

用有限元方法确定涡轮机 枞树型叶根的合理结构

俞茂铮 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书在分析涡轮机枞树型叶根结构设计要点的基础上，介绍采用有限元方法分析此类叶根及叶轮轮缘应力状态的主要结果，以及由此得出的对叶根合理结构设计的建议。书中结合叶根及轮缘的应力分析，着重在物理意义上较系统地叙述了具有多对称轴旋转元件平面应力的有限元分析方法。书末附有计算程序和使用说明。

本书可供有关专业工程技术人员及高等院校师生参考，所述有限元方法及程序还可供其它方面人员参考。

用有限元方法确定涡轮机 枞树型叶根的合理结构

俞茂铮 编著

*

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₃₂ 印张2¹/₂ 50千字

1978年12月第一版 1978年12月第一次印刷 印数：0,001—4,300册

统一书号：15034·1737 定价：0.22元

(限国内发行)

前 言

涡轮机叶片的叶根与叶轮轮缘直接承受叶片的离心力载荷，其强度性能涉及整台机组的运行安全，因此改善叶根与轮缘强度特性是提高涡轮机结构强度的重要方面。

在各种叶根型式，轴向插入式枞树型叶根，由于其结构及强度上的优点，被广泛采用在燃气涡轮、高转速工业汽轮机及大功率汽轮机调节级和末级的叶片上。此类叶根要承受巨大的叶片离心力载荷（大功率汽轮机末级的单个叶片离心力可达 200 吨以上），并在齿根过渡区域产生相当大的应力集中。在生产实践中，常发生由于结构设计不合理所引起的枞树型叶根和轮缘断裂事故^(1~4)，因而对枞树型叶根与轮缘的结构合理设计与改进引起了广泛的注意。

枞树型叶根与轮缘工作时的应力状态甚为复杂，以往大多采用材料力学方法作近似的强度计算，或利用光弹性方法作实验应力分析，然而材料力学方法不能精确分析叶根应力状态，因此应用该法研究叶根结构的改进有许多困难；静止模型的光弹试验法因不能考虑叶根部分的离心体积力影响，且难以精确模拟轮缘部分的工作条件，故所得结果有一定局限性。此外，光弹试验模型的加工周期较长，试验数据的整理亦较麻烦。国外虽然也有采用旋转的光弹试验模型进行研究的，但设备复杂，太费工时，因此提出了用有限元法进行应力分析的方案，该方法能较精确而又迅速地分析叶根与轮

缘的应力状态，确定主要结构参数（齿工作面倾角、齿数及齿槽圆弧半径等）的影响，找出对叶根及轮缘应力状态都比较有利的叶根结构型式。

由于电子计算机应用技术的发展以及有限元方法的有效性，有限元方法已日益成为结构分析的有力工具。由于轴向插入式枞树型叶根和轮缘的截面面积沿轴向变化不大，因此其应力状态很适宜作为平面应力问题用有限元方法分析。径向截面为弧形或菱形的枞树型叶根也可用同一方法作近似处理。

枞树型叶根与叶轮是一多齿配合的组件，叶片离心力载荷在各齿上的分配与各齿型的结构、制造、安装以及叶轮运行状态等许多因素有关。可能出现多种情况，因此本书在进行叶根和轮缘的结构分析比较时，将叶根和叶轮各自作为单独的元件考虑，采用一种可作刚度矩阵坐标变换并考虑旋转离心体积力的平面应力有限元分析程序，对轴向枞树型叶根及轮缘的应力状态进行分析研究，对如何选择此类叶根及轮缘的合理结构得出一些结论，这些结论与现有的光弹试验结果作对比也取得一致，这说明上述分析方法及所得结果可供设计人员使用。

采用本书所述有限元方法，能较精确地确定叶根及轮缘的应力状态，同时也能较迅速、方便地改变外力边界条件及结构参数，分析它们对叶根强度特性的影响，从而迅速确定合理的结构方案，缩短设计及试验周期，节省试验费用，在一定程度上可代替费用昂贵的旋转模型试验。本方法的优点是计算程序比较简单，应用方便，一般工程技术人员容易掌握；对确定叶根及轮缘的合理结构设计具有实效；也能进一

