

铸件凝固过程数值模拟

陈海清 李华基 曹 阳 编著

内 容 简 介

本书是论述铸件凝固过程温度场数值解的专门著作。全书共分六章：传热的基本原理；不稳定导热方程的有限差分解法；不稳定导热方程的有限元解法；铸件凝固过程数值方程的求解条件；通过数值模拟计算预计铸件质量；铸件凝固过程数值模拟的简化方法。在附录中给出了显式差分解法和交替方向隐式解法例题，以及分别用BASIC和TRUE BASIC语言编写的两个计算程序，便于自学。

本书可作高等学校铸造专业及金属热加工专业的本科生选修课试用教材，亦可作为从事铸造、金属材料、冶金工作的工程技术人员参考书。

铸件凝固过程数值模拟

陈海清 李华基 曹阳 编著
责任编辑 梁涛

重庆大学出版社 出版发行
新华书店 经销
重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092 1/16 印张：14.25 字数：356 千
1991年4月第1版 1991年4月第1次印刷
印数：1—2400

标准书号：ISBN 7-5624-0353-8 定价：3.74 元
TC·1R

前 言

要获得优质铸件，必须控制铸件的凝固过程。铸件凝固是高温下在铸型内进行的，难以直接观察。长期以来，主要凭经验或以实测资料为依据进行铸造工艺设计，控制铸件的凝固过程。大、中型铸件凝固进程的温度场难以实测，而且也不允许通过实验得出铸件的合理工艺方案后才进行工艺设计和正式生产。因此，当前主要凭经验指导铸件的生产实践：

从传热学观点研究金属从液态转变为固态的状态变化过程，属于铸件凝固的一个分支。铸件断面上某一瞬间的凝固状况决定于铸造合金的结晶温度范围和该瞬时铸件断面上的温度场。一定牌号的合金，在一定的铸造条件下，结晶温度范围有确定的数值。因此，研究铸件凝固过程的关键就在于确定正在冷却凝固的铸件中的温度场。通过对铸件凝固期断面上等温线分布、凝固前沿进程、等时线分布和固相率的数值模拟计算，不仅为分析缩孔、缩松、偏析和热裂等铸造缺陷和工艺设计提供可靠依据，而且通过计算出冷却速度 V 、温度梯度 G 和凝固速度 R 以及 G/R 比值，还可判明铸件凝固组织形态和使用性能。

确定正在冷却凝固铸件温度场的方法有实验法和数学法两类。为了使铸造工艺科学现代化，尽可能以最少的物力、人力获得优质铸件，近十多年来，关于铸件凝固期的温度场，国内外铸造工作者试图用数学方法进行计算，并作了大量的研究工作。数学法又可分为解析法和数值计算法两类。由于铸造过程的复杂性，解析法只能用来解决简单形状铸件如大平板、圆柱体和球体冷却凝固期温度场的计算。近年来，随着电子计算机和计算数学的发展，用数值计算法求解铸件冷却凝固期温度场的优点越来越明显，它的计算精度已经达到可以与解析法相媲美的程度。此法称为铸件凝固过程电子计算机模拟或叫数值模拟。所谓模拟就是两个不同物理领域的现象，能用同一数学形式来描述，则称这两个现象彼此是可模拟的。模拟的方法就是把一个领域内要求解的问题过渡到另一个领域中去解决。铸件凝固温度场的数值模拟是一项新的研究课题，它的最终目的是解决铸造工艺优化设计问题。

铸件凝固过程数值模拟及铸造工艺优化设计包括的主要内容为：铸件凝固补缩过程数值模拟及冒口、冷铁、补贴的优化设计；铸件充填过程数值模拟及浇注系统的优化设计；铸件结晶过程数值模拟及组织性能优化设计；铸件热应力、应变数值模拟及热裂防止。这些研究内容既有区别，但相互之间也有一定的联系，温度场数值模拟是基本的。它们在于把传热学、流体力学、金属学和计算数学通过电子计算机同生产相结合，把铸件凝固过程的控制及铸造工艺设计引向现代化科学道路。

考虑到问题的复杂性及整个研究内容涉及面广，本书着重对铸件凝固补缩过程数值模拟进行讨论。第一章复习传导、对流和辐射三种传热方式的基本原理及热传导偏微分方程推导的基本知识。第二章介绍不稳定导热方程有限差分解法的数学基础，直角坐标和圆柱坐标差分方程的建立，以及差分方程的稳定性和收敛性。第三章介绍不稳定导热方程有限元解法的数学基础，数值方程的建立方法，并与有限差分解法作了相互比较。第四章阐述铸件凝固过程数值方程求解条件，即初始条件、边界条件、热物性值、潜热和计算截面的确定和处

理。第五章介绍通过数值模拟对铸件缩孔、缩松、铸件偏析、铸件凝固组织和性能，以及铸件热裂的预测方法和判据。第六章介绍铸件凝固过程数值模拟三维简化为二维和只对铸件体积元简化计算的方法。附录 I 中列出了一维显式差分解法和二维交替隐式解法两个例题。附录 II 中介绍了单位换算及一些参数。

