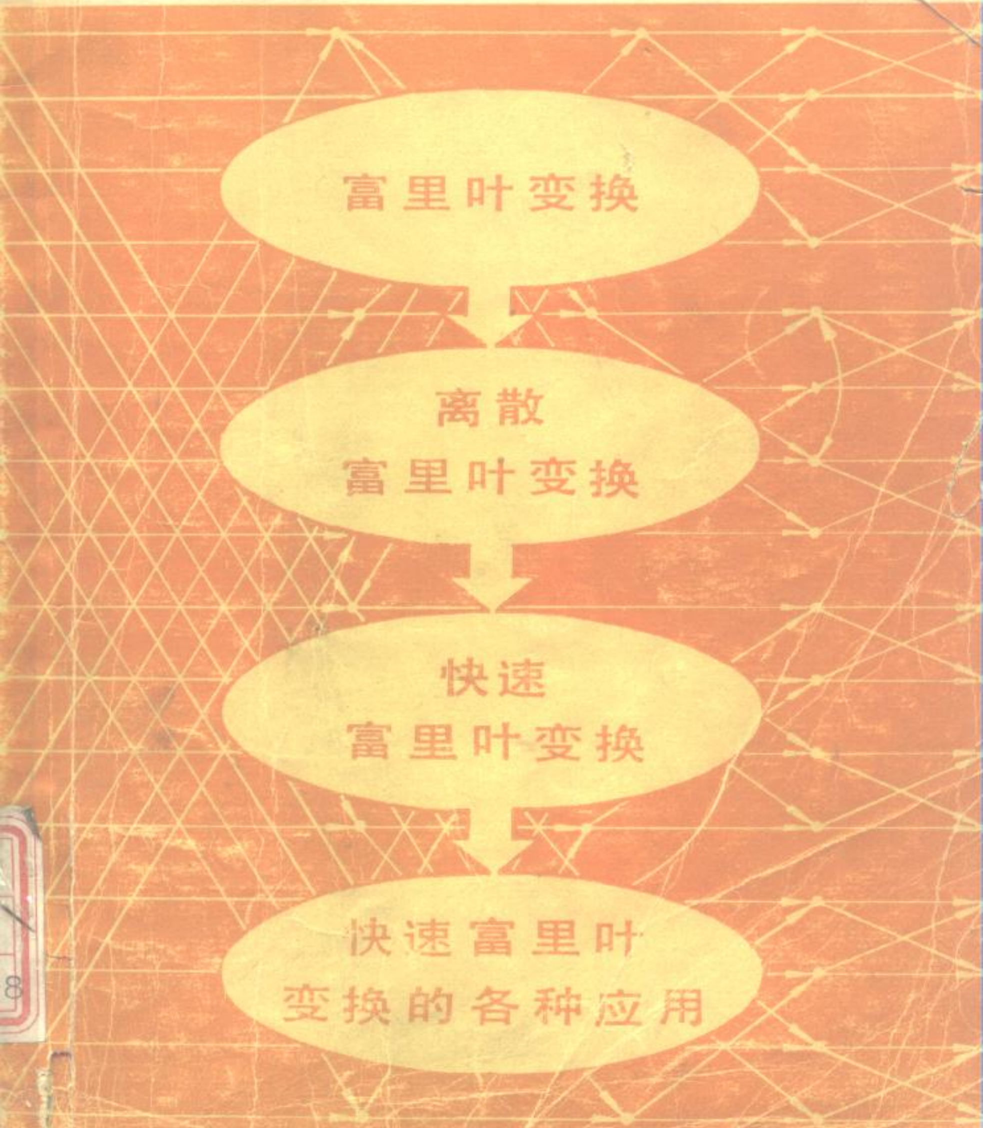
快速富里叶变换

E. O. 布赖姆 著

上海科学技术出版社



快 速 富 里 叶 变 换

E. O. 布赖姆 著

柳 群 译

上海科学技术出版社

THE FAST FOURIER TRANSFORM

By

E. O. BRIGHAM

快 速 富 里 叶 变 换

E. O. 布赖姆　著

柳　　群　译

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷

开本 787×1092 1/32　印張 9.25　字数 201,000

1979 年 3 月第 1 版　1979 年 3 月第 1 次印刷

印数 1—50,000

书号: 13119·753　　定价: 0.87 元

序

很久以来，富里叶变换一直是许多领域(诸如：线性系统、光学、概率论、量子物理、天线和信号分析等等)的一个基本的分析工具。不过，对离散富里叶变换来讲，却不尽然。即便使用计算速度惊人的现代计算机，计算离散富里叶变换所花费的时间也是太多了，因此，它的应用并不广泛。然而，由于快速富里叶变换(FFT——一种计算离散富里叶变换的有效算法)的出现，科学分析的许多方面有了完全的改观。