步用来研究摩擦力对叶根强度特性的影响。但本书所介绍的这一方法还存有一定的局限性，因为它将叶根与叶轮作为单独的元件处理，因而就不能确定齿工作面上的载荷分布，也不能分析齿的配合间隙对载荷分配的影响。如果用有限元方法分析这一问题，就得将叶根与叶轮作为一个组件——一个整体来考虑，把叶根与轮缘各齿的相互作用作为弹性接触应力问题处理，这将使计算方法和过程复杂化^[9]。从这些方面来看，采用有限元方法也不排除光弹应力分析及实物试验相辅相成的作用，两者相互配合，可使问题得到全面解决。

本书共分三章。第一章讨论枞树型叶根结构参数的确定方法，分析主要结构参数对受力状态的影响及选择原则。第二章介绍枞树型叶根及轮缘应力状态的有限元分析法的特点，讨论了计算精度。为了叙述方便，并使具有矩阵运算及弹性力学基本知识的读者能直接阅读程序，本章还特地在物理意义上，说明平面应力问题有限元分析法的基本概念，引出了主要计算公式，这些公式的详细推导，可参阅资料[16, 17]。第三章就两种典型结构的枞树型叶根及轮缘在不同受力边界条件下的应力状态作了分析比较，并讨论了叶型部分离心力载荷在叶根上的作用区域对叶根应力状态的影响。在此基础上，对枞树型叶根及轮缘的合理结构设计提出了几点建议。最后在附录中给出了计算程序和使用说明。

本书系在资料[5]的基础上整理补充写成，由于作者水平有限，上述工作也是初步的，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

目 录

第一章 枞树型叶根的结构分析及结构参数的选择	1
§ 1-1 结构分析	1
§ 1-2 齿工作面倾角、齿数及齿槽圆弧半径的选择	4
第二章 枞树型叶根及轮缘应力状态的有限元分析法	9
§ 2-1 基本概念	9
§ 2-2 主要计算公式	15
§ 2-3 位移边界条件及刚度矩阵坐标变换	23
§ 2-4 等效节点的外力推算及坐标变换	28
§ 2-5 计算精度的讨论	34
第三章 叶根及轮缘的应力分析与结构比较	39
§ 3-1 结构方案的选择与外力边界条件的处理	39
§ 3-2 应力计算结果的分析	43
§ 3-3 合理设计枞树型叶根及轮缘的几点意见	51
附录 具有多对称轴旋转元件平面应力分析程序及其使用 说明 (DJS-14 型计算机)	54
参考资料	73

第一章 枞树型叶根的结构分析 及结构参数的选择

§ 1-1 结 构 分 析

枞树型叶根在强度性能上的主要优点是它能利用各对齿逐对承担叶片离心力载荷同时逐步缩小齿根截面，从而充分利用材料强度，减小叶根及轮缘的尺寸，因此这种叶根型式主要用在叶片离心力载荷较大或要求能从轴向拆换叶片的涡轮级上。

根据现有的涡轮损坏事故资料分析^[1-3]，这类叶根及轮缘的损坏原因不外乎两种：一种是在齿根应力集中处由于交变应力所引起的疲劳断裂；另一种是由于单个齿的强度储备较少，当枞树型齿在制造、安装、运行及设计过程中由于种种其它疏忽原因而使载荷集中在少数齿上时，便会引起这些齿的断裂。所以从强度观点来看，枞树型叶根及轮缘的结构设计不应仅限于能使按材料力学方法算得的平均应力满足强度的要求，而且要尽量减小齿根过渡处的应力集中系数，并希望每个齿有较大的强度储备。降低应力集中系数，这对高温条件下工作的燃气涡轮叶片来说，更显得重要，因为应力集中区域的材料在高温条件下会产生脆性断裂，形成缺口并迅速引起叶根进一步的疲劳断裂^[8]。

要合理设计枞树型叶根，首先要找出对齿的强度及应力

集中最有影响的结构参数。图 1-1 标出了枞树型叶根的各结构参数，其中某些结构参数主要是由涡轮级的结构及工作要求确定，其变动范围是有限的。例如，作为叶型部分与叶根部分过渡区域的台肩，其宽度尺寸 t 取决于根部叶型形状及叶栅节距。台肩厚度 δ 取得大些，可减少过渡区域应力不均匀分布对叶根工作的不利影响，但是 δ 太大，会过分增加叶根承受的离心力，所以 δ 一般与叶片的尺寸有一相应比例。又如叶根楔角 φ 的选择应使叶根与轮缘各齿槽颈部截面的强度条件相差不太大，以充分发挥枞树型叶根的优点。 φ 角通常选在 $25^\circ \sim 35^\circ$ 范围。 φ 角在这个范围内变化，对载荷在各齿上的分配及叶根的应力分布不产生显著影响⁽¹⁰⁾。尺寸 A 与叶轮及叶片材料强度差别有关，选择时应使叶根的危险截面强度条件与轮缘的近乎相同。由于叶根工作条件比叶轮的差，