·本书汇集了作者近年来的教学与科研成果，并收集了国内外有关研究资料，在1986年为开设选修课编写的自编讲义的基础上改写而成的。编写中，力求内容精炼，注意增强逻辑性和系统性，突出分析问题的基本思路。本书不同于一般的热传导数值解著作，而是专门讨论铸件凝固不稳定导热过程问题。还举例说明如何从复杂的铸件凝固过程中作出容许的简化，得到合理的工程数值解。编写过程中还注意了物理与数学的结合，而不是单纯地套用现成的数学结论，因此，对具备有微积分等高等数学知识的读者，通过自学便能掌握本书的主要内容，因此，本书不仅适用于铸造及热加工专业本科生和从事本领域研究的研究生，而且也适用于从事铸造、金属材料、冶金工作的科技人员。

本书由重庆大学陈海清担任主编，钮因亿主审。其中一、二、三、四章由陈海清编写，五章由李华基编写，六章和附录由曹阳编写。

由于编著者水平所限，书中难免存在缺点和错误，恳请读者批评指正，以便再版时修改。

编著者

1990.9.25

目 录

第一章 传热的基本原理	(1)
§1-1 传热的基本方式	(1)
§1-2 热传导的偏微分方程式	(7)
第二章 不稳定导热方程的有限差分解法	(12)
§2-1 直接代换法	(12)
§2-2 能量平衡法	(18)
§2-3 边界节点差分方程的建立	(22)
§2-4 圆柱坐标系的有限差分方程	(31)
§2-5 差分方程的稳定性和收敛性	(34)
§2-6 二维交替隐式格式	(41)
第三章 不稳定导热方程的有限元解法	(48)
§3-1 有限元法的数学基础	(48)
§3-2 内单元计算格式的建立	(55)
§3-3 内单元和边界单元统一计算格式的建立	(65)
§3-4 有限元法和有限差分法的比较	(70)
第四章 铸件凝固过程数值方程的求解条件	(72)
§4-1 初始条件	(72)
§4-2 边界条件	(75)
§4-3 热物性值	(82)
§4-4 潜热处理	(91)
§4-5 几何形状模型的确定	(94)
第五章 通过数值模拟计算预计铸件质量	(96)
§5-1 预计铸件中的缩孔与缩松	(97)
§5-2 预计铸件中的偏析	(131)
§5-3 预计铸件的凝固组织和性能	(135)
§5-4 预计铸件的热裂	(138)

第六章 铸件凝固过程数值模拟的简化方法.....	(150)
§6-1 三维简化为二维的方法	(150)
§6-2 只对铸件体积元计算的方法	(156)
附录 I 计算举例	(162)
附录 II 单位换算及一些参数	(208)
参考文献	(218)

第一章 传热的基本原理

§1-1 传热的基本方式

铸件凝固过程与大多数工业传热过程一样，热量是从一部分传播到另一部分。液态金属注入铸型以后，随即发生两个过程：液态金属的温度不断下降；铸型受热温度上升。实践证明，铸型的内表面温度 T_3 与其接近的铸件表面温度 T_2 是不同的，如图1-1所示(纵坐标表示温度，横坐标表示厚度)。这个现象说明，在铸件和铸型之间存在一个中间层(气隙)。该中间层可能是因金属收缩使铸件各方向尺寸缩小和铸型受热发生膨胀形成的，也可能是铸型表面的涂料层，也可能是间隙和涂料兼而有之的中间层。因此，铸件与铸型之间是一个“铸件—中间层—铸型”的不稳定热交换系统。

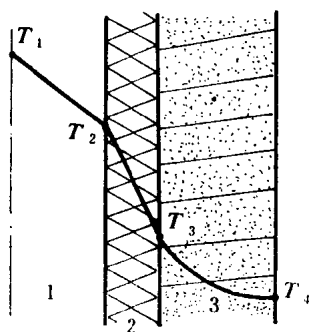


图1-1 铸造系统某瞬时温度分布
1—铸件 2—中间层
3—铸型

从浇注充填到凝固冷却，“铸件—中间层—铸型”的传热过程是通过高温金属的辐射传热，液体金属与铸型的对流换热(包括铸型表面与大气的对流换热)，金属向铸型导热等三种方式综合进行的。为便于分析，现分别说明三种传热方式的本质及有关基本定律。

一、热传导

热传导简称导热，它属于接触传热，是连续介质就地传递热量而又并没有各部分物质之间宏观的相对位移。在密实的不透明固体内部，只能依靠导热方式传递热量。导热永远和温度分布不均匀相联系在一起。