和导致重要技术变革的任何新发现一样，现在存在着一个普及快速富里叶变换基本知识的问题。人们期望能用与他的基础教育和实际经验相一致的方式来描述这种新技术。本书的主要目的就在于：为学生和实际专业人员提供一本关于FFT及其基本应用方面易读而又实用的论著。

本书并不是用推导的方式而是用描述的方式来向读者介绍有关课题。书中每一个主要的概念是通过下面三个步骤来逐渐深入的：第一，用直观的推导(一般用图解)引入概念；第二，用简要的(但理论上是完整的)数学分析，论证直观的推导；第三，用实际的例子，加深对概念的理解。我们认为，这三个步骤给出了FFT基本性质的涵义及其数学实质。

这本书对大专院校毕业生和实际科学工作者将是很适用的。作为教材，本书的内容很容易引入到诸如线性系统、变换理论、系统分析、信号处理、仿真、通信理论、光学及数值分析

的课程中去。而对实际的工程技术人员，本书可作为一本易读的 FFT 的入门书和标准的参考书。为了便于参考，书中一些主要的推导和计算都列成表格。

除了引言中介绍富里叶变换的概念和快速富里叶变换的发展历史外，本书实质上可分为四个主要部分。

一、富里叶变换

第 2 章至第 5 章是全书的基础。在这里我们研究了富里叶变换和它的逆变换，它们的基本性质，用图解说明这些概念的物理意义。因为褶积积分和相关积分的变换特性在 FFT 的应用中极为重要，因此，对它们作了详细的说明，并引用了大量的例子来帮助对概念的理解。为了后面章节的参考，我们用富里叶变换理论，引出富里叶级数和波形抽样的概念。

二、离散富里叶变换

第 6 章至第 9 章研究离散富里叶变换。我们采用图解说明，从连续富里叶变换导出离散富里叶变换，再用理论推导论证图解说明。详细讨论了离散富里叶变换与连续富里叶变换之间的关系，并用直观例子讨论了各种波形类。定义了离散褶积和离散相关，并将它们与连续量进行比较。最后，讨论了离散富里叶变换的性质，并用一系列的例子说明它的应用。

三、快速富里叶变换

在第 10 章至第 12 章，研究了 FFT 算法，对 FFT 算法为何是高效的，作了扼要说明。接着我们介绍 FFT 的信号流程图（FFT 的图解过程），以这个流程图为基础，说明了建立计算框图的一般原则，并写出它的 FORTRAN 和 ALGOL 计算机程序。最后，介绍了各种形式 FFT 算法的理论推导。

四、FFT 的基本应用

第 13 章研究在计算离散褶积和相关积分中 FFT 的基

本应用。通常，FFT的应用(如系统分析、数字滤波、模拟、功率谱分析、光学、通信理论等等)是以具体实现一个离散褶积或相关积分为根据的，因此，我们详细叙述了在这些离散积分中FFT应用的过程。

为了巩固与加深理解，在各章末都列出了一些特选习题。

(以下为致谢部分，译略。)

E. O. 布赖姆

目　录

第 1 章

引　　言

本章将简要而通俗地叙述变换分析这个概念。我们把富里叶变换和这个基本概念联系起来，并从它基本的分析性质来进行考查。同时也介绍几个使用富里叶变换作为基本分析工具的科学领域。最后，提出引入离散富里叶变换的必要性，回顾一下快速富里叶变换 (Fast Fourier Transform, 简写为 FFT)的历史发展。