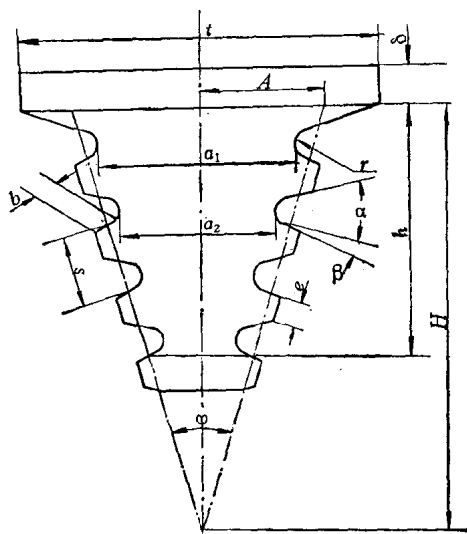


图1-1 枞树型叶根的结构参数

通常可考虑使叶根危险截面的应力比叶轮的稍小些。 A 及 φ 确定后,则得 $H = A / \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ 。选择与叶根高度有关的尺寸 h 时,应注意要保证叶根最下部齿槽颈部截面的强度。 h 的数值主要取决于叶片离心力载荷的大小。总之,以上这些尺寸虽然相互间可作一定调整,但对特定的涡轮级来说,选择范围是不大的。

叶根上单齿的某些结构参数可用材料力学的强度校核方法得出。如齿工作部分的宽度 b 可根据许用挤压应力确定。齿的非工作面斜角 α 及齿侧面高度 e 的选择要满足齿的各个截面的剪切强度。这些截面上的平均切应力 τ 与截面方向有关。由图 1-2, 根据力的平衡条件可得

$$\tau = \frac{P}{B} \frac{\sin \theta}{l} \quad (1-1)$$

式中 P ——齿工作面上作用力的合力;

B ——齿的轴向厚度。

由上式可知最大的平均切应力 τ 与 $\frac{\sin \theta}{l}$ 的最大值相对应,而后者与尺寸 e 及角度 α 的选择有关。

在上述各种条件限制下,要加强齿的强度和减小齿根的应力集中,关键是恰当选择齿工作面倾角 β 、齿距 s 及齿槽的圆弧半径 r (特别是第一齿槽的 r)。由于尺寸 h 基本上已

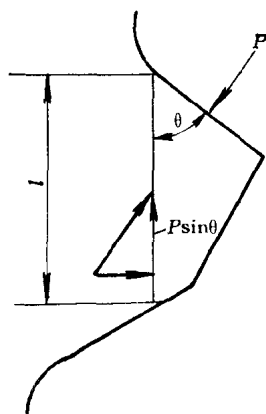


图1-2 单齿的切力平衡

定，因此尺寸 s 及 r 主要由齿数 z 的选择而定。要合理设计叶根，就要充分了解这些结构参数对齿的受力状态、应力集中及齿强度的影响。

§ 1-2 齿工作面倾角、齿数及齿槽圆弧半径的选择

以往采用材料力学方法校核叶根强度时，曾忽略作用在叶片上的气流力，并假定叶片的离心力载荷是均匀分配在各齿上的，然后逐一校核各齿槽颈部截面的拉伸应力，再把齿当作梁校核齿根的弯曲应力，并核算齿根截面的平均剪切应力及齿工作面的挤压应力。这种校核方法不能精确分析齿工作面倾角 β 、齿距 s 及齿槽圆弧半径 r 对叶根应力状态的影响，因而也难以合理地选择这些结构参数。

倾角 β 对齿的弯曲强度有很大影响。从分析齿的受力状态可见，如加大 β 角，则由叶根受力的平衡条件可知，齿工作面上的法向作用力 P 将增大（见图 1-3）。如叶片离心力载荷在各齿上呈均匀分配，可得

$$P = \frac{\sum C_i}{Z \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \beta\right)} \quad (1-2)$$