根据热力学第二定律，要与热力学相一致就要求：只有在各物体处于不同的温度时，热才能从一个物体传递到另一个物体(或从物体的某一部分传递到物体的另一部分)；并且热总是从温度最高处流向温度最低处，即这时存在着一个温度梯度；以热量形式的能量，朝着温度降低的方向流动。热力学第一定律说明了在没有热源或热沉存在时，热流的能量是守恒的。

在 X 、 Y 、 Z 直角坐标系中，连续介质各个地点在同一时刻 τ 的温度分布，叫做温度场。温度场一般的数学表达式为 $T=f(X, Y, Z, \tau)$ 。温度场不随时间变动时，叫稳定温度场，由此产生的导热为稳定导热。温度场随时间 τ 而改变的，称为不稳定温度场，不稳定温度场中的导热称为不稳定导热。

静止的液体金属或形成凝固层以后，金属向铸型传热主要以不稳定导热方式进行。导热的基本定律是傅立叶定律，即导热的比热流量 q 与温度梯度成正比，即

$$q \propto \text{grad}T$$

或
$$q = -\lambda \text{grad}T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \quad (\text{W/m}^2) \quad (1-1)$$

q 是在传热方向上单位时间、单位面积上所通过的热量。负号表示导热的热流永远向温度低的方向传递，即与温度梯度的方向相反。 λ 是所研究的特定材料的导热系数，单位为 ($W/m \cdot K$)。

比热流量是个向量，即必须说明它的大小和方向。对于任意点在通过该点的任意给定方向上，如果考虑的面积垂直于上述的方向，那么可以计算得出比热流量。

图1-2表示一个物体中的等温面 T 和 $T+dT$ 。这些等温面的法线方向设为 n ，它也是微分面 dA 的法线。 dQ 为通过 dA 面的热流。任意方向 s 上和法线方向 n 上的比热流量可按式计算^[1]

$$q_n = \frac{dQ}{dA} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

$$q_s = \frac{dQ}{dA \cos \phi} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial s}$$

因为

$$n = s \cos \phi$$

故

$$q_s = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cos \phi \quad (1-2)$$

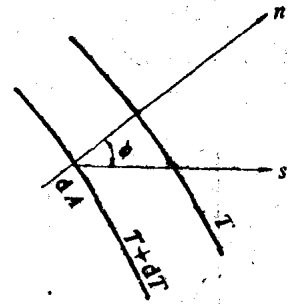


图1-2 热流的方向

换句话说， q_s 是 q_n 的一个分量。从式(1-2)可以看出，沿着等温面法线方向计算得到的比热流量最大。如果比热流量的分量和 (X, Y, Z) 坐标系相联系，那么 X, Y, Z 方向的热流量应是

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial X} \quad q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial Y} \quad q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (1-3)$$

式(1-3)表示的比热流量是比热流向量

$$q = i q_x + j q_y + k q_z \quad (1-4)$$

的三个分量。

导热系数 λ 是沿导热方向的单位长度上，温度降低 $1^\circ C$ ，物质所容许通过的热量。各向异性材料的导热系数具有方向性，例如石墨这样的物质， λ 对于方向极其敏感。在这种情况下，热流向量的任何分量，在每一坐标方向上要出现三个导热系数分量。大多数液体和固体属于各向同性的物质，所考虑的每点处一切方向上的 λ 值都是一样的。另外， λ 值大小还随温度而变化。大多数金属的导热系数随温度升高而降低；大多数液体（水和甘油除外） λ 也随温度升高而降低；气体的导热系数随温度升高而增加；铸造合金的导热系数不能简单地从其组成物的 λ 值加权平均求出；砂型、熔模铸造型壳等的导热系数还与它们的孔隙率有关。

在特定的小的温度范围内，导热系数随温度的变化可以用线性形式来表示

$$\lambda = \lambda_0 (1 + \beta T)$$

式中 λ_0 ——某基准温度条件下的导热系数；

β ——温度系数，正或负取决于所考虑的材料。

在不稳定导热系统中，给定点上的物质温度随时间而变化；而温度变化的大小又是材料比热 c_p 的函数，按数学表示

$$Q = mc_p \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (\text{W}) \quad (1-5)$$

式中 m ——材料的质量, kg;
 c_p ——材料的比热, J/kg·K;

$\frac{\partial T}{\partial \tau}$ ——温度变化率, K/s.