1-1　变换分析

为了简化一个问题的求解，每个读者大概都会在这个或那个场合使用过变换分析这种技巧。

读者可能会怀疑上面这种说法的正确性，因为“变换”这个词不是大家熟悉的一个词。然而，回想一下初等数学中的对数，它事实上就是一种变换，是我们大家都使用过的一种变换。

为了更清楚地说明对数与变换分析之间的关系，我们来看图 1-1。图上画出了一个流程图，它说明了常规分析过程与变换分析过程之间的一般关系。此外，在这个图上剖析了一个经过简化的变换例子，即对数变换。我们将利用这个例子中的机理来充实变换分析这个词的意义。

在图 1-1 的这个例子中，问题是要确定商 $y=\frac{x}{z}$。假定

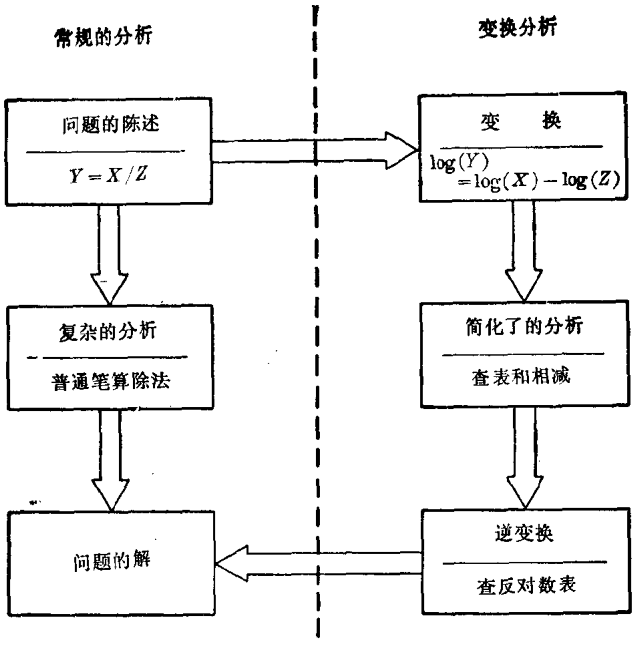


图 1-1 常规分析与变换分析的流程图关系

计算需要很高的精度，但又不能用计算机。常规分析意味着要用普通除法去确定 y。如果我们必须反复地进行 y 的计算，那么常规分析（普通除法）就需要化费很长的时间。

图 1-1 的右边表示了变换分析的基本步骤。如图所示，第一步是转化或变换问题的提法，对我们的例子，就是用取对数把除法运算转变成减法运算。

由于这种简化，变换分析只要求对 $\log(x)$ 和 $\log(z)$ 查表，然后相减，就能确定 $\log(y)$。从图 1-1 中看到，下一步是再查表，求出 $\log(y)$ 的逆变换（反对数），就得到了问题的解。这样由于利用变换分析技巧，使得问题的复杂程度简化了。

一般地说，变换常常使问题的分析求解得到简化。富里叶变换就是这样一种变换分析技巧。在科学研究的许多领域中，人们发现富里叶变换对于问题的简化特别有用。我们这本书主要就是讲富里叶变换的。

1-2 富里叶变换分析的基本概念

因为前面考虑的对数变换是一维的，所以很容易理解；也就是说，对数函数把单一的一个值 x 变成为单一的另一个值 $\log(x)$。但是，富里叶变换就不能这样容易地说明，因为我们必须考虑在 $-\infty$ 到 $+\infty$ 区间内定义的函数。因此，和对数函数不同，我们现在必须把一个自变量定义于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的函数，变换成也定义于 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的另一个变量的函数。

图 1-2 是富里叶变换的一个直观的说明。如图所示，一个波形的富里叶变换的实质是：把这个波形分解成许多不同频率的正弦波之和。如果这些正弦波加起来成为原来的波形，那么，我们就确定了这个波形的富里叶变换。富里叶变换的图形表示就是一张显示每个被确定正弦波的振幅和频率的图。

图 1-2 也是一个简单波形的富里叶变换的例子[注]，这个简单波形是由两个正弦波相加而得。如图所示，这个富里叶变换图显示了每个正弦波的振幅和频率。按照通常的习惯，我们对每个频率都画出了正、负频率两个正弦波，每个正弦波的振幅相应地减半。于是，对该例的波形来说，它的富里叶变换把它分解成两个独立的正弦分量。