式中 $\sum C_i$ ——叶片各部分离心力之和。

作用力 P 的增加，并不意味着齿的弯曲应力增大，因为增大 β 可以加强齿根强度，减小弯曲应力，但在数值上用材料力学方法很难确定。当 $\beta = 0^\circ$ 时（见图 1-4 a），齿的工作情况相当于一高梁，用梁的弯曲理论对齿根的弯曲应力作近似计算，似乎还有一定依据。而当 β 角有一定数值时，叶根的受力状态近乎两侧受压（见图 1-4 b），齿的应力分析就无

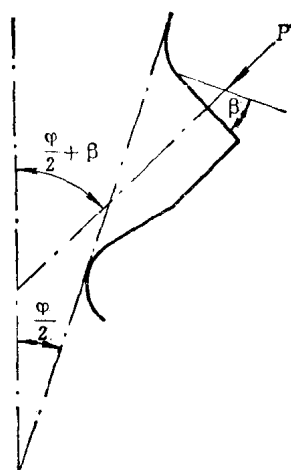


图1-3 齿工作上的
法向作用力

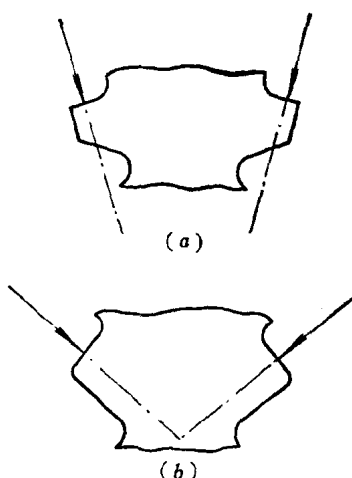


图1-4 不同 β 角时齿的
受力情况

(a) $\beta = 0^\circ$; (b) $\beta = 22.5^\circ$ 。

从下手，所以选择最佳的 β 角只能借助于光弹应力分析或有限元方法。

另外，从应力集中角度来看，根据一般的试验资料，加大 β 角对应力集中也有影响^(7,10)，这是因为 β 角与齿上作用力方向及齿根过渡曲线形状有关。由于试验结果多是反映各种因素对应力集中影响的综合效应，所以定量的数据难以确定。

齿数的选择一般取决于叶片离心力载荷的大小及涡轮级的结构尺寸，但也与 β 角有关。 β 角增大，由式(1-2)可知，单齿工作上的法向作用力 P 亦增大；如要保证各齿有一定的抗剪切及抗挤压强度，就得适当增大齿距 s 及齿工作面宽

度 b ，齿数则要相应减少，而减少齿数又使单齿上的作用力 P 进一步增大。可见，采用加大 β 角来增强齿根强度的措施是要以有精确的应力分析手段为前提的。过去由于对齿根的复杂应力状态缺乏定量的分析，只按材料力学方法作近似强度校核，枞树型叶根结构的 β 角取得过小，因而齿数相对来说取得就比较多，有时甚至片面地以增加齿数的办法来提高叶根的承载能力。采用过多的齿数，反而带来许多不利影响，削弱了叶根强度。

首先，齿数过多，必然要减小齿距，因而齿槽的圆弧半径相对尺寸过小，增大了齿根处的应力集中系数。其次，齿数多了，在制造、安装及运行过程中，由于存在各种误差等原因容易引起各齿承受负荷不均的现象，这在齿数多、单齿强度相对减弱的情况下更为不利。另外从工艺制造角度来看，齿数太多也会带来许多不便。由此可见，在很小的 β 角条件下，选用过多的齿数并不一定有利。在这种情况下，如果减少齿数，同时适当加大齿工作面倾角 β 以加强单齿的强度，这样既能保证叶根的平均承载能力，又可降低应力集中并且也便于加工制造。

齿槽圆弧半径相对尺寸 $\frac{r}{b}$ 对齿根的应力集中有很大影响。根据资料〔7〕及〔10〕的试验数据， $\frac{r}{b}$ 由 0.3 增大至 0.6，可使应力集中系数降低 20% 左右。但是，确定齿槽圆弧半径相对尺寸 $\frac{r}{b}$ 的最佳数值是一个较复杂的问题，因为齿根的应力集中状态受许多结构的以及力学的因素的影响。从结构上来说， $\frac{r}{b}$ 变化对应力集中所产生的影响，与齿