反过来, 流到某点的净热流率本身又等于传导到此点的热量与从此点传导走的热量之差。概括起来, 比热是蓄热能力的量度, 而导热系数表示材料的传热能力。在不稳定系统中, 系统对温度变化的反应速度乃是材料的这些性质和质量的函数。人们引伸出热扩散率这个名词来部分地表示反应速率的大小, 热扩散率 α 可用下式表示

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (1-6)$$

式中 ρ ——材料的密度, kg/m³。

二、热对流

热对流是指流体(气体和液体)中温度不同的各部分相互混合的宏观运动引起热量传递的现象。流体温度分布不均匀时, 也将本能地产生导热。因此, 热对流总和流体的导热同时发生, 可以看作是流体流动时的导热。只有在流体静止不动时, 亦即不发生宏观位移的情况下, 才能出现单纯的导热。在工程上最具有实际意义的, 是相对运动着的流体与所接触的固体壁面之间的热量交换过程, 一般叫做对流换热。液体金属与铸型内壁, 铸型外壁与周围空气, 以及液体金属内部都有对流换热过程。

对流换热的情况比只有热传导的情况复杂, 因为必须同时研究流体的运动和能量传递过程, 为此必须运用力学和热力学的定律。工程上在研究固体壁面和流体之间的对流换热时, 除了高度稀薄的气体外, 人们不去注意流体的那些单个质点(分子、原子、电子), 而把流体看成是连续介质, 运用力学和热力学定律, 以便较容易地得出工程上所需要的答案。

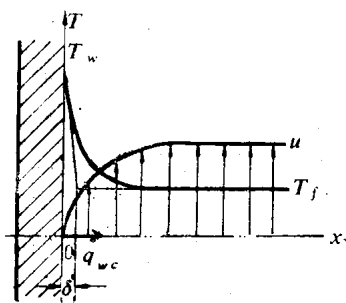


图1-3 邻近壁面的流体速度分布和温度分布

实际的流体总有粘性, 流动时, 受粘性和壁面摩擦的影响, 在靠近壁面附近的流体将降低流速, 在壁面上完全被滞止不动, 即 $x=0$ 时, $u=0$, 参看图1-3。因此, 热量从壁面传给贴壁的那部分流体, 将依靠导热。由式(1-1), 流体和固体壁接触面上的“相”际热流密度为

$$q_{w0} = -\lambda_f \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} \quad (1-7)$$

式中 T ——流体的温度;

λ_f ——流体的导热系数。

热流的方向, 当然朝着温度降低的方向。流体的导热性较差, 气体的导热系数更小, 所以受热时, 在贴壁处的流体温度势必沿着 x 轴反方向剧烈升高。随着离壁面的距离 x 的增加, 流体的流动将陆续带走更多一部分的热量, 减小沿 x 轴方向的热流密度, 使 x 轴向的温

度梯度连续下降，温度分布趋向于平坦化。正是通过这种导热和热对流的共同作用，使热量在流体内部得到传播，越临近壁面，导热越起主导作用。如果象图1-3中所指出的那样，设想厚度为 δ' 的贴壁静止膜，膜内温度线性地从壁面温度 T_w 降到远离壁面、尚未被加热的流体温度 T_∞ ，则

$$-\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{T_w - T_\infty}{\delta'} \text{ 或 } q_{w,c} = \frac{\lambda_f}{\delta'} (T_w - T_\infty) \quad (1-8)$$

图1-3所表示的，是无界对流时壁面与流体的换热，铸型外壁与周围空气的对流换热就属这种情况。流体在管和槽道内部的流动，称为有界对流，液体金属在浇注系统内充型过程的流动就属于这种情况，这时不存在 T_∞ 。在这种情况下，采用截面平均温度代替无界对流时的 T_∞ 作为流体的特征温度 T_f ，可把式(1-7)改写为

$$q_{w,c} = \alpha_c (T_w - T_f) \quad (\text{W/m}^2) \quad (1-9)$$

这就是所谓“牛顿冷却定律”的数学表达式。实际上应被看作是“放热系数” α_c 的定义式，并不是表达对流换热现象本质的物理定律。非常明显，凡能影响流体流动的各种因素，包括流体的种类和状态、运动的速度、流道的形状和大小、以及固体壁表面粗糙度等，都会对 α_c 值产生影响。式(1-9)只不过形式地把放热过程的一切复杂性和计算上的困难，都转移到，并且集中在放热系数这样一个物理量上罢了。作为计算的手段，式(1-9)中引进的 α_c 代表流体和所接触的固体表面之间温度每相差 1°C ，该流体与表面之间“相”际热流密度的大小。因此，放热系数的大小将表明流体与固体表面之间换热能力的强弱。

必须明确，放热系数 α_c 和后面将要谈到的传热系数 h (§4-2)的单位相同，都是 $(\text{W/m}^2 \cdot \text{K})$ ，但所取温差不同，所包含的物理意义也就不同。

按照流体运动的原因不同，对流可分为自然对流和强迫对流。凡是由于固体表面对流体局部加热或冷却，造成流体冷、热各部分密度不同所引起的升沉对流运动，称为自然对流。象室内利用暖气片供暖和各种热工设备的外壳对外散热，铸件凝固冷却过程铸型外表面对外散热，都属于自然对流。显然，对于给定的流体，自然对流的速度将完全取决于流体局部受热或被冷却时所产生的温差大小，以及流动空间的尺寸和形状。凡是处在外力作用下，包括工程上常见的利用泵或风机的机械力，或者自然风力和烟囱等一类设备的自然通风力所产生的流体流动，叫做强迫对流。特别是机械力量所促成的流体受迫流过通道的流速，可以大大超过自然对流的速度，所以放热系数的值比自然对流时高得多。原则上，在与流道壁面有换热的情况下，流体受迫流动的同时，难免会发生自然对流的干扰，出现所谓混合对流的复杂情况。不过，受迫流动的流速越大，自然对流的相对影响就越小，甚至可以不必加以考虑。