富里叶变换可以辨别出或区分开组成任意波形的一些不同频率的正弦波（和它们各自的振幅），在数学上，这种关系可

[注] 原书图有错，这里已作更正。——译者注

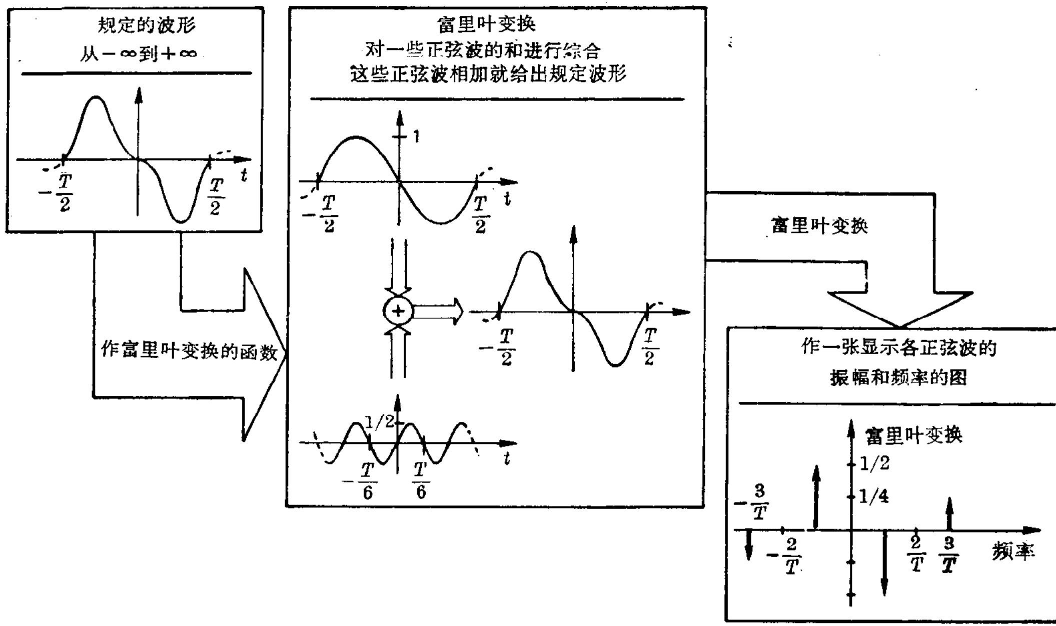


图 1-2　对富里叶变换的解释

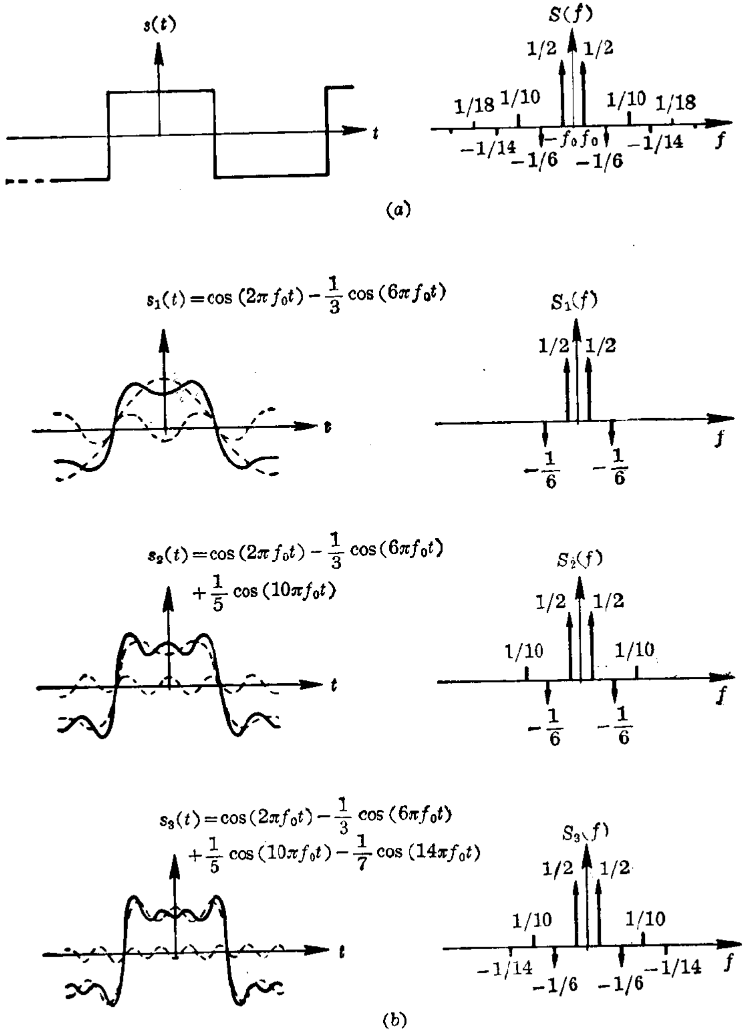


图 1-3　一个方波函数的富里叶变换

表示为:

$$S(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}s(t)e^{-j2\pi ft}dt \tag{1-1}$$

这里，$s(t)$ 是被分解为正弦函数之和的波形，$S(f)$ 是 $s(t)$ 的富里叶变换，$j=\sqrt{-1}$。图 1-3(a)是一个方波函数富里叶变换的例子。一个方波可以分解成一组由富里叶变换所确定的正弦波，其直观的道理示于图 1-3(b)。

通常，在分析方波这样的周期函数时，我们宁可用富里叶级数而不用富里叶变换。然而，我们将在第五章中看到，富里叶级数是富里叶变换的一种特殊情况。

如果波形 $s(t)$ 不是一个周期函数，那么它的富里叶变换将是频率的一个连续函数。也就是说，$s(t)$ 用全部频率的正弦波之和来表示。为了说明，我们考虑图 1-4 所示的脉冲波形和它的富里叶变换。在这个例子中，从其富里叶变换可看出一个正弦波的频率与其旁边的正弦波的频率变得无法分开，结果是所有的频率都必须考虑。