的相对尺寸 $\frac{b}{s}$ 及 $\frac{b}{a}$ 所处的数值范围有关。此外，齿的形状及齿根过渡曲线的形状对应力集中也有影响。从力学的角度来分析，应力集中不但与因 β 角不同而引起受力状态的差异有关（图 1-4），而且又与相邻齿的受力状态有关。例如对叶根的第一齿槽来说，作用在台肩两侧的叶型部分的离心力与齿工作面上的作用力都是使齿槽部分产生正的弯应力（图 1-5 a），而对其它齿槽，情况就不一样（图 1-5 b）。齿槽上侧齿面的作用力是使齿槽部分产生负的弯应力，下侧齿面的作用力则引起正的弯应力，两者有相互抵消作用。如果再考虑到台肩部分的应力分布不均且要受到脉动气流力的影响，可以推想叶根第一齿槽处的工作条件要比其余齿槽苛刻得多，应力集中也会严重些。由以上所作分析可知，选择合适的齿槽圆弧半径相对尺寸 $\frac{r}{b}$ 是与叶根结构及受力条件有关，不能一概而论。同时还得注意，加大圆弧半径 r ，就得缩小齿槽颈部尺寸 a 或齿工作面的宽度 b ，所以选取齿槽圆

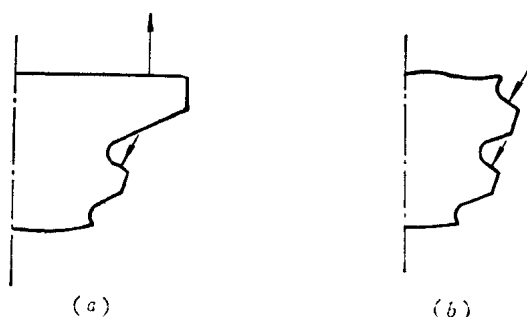


图1-5 齿槽两侧的受力情况

(a) 第一齿槽；(b) 下部齿槽。

弧半径尺寸时，还要受到齿槽颈部拉伸强度的及齿工作面挤压强度的限制。

一般说来，设计叶根时应考虑将第一齿槽的圆弧半径取得大些。在条件许可情况下，也可将台肩与第一齿的距离放长（图 1-6），以使台肩上作用力所引起的弯矩以及过渡区域应力分布的不均匀性对第一齿齿根应力状态所产生的影响减弱。同时由图 1-5 a 还可推想到，台肩宽度 t 与第一齿槽颈部尺寸 a_1 相差过大，这对第一齿槽处的应力状态也是不利的。

综上所述，在涡轮级的结构尺寸及工作条件已定的情况下，设计枞树型叶根时，必须先确定楔角 φ 及尺寸 A ，使叶根与轮缘各齿槽颈部截面的强度条件基本接近。在此基础上，要使叶根和轮缘有良好的强度特性，关键在于恰当选择齿工作面倾角 β 、齿数 Z 及各齿槽圆弧半径 r 等结构参数。

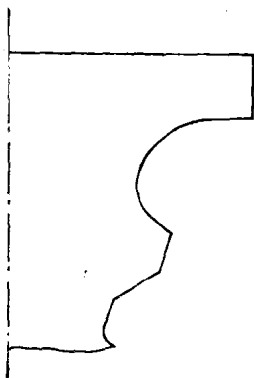


图1-6 第一齿槽通常的结构形式

在实际工作中，可根据具体条件选择不同的方案，然后作精确的应力分析的对比，并根据工艺、材料等其它方面的要求作出全面判断。此时，采用有限元方法进行应力分析就可充分利用它简便、迅速而又较精确的优点。

第二章 枞树型叶根及轮缘 应力状态的有限元分析法

§ 2-1 基 本 概 念

前面已经指出，枞树型叶根及轮缘的应力状态可作为平面应力问题处理。用有限元方法分析连续弹性体平面应力问题的实质，从物理意义上解释，就是先将连续弹性体的元件简化为由许多个尺寸有限小的单元弹性体所组成的结构件，这些单元在有限个连接点（节点）处相互连接，然后通过求解满足位移边界条件的各节点未知位移来确定单元的应变与应力（位移法）。