运用式(1-9)，可进行对流换热的计算。但由于对流换热的复杂性，该式中的放热系数 α_c 需从相应的准则方程式求出。准则方程式是针对不同对流换热情况，在综合实验结果的基础之上，运用相似理论将表征某现象的物理量整理成一些相似准则，用因次分析法得到的各种类型的表达式^[2]。

相似准则之间的一般函数关系式为

$$N_* = f(P_r, G_r, R_e)$$

式中 N_* ——努塞尔特准则， $N_* = \frac{\alpha_c L}{\lambda_f}$ ， L 为特征尺寸， λ_f 为流体导热系数；

P_r ——普朗特准则, $P_r = \frac{\gamma}{\alpha}$, α 为热扩散率, γ 为运动粘性系数, $\gamma = \frac{\mu}{\rho}$, μ 为流体的动力粘性系数;

G_r ——格拉晓夫准则, $G_r = g\beta_1 L^3(T_w - T_f)/\gamma^2$, g 为重力加速度, β_1 为流体的容积膨胀系数;

Re ——雷诺准则, $Re = \frac{uL}{\gamma}$, u 为流体流速。

因为实验是在各物理量的一定变化范围内进行的, 因此根据实验数据整理出来的准则方程式只能应用于准则范围相同的相似现象上去。以下介绍与铸件浇注和凝固过程有关的几种对流情况下的一般准则函数关系式, 关于具体表达式可参看传热学有关文献。

1. 无限空间中的自然对流换热

铸型外壁与空气之间就属于无限空间中的自然对流换热现象。在这种情况下, G_r 起重要作用; 而 Re 可不必考虑, 其准则函数关系式为

$$N_u = f(G_r, P_r)$$

2. 流体在管中受迫对流换热

液体金属充填铸型在浇道内的流动就属这种情况。受迫对流换热时, 在一般情况下它所伴随的自然对流很弱, G_r 可不必考虑, 而 Re 起重要作用, 因而管内受迫对流换热的准则函数关系式为

$$N_u = f(Re, P_r)$$

3. 液体金属中的换热

液体金属的导热系数比别的流体大很多倍, 相应地其普朗特数非常小, P_r 约在 0.005~0.03 这一范围内。由于导热性很高, 在导热和对流的复合换热过程中热传导经常占主导地位, 因此液体金属中的换热, 主要按导热考虑。但是液态金属在浇注系统中流动时, 由于液态金属与流道壁进行对流换热时, 边界层中的导热热阻 δ'/λ_f (式1-8)很小, 因而这时液态金属的放热系数较大, 对流换热还是较强的。

在对流换热中固体内部导热热阻 L/λ 与表面放热热阻 $1/\alpha_s$ 之比是个重要准则, 称为毕渥数, 它是一无因次数群, 定义为

$$B_i = \frac{\alpha_s L}{\lambda} = \frac{\text{表面传热能力}}{\text{固体的导热能力}} \quad (1-10)$$

B_i 与 N_u 数学形式相似, 但 N_u 中的 λ 是液体的导热系数 λ_f , 而 B_i 中的 λ 是固体壁面的导热系数。若流体受到强制扰动 $\alpha_s \rightarrow \infty$, 此时 B_i 趋近于无限大, 则壁面温度接近于流体温度。当固体内部热阻很小时, 如对水冷薄壁金属型铸造, $L/\lambda \rightarrow 0$, 此时 B_i 趋近于零, 铸型内部温度接近于均匀一致。

三、热辐射

物体对外发射电磁波的过程叫做辐射。电磁波所运载的能量叫做辐射能。因电磁波能在真空中传播, 所以热辐射也能在真空中进行。电磁波在空间传播过程中, 一旦遇到另一物体, 电磁波所运载的辐射能有一部分被该物体吸收, 引起该物体内部电子的谐振运动, 就转变为该物体内部微观粒子运动的动能, 即所谓热能。因此, 当物体辐射或物体吸收辐射能时, 都

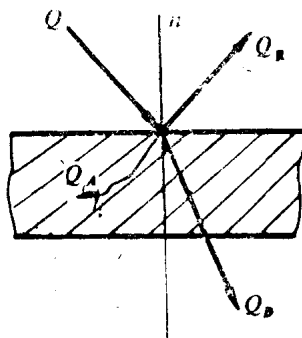


图1-4 投射到物体上
辐射能分配

伴随着辐射能和热能之间的转换。导热和对流都不存在这样的能量转换。此外，在传热形式上，热辐射也与导热及对流不同，它是一种非接触式传热，即不需要通过固体或流体介质来传递能量。

