的所有顶点为 $(3,0)$, $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $(0,2)$; Q 的所有顶点为 $(1,0)$, $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$, $(0,1)$. 分别以 P 和 Q 的顶点为行,可得非负矩阵:

$$B=\begin{pmatrix}3, & 0\\ \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}\\ 0, & 2\end{pmatrix}\text{和 } F=\begin{pmatrix}1, & 0\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

称 B 为 A 的外配偶 (Block), F 为 A 的内配偶 (Antiblock). 假

如我们再考察多面体

$$\{x \mid Bx \geqslant 1, x \geqslant 0\}$$

和

$$\{x \mid Fx \leqslant 1, x \geqslant 0\},$$

就会发现它们的顶点便是A的行. 因此,外(内)配偶的外(内)配偶便是其本身. 当A是一个具有某种性质的0,1矩阵时,(例如当A是均衡矩阵时),则外(内)配偶 $B(F)$ 也都是0,1矩阵. 由此,可导出图论中很多著名的极大极小定理.

在这一章的§7中,我们还简单地介绍了"全对偶整数性"(T.D.I.)这一较新的概念. 它是全单位模性的一种推广. 有很多组合对偶定理,可以通过全对偶整数性来得到证明.

第五章介绍了网络流和网络单纯形算法. 求网络的最小截集的算法(即最大流算法)是线性规划、图论、组合最优化和整数规划等学科共同的基本方法. 是其他很多算法的基石.

§1 中主要是利用线性规划对偶定理来证明: 网络的最大流量等于网络的最小截量.

§2 中介绍了求最小循环流的线性规划原始、对偶算法 (Out-of-kitter Method).

§3 中介绍了 R. E. Gomory 和 T. C. Hu 提出的截集树的基本概念.

§4 中介绍了利用截集树求最小奇截集的 V. Chvátal 方法.

§5 中介绍了网络单纯形算法以及旋转列的选取规则.

§6 中综合应用全对偶整数性和非负矩阵的配偶性,证明了图论中一系列的组合对偶定理.

第六章介绍了拟阵 (Matroid) 在组合规划中的应用. 很多形式上十分不同的组合问题,可以统一地用拟阵的数学模型来描述;很多形式上不同的组合算法,也都可统一地用拟阵交算法来描述. 已经能够完整地写出拟阵的独立集凸包(简称拟阵多面体)和两个拟阵的独立集之交的凸包(简称拟阵交多面体).

第七章介绍了三个基本的整数规划问题.

集合覆盖 (Set Covering):

$$\min\{cx \mid Ax \geqslant 1, x \text{ 是 } 0,1 \text{ 向量}\};$$

集合剖分 (Set Partition):

$$\max\{cx \mid Ax = 1, x \text{ 是 } 0,1 \text{ 向量}\};$$

集合组装 (Set Packing):

$$\max\{cx \mid Ax \leqslant 1, x \text{ 是 } 0,1 \text{ 向量}\}.$$

其中 A 是一个 0,1 矩阵,1是分量都为 1 的向量. 一般地说，我们很难完整地写出这些问题的整点凸包的边界面. 多面体

$$P = \{x \mid Ax = 1, x \geqslant 0\}$$

中,虽然可能有一些顶点不是 0,1 解,但是，对任意的 0,1 解 x^0,必存在 0,1 解序列:

$$x^0 = x^1, x^2, \cdots, x^k = x^*,$$

使得:

(i) x^i 和 x^{i+1} 是 P 的两个相邻的顶点,而 x^* 是集合剖分问题的最优解;

(ii) $cx^i \leqslant cx^{i+1}, i = 1, \cdots, k-1.$

因此，我们有希望能在多面体 P 上直接应用单纯形算法求整数规划的最优解,但是,至今尚未实现. 这里，只介绍了集合覆盖问题的一个特殊的割平面算法.

第八章介绍了著名的背包问题.也有人称它为一维下料问题:

$$\max\left\{\sum_j c_j x_j \,\middle|\, \sum_j a_j x_j \leqslant w, \ x_j \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1\right\}.$$

§1 中介绍了它的整点凸包的一类边界面. 这是一类很有效的割平面.

§2 中介绍了背包问题的递推函数法(即动态规划方法)、最短路方法、以及针对大规模问题的近似算法. 另外,还简单地介绍了 Abel 群上的背包问题.

第九章介绍了著名的货郎问题. 它是和整数规划的发展紧密联系在一起的.

1954 年，G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson 和 S. M.

Johnson 在研究货郎问题的算法时，首先提出了“子圈”(Subtour)条件，这是割平面的萌芽．同时，他们也提出了分解成几个子问题之和的思想．这是分枝估界法的萌芽．

1960 年，A. H. Land 和 A. G. Doig 首先提出了货郎问题的分枝估界法．后来，它迅速地发展成为整数规划的一般解法．

1979 年，M. Grötschel 和 M. W. Padberg 等人，首先证明了子圈不等式和梳子不等式都是货郎问题整点凸包的边界面条件．以这些条件作为割平面，用新的割平面方法，找到了过 120 个点的货郎问题的最优解（它是一条通过联邦德国 120 个城市的最短旅游路线）．这是一个被人们研究了十几年的实际问题．

第一章 线性规划

§1 基本概念

线性规划问题的标准形式为

$$\text{求}\ \max\ x_0=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1}$$

满足条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\cdots,m, \tag{2}$$

$$x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n. \tag{3}$$

其中的 c_j, a_{ij}, b_i 都是已知的实数，x_j 是未知量．(1) 称为目标函数，(2)和(3)称为约束条件．满足方程组(2)的解 $\{x_1,\cdots,x_n\}$，若同时又满足条件(3)，则称其为允许解．使目标函数 x_0 的值达到最大的允许解，称为最优解．利用向量和矩阵的符号，记

$$c=(c_1,\cdots,c_n),$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}), i=1,2,\cdots,m,$$

$$P_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},\ j=1,2,\cdots,n,$$

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com