对平面应力问题来说，较简便且应用最广的方法是将弹性体划分为许多个三角形单元，弹性元件的边界由单元边线组成的折线逼近（图 2-1 表示了枞树型叶根一半区域的单元划分）。假定各单元间内力的作用是通过各单元的三个节点相互传递，外加载荷也是通过节点传递。邻接的三角形各边保持接触，但不传递力，这就好像许多个三角形平板在节点上用光滑的平面铰相互连接起来一样。构件模型在受到外加载荷作用时，其各节点将产生位移。为使这样的构件模型在各节点发生位移后，各单元边界的邻接处仍保持连续性，也就是要求在三角形平板变形后各邻接边界相互间不产生间隙或重叠（见图 2-2）。这不仅是为了符合连续弹性体的实际情况，

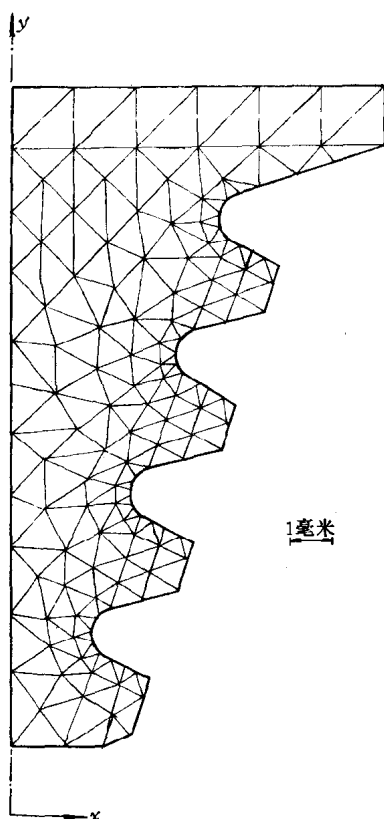


图2-1 枞树型叶根计算区域的单元划分

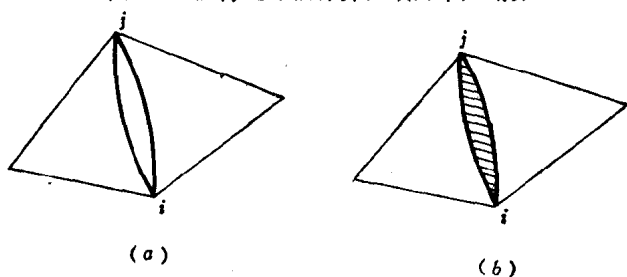


图2-2 单元邻接边界上产生间隙和重叠的情况

(a) 产生间隙; (b) 产生重叠。

也是每一单元各邻接边上不产生力的作用的条件。为此就得假定三角形单元上各节点产生的位移符合一定要求（位移模式），以满足单元的变形协调条件。对三角形平板单元（连续、均匀且各向同性）来说，如假定单元上各点 x 方向上的位移 u 及 y 方向

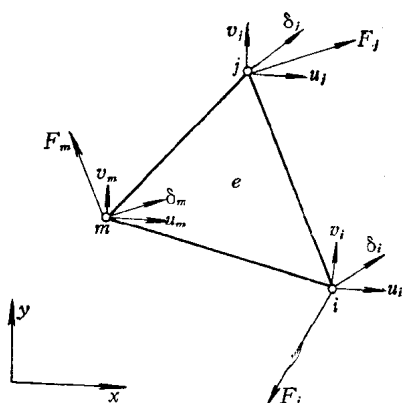


图2-3 单元上的位移向量及节点力向量

上的位移 v （图 2-3）为坐标 x 及 y 的线性函数，即可满足上述这一要求。这是因为两个相邻单元的邻接边（如图 2-2 的 ij ）上，两端节点 i 及 j 的位移 u_i 、 v_i 及 u_j 、 v_j 对两个单元来说是相同的（即铰的位移），而两个单元在 ij 边上任一点的位移都为坐标的线性函数，并且取决于节点 i 及 j 的位移，因此位移值相同。单元受力后就不会相互脱离，也不会相互挤撞，邻接边上也始终没有内力的传递作用。

单元上任一点的位移与坐标的一次函数关系可写成方程如下：

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ ——待定系数。

实际上，对每一个单元来说，节点坐标值为已知，所以只要知道三个节点的六个节点位移分量，就可求出 $\alpha_1 \sim \alpha_6$ 。现以图 2-3 的单元 e 为例，如果三个节点的六个节点位移分量