热射线和可见光的物理本性相同，光的投射、反射和折射的规律对热射线也同样正确。如图1-4所示，辐射能 Q 投射到物体上时，其中一部分 Q_A 被吸收，一部分 Q_R 被反射，还可能有一部分 Q_D 透过。被反射或透射的辐射能流，除部分被空间介质沿途吸收外，又将落在周围其它一些物体上，依次被吸收。由此可见，每个物体在不断发射辐射能的同时，

还在不断吸收来自其它物体的辐射能。

只要温度高于绝对零度，任何物体都随时向周围空间辐射能量。每单位时间，物体单位表面积发射的一切波长射线所携带的总能量称为该物体的辐射密度或辐射力，用 $E(\text{W}/\text{m}^2)$ 来表示。辐射力 E 可以用绝对黑度在相同温度下的辐射力 E_0 作为比较标准，引进 $\epsilon = E/E_0$ ，称为物体的辐射率或黑度，表明该物体的辐射力接近于黑体的程度。黑体，就象热力学里的理想气体一样，也是一个源于实际的理想化了的概念，在热辐射理论体系中占有重要地位。1878年，斯蒂芬由实验发现，不同的物体其辐射力 E 与表面的绝对温度 $T(\text{K})$ 的四次方成正比。1884年，玻耳兹曼用热力学方法证明黑体的辐射力为

$$E_0 = \sigma_0 T^4 \quad (\text{W}/\text{m}^2) \quad (1-11)$$

或黑度为 ϵ 的物体辐射力为

$$E = \epsilon \sigma_0 T^4 \quad (\text{W}/\text{m}^2) \quad (1-12)$$

这就是斯蒂芬-玻耳兹曼定律，或俗称四次方定律的数学表达式。式中 σ_0 叫做斯蒂芬-玻耳兹曼常数或绝对黑度的辐射常数，直接测定值为 $5.76 \times 10^{-8} (\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ 。式(1-12)还表明，一切物质所能辐射的热量只等于黑体辐射热量的一定成数，显然 $\epsilon < 1$ 。

热力学的宏观定律确认绝对零度是达不到的，宏观物质的绝对温度总是大于零，因此，任何实际物体原则上总具有一定的辐射力。

实际上，辐射往往涉及二个物体间辐射热交换。如果二个物体的表面温度不同，中间由空气所隔开， $T_1 > T_2$ 时，则相互辐射的结果，表面温度为 T_1 的物体发射出去的辐射热超过了吸收来自表面温度为 T_2 的物体辐射热，引起辐射换热的热流量则为

$$Q_{1-2} = \epsilon_{12} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) F_1 \varphi_{1,2} \quad (\text{W})$$

亦即

$$q_{1-2} = \frac{Q_{1-2}}{F_1} = \epsilon_{12} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \varphi_{1,2} \quad (\text{W}/\text{m}^2) \quad (1-13)$$

式中 ϵ_{12} ——两物体黑度的函数，称为物体1与2的综合黑度，通常取作 $\epsilon_{12} = \epsilon_1 \epsilon_2$ ；

F_1 ——物体1的表面积；

$\varphi_{1,2}$ ——代表物体1的表面向外发射出去的辐射热量中，能投射到物体2表面上的份额，称为角系数，是一个只与两物体的相对位置、形状及大小有关的几何纯参量，相当于从物体1的表面到物体2表面可见领域的视域系数。

若参与辐射换热的，只是由透明的气体介质所隔开的表面1和2，不牵涉到第三者，那

么, 热流量 $Q_{r,2}$ 显然是从表面1传出的净辐射热流量 $Q_{r,1}$, 同时也是传给表面2的净辐射热流量 $Q_{r,2}$; 如果记作

$$Q_r = \alpha_r F (T_w - T_f) \quad (\text{W})$$

或 $q_{wr} = \alpha_r (T_w - T_f) \quad (\text{W/m}^2) \quad (1-14)$

α_r 具有放热系数 α_c 同样的形式, 可以称之为“辐射放热系数”, 并把 α_c 叫做对流放热系数, 以便于区别。这样, 考虑到壁面与气体之间还存在着对流换热, 热流密度为 $q_{wc} = \alpha_c (T_w - T_f)$ 时, 由壁面传走的总热流密度 q_w 应是 q_{wr} 和 q_{wc} 二者之和

$$q_w = \alpha_c (T_w - T_f) + \alpha_r (T_w - T_f)$$

令 $\alpha_0 = \alpha_c + \alpha_r$,

则 $q_w = \alpha_0 (T_w - T_f) \quad (\text{W/m}^2) \quad (1-15)$

引用辐射放热系数 α_r , 可以形式地把所计算的辐射换热折合成对流换热, 用总放热系数 α_0 兼顾辐射换热的影响, 从而有利于简化复杂传热的解剖分析。

一种简单情况, 例如远离表面1的外界表面温度趋近于环境温度 T_f , 并且 $\varphi_{r,2} = 1$ 时 (例如铸件明冒口表面向铸造车间空间辐射时), 这时

$$\alpha_{r,1} \approx 4\epsilon_{1,2}\sigma_0 T_m^3 \quad (\text{W/m}^2 \cdot \text{K}) \quad (1-16)$$