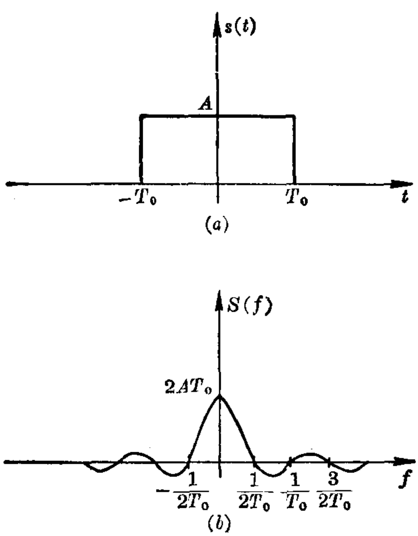


图 1-4　一个脉冲波形的富里叶变换

所以，富里叶变换可以看作是时间函数在频率域上的表示。如图 1-3(a)和图 1-4 所示，富里叶变换频率域包含的信

息和原函数所包含的完全相同,不同的仅是信息的表示方法。所以,富里叶分析使人们可以从另一个观点,即变换分析的观点来研究一个函数。在以后的讨论中将看到,利用象图 1-1 所示的富里叶变换分析的方法,往往使解题得到简化。

1-3 富里叶变换的普遍性

“普遍性”(ubiquitous)这个词在这里是指同时处处都有的意思,因为许多表面看来彼此互不相关的课题,都可以利用富里叶变换有效地处理。所以,提出“普遍性”这个词,无疑是恰当的。人们很容易把一种领域中发展的富里叶分析技术,推广到许多其他的领域。富里叶变换的一些典型应用领域包括:

线性系统 线性系统输出的富里叶变换是系统传输函数与输入信号富里叶变换的乘积[1]。

天线 一个天线的方向图是其发射电流的富里叶变换[2]。

光学 光学系统有这样的性质,即一个会聚透镜的前焦面和后焦面上光的振幅分布,彼此存在着富里叶变换的关系[3]。

随机过程 一个随机过程的功率谱密度是该过程的自相关函数的富里叶变换[4]。

概率论 随机变量的特征函数,是用其概率密度函数的富里叶变换确定的[5]。

量子物理 量子理论中的测不准原理是从根本上与富里叶变换有关的,因为粒子的动量与位置,实质上是通过富里叶变换联系在一起的[6]。

边值问题 偏微分方程的解,可借助于富里叶变换而得