式中 $T_m = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ 。

这就清楚地指明, $(T_w - T_f)$ 降为零时, 即 $T_w \rightarrow T_f$ 时, α_r 并非零值, 而是以 $4\epsilon_{1,2}\sigma_0 T_m^3$ 为极限。随着温差的扩大和平均温度 T_m 的升高, α_r 值将迅速增加。由于 α_c 随温差的变化较小, 在高温范围和大温差情况下, α_r 有可能成为 α_0 的主要组成部分。另一方面, α_r 与气体的运动状况无关, 而 α_c 则随气体运动速度的降低而减小, 在气体自然对流的情况下, $\alpha_c \approx 5 (\text{W/m}^2 \cdot \text{K})$, 即使 T_m 只有300(K), α_r 就可能占 α_0 的一半左右。

以上初步涉及的一些内容, 是为了使读者复习一下三种传热方式的基本概念。显然, 对流和辐射的热流发生在边界上, 导热公式适用于物质内部的非流动状况。

§1-2 热传导的偏微分方程式

铸件和铸型一般属于各向同性的物质。铸件凝固过程数值模拟计算依据的基本数学模型, 是不稳定导热偏微分方程。下面我们讨论各向同性材料热传导方程式的建立^[3,4]。

一、直角坐标系导热偏微分方程

导热偏微分方程的推导, 是通过考察处于导热过程中的物质的微元体积($dx dy dz$)的能量平衡来进行的(图1-5)。将通过六个面的导热在时间 δt 内所获得的能量, 与在 δt 时间内产生的热量加在一起, 并令其和等于微元体积内物质在 δt 时间内积蓄热量的改变, 而后者用温度的升高来表示。为此, 要应用§1-1中相应形式的傅立叶定律以及式(1-5)。

现在考虑一微元控制体, 尺寸为 δx 、 δy 和 δz , 如图1-6所示的该微元控制体位置定在三维坐标系(x, y, z)中。按照傅立叶热传导定律式(1-3), 在 x 方向流入微元体左表面的热流可表示为

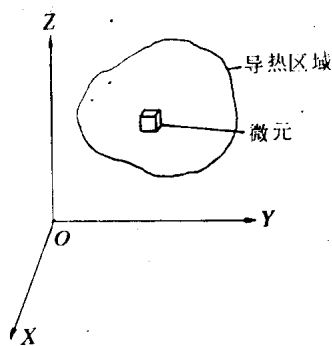


图1-5 导热分析用的微元

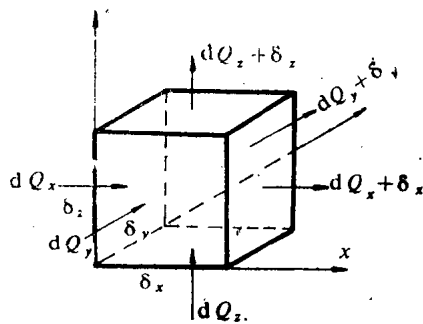


图1-6 确定热传导方程的微元体

$$dQ_x = -\lambda(\delta y \delta z) \frac{\partial T}{\partial x}$$

流出微元容积右表面的热流，可以应用泰勒级数展开，保留级数的第一项和第二项而得到

$$dQ_{x+\delta_x} = dQ_x + \frac{\partial}{\partial x} dQ_x \delta_x + \dots$$

于是在x方向热传导传递的净热流为

$$dQ_x - dQ_{x+\delta_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (1-17)$$

用同样的方法，可得出y、z方向与式(1-17)相类似的热传导传递的净热流方程式即

$$dQ_y - dQ_{y+\delta_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta x \delta y \delta z$$

$$dQ_z - dQ_{z+\delta_z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z$$

在三个坐标方向净热流的总和为

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \delta x \delta y \delta z \quad (1-18)$$

如果单位时间、单位空间所产生的热量为 $Q'(x, y, z, \tau)$ ，那么微元体的发热量为

$$Q' \delta x \delta y \delta z \quad (1-19)$$

由于热传导进入微元体的净热流式(1-18)和微元体内产生的热量式(1-19)一起用于增大微元体的内能。微元体内能的增大反应在微元体能量存储随时间的变化率，即

$$\rho c_p \delta x \delta y \delta z \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (1-20)$$

式中 ρ —— 密度；

c_p —— 比热；

τ —— 时间。

对微元体进行能量平衡，使能量存储的时间变化率与由热传导引起的流入微元体的净热流和微元体内产生的热量之和相等，可得下式

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q' \quad (1-21)$$

式中, $\lambda = \lambda(x, y, z, T)$, $c_p = c_p(x, y, z, T)$ 和 $\rho = \rho(x, y, z, T)$, 所以式(1-21)对于各向同性非均质的介质仍是正确的。

如果物体内部没有热源, 则热源项可以略去, 式(1-21)可写成

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (1-22)$$

由于它不是线性的, 数值计算时上式使用不方便, 但可使用校正温度而重新安排

$$\theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_{T_0}^T \lambda dT$$

式中 λ_0 ——基准温度 T_0 的导热系数。

于是式(1-22)可重写为

$$\frac{\rho c_p}{\lambda_0} \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (1-23)$$

这样, 进行数值解就方便得多。

对于均质各向同性材料, 导热系数认为是常数时, 式(1-22)可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{\lambda}{\rho c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ &= \alpha \nabla^2 T \end{aligned} \quad (1-24)$$

式中 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ ——拉普拉斯算子;

α ——热扩散率。

二维不稳定导热时, 式(1-24)可简化为

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1-25)$$

一维不稳定导热时, 式(1-24)可简化为

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (1-26)$$

不稳定导热方程属于抛物型偏微分方程。

如果是稳定导热, $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$, 式(1-24)可简化为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

二维稳定导热时, 则为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{二维拉普拉斯方程})$$

一维稳定导热时, 则为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

稳定导热方程属于椭圆型偏微分方程。

二、圆柱坐标和球坐标系导热微分方程

在上一节中是根据直角坐标系建立方程式的。实际问题往往涉及柱面对称或球面对称问题，且边界条件给定在一个表面上，因此表面具有一个坐标保持不变的性质。在这些情况下，运用圆柱和球坐标系是适合的。

通过坐标转换，式(1-21)可以改写为圆柱坐标 (r, ϕ, z) 和球坐标 (r, ϕ, θ) 时的形式。对于圆柱坐标系，如图1-7(a)所示，直接按内、外两个圆弧面和其他四个平面组成的微元体积，在导热过程中热量必须按收支平衡的原则导得。此时，微元体积为

$$dV = (rd\phi)dzdr$$

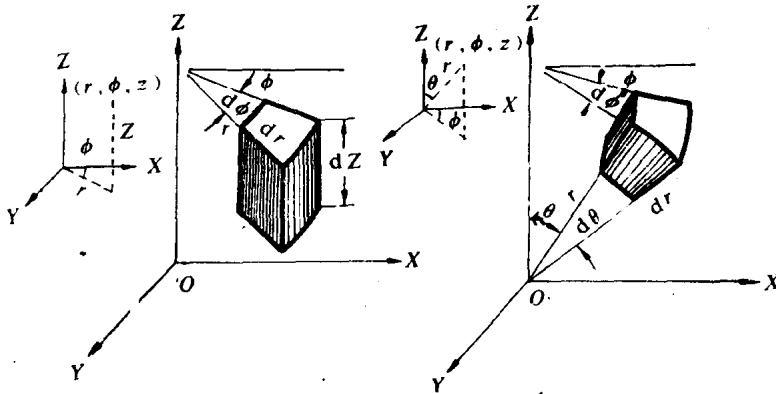


图1-7 圆柱和球坐标系导热微分方程推导示意图

沿圆弧面法线方向传入微元体积的净热流量为

$$\begin{aligned} dQ_r &= \frac{\partial}{\partial r} ((rd\phi)dzq_r) dr \\ &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) d\phi dz dr \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) dV \end{aligned}$$

沿 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 平面法线方向传入微元体的净热流量为

$$dQ_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi} (drdzq_\phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (q_\phi) dV$$

注意， ϕ 和 $\phi+d\phi$ 两平面法线方向的间距为 $dn = r d\phi$ ，因此

$$q_\phi = -\lambda \frac{\partial T}{r \partial \phi}$$

于是

$$dQ_\phi = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) dV$$

根据直角坐标系导热微分方程推导的思路，继续下去，最后不难整理成下式

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q'$$

(1-27)

对于球坐标系，参照图1-7(b)，由内、外两个球面和其他四个平面所组成的微元体积为

$$dV = (r d\theta) (r \sin\theta d\phi) dr$$

沿球面法线方向传入微元体的净热流量为

$$\begin{aligned} dQ_r &= \frac{\partial}{\partial r} \left((r \sin\theta d\phi) (rd\theta) q_r \right) dr \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) dV \end{aligned}$$

沿 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 两平面的法线方向的间距为 $(r \sin\theta) d\phi$, 因此

$$dQ_\phi = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)$$

沿 θ 和 $\theta+d\theta$ 两平面的法线方向的间距为 $rd\theta$, 因此

$$\begin{aligned} dQ_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left((r \sin\theta d\phi) dr q_\theta \right) d\theta \\ &= -\frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) dV \end{aligned}$$

同理, 最后不难整理成下式

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + Q' \end{aligned} \quad (1-28)$$