

52.881

188

光 測 彈 性 力 学

II

M. M. 弗罗赫特 著

黎 仲 鼎 译

M. M. FROCHT
PHOTOELASTICITY
Vol. II
JOHN WILEY & SONS
1948

内 容 简 介

本书是卷 I 的续篇,论述光测弹性力学的基本原理与方法。内容丰富、实用。

全书共分十四章及一个附录。前六章旨在介绍为有效地利用光测方法所必需的弹性力学知识,并考察了材料对应力状态的影响问题。第七至九章论述确定孤立点上主应力的方法,以及卷 I 中未予处理的二维问题中的完全等厚条纹图。最后五章专门讲述三维光测弹性力学的理论、技术和应用。实例很多;并对普遍三维应力光性定律作了新的论证。附录中介绍了三维光测技术中的一种新材料——福斯特塑料。对其化学成分、力学性能以及光弹性适用性等均有论述。

光 测 弹 性 力 学 II

[美] M. M. 弗罗赫特 著

黎 仲 鼎 译

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

北京市书刊出版业营业许可证出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1966 年 3 月第一版	开本: 850×1168 1/32
1966 年 3 月第一次印刷	印张: 16 3/16
精装: 0001—1,610	插页: 5
平装: 0001—1,340	字数: 425,000

统一书号: 13031·2240

本社书号: 3402·13—2

定价: [科七] 精装本 3.30 元
平装本 2.80 元

目 录

第一章 二维协调方程及基本应力函数	1
第一部分 协调方程及应力函数.....	1
§ 1.1. 引言	1
§ 1.2. 直角坐标中的应变分量	2
§ 1.3. 极坐标中的应变分量	5
§ 1.4. 以直角应变分量表示的协调方程	7
§ 1.5. 以直角应力分量表示的协调方程	8
§ 1.6. 边界条件	10
§ 1.7. 艾雷应力分量和应力函数	12
§ 1.8. 以应力函数表示的协调方程	14
§ 1.9. 有限厚度杆中的应力状态	17
§ 1.10. 单连通体和多连通体	19
§ 1.11. 二维弹性力学的精确解的数学条件	20
第二部分 初等直角坐标应力函数.....	21
圣维南原理.....	21
§ 1.12. 纯拉伸时的应力函数	21
§ 1.13. 纯弯曲时的应力函数	23
§ 1.14. 纯剪切时的应力函数	25
§ 1.15. 等效系统	26
§ 1.16. 圣维南原理	27
第二章 半无限平板内的径向应力	32
§ 2.1. 径向应力, 记号	32
§ 2.2. 作用于半无限平板边缘上的集中载荷产生的应力, 弗拉蒙解	33
§ 2.3. 弗拉蒙解的光弹性验证	39
§ 2.4. 等倾线和主应力迹线	42
§ 2.5. 倾斜的集中载荷	45

§ 2.6. 平行于板直边的载荷	47
§ 2.7. 对于倾斜载荷和平行载荷的光弹性验证	49
§ 2.8. 直角坐标应力分量	54
§ 2.9. 影响线	55
§ 2.10. 多个垂直集中载荷	57
§ 2.11. 作用于有限区间上的均布压力 (图解法)	58
§ 2.12. 对于均布压力的分析解	59
§ 2.13. 理论应力条纹图和光弹性应力条纹图	65
§ 2.14. 应力函数 $\phi = Cr^2\theta$	69
§ 2.15. 作用于半无限平板有限部分上的均布载荷 (另一处理法)	71
§ 2.16. 集中载荷通过刚性压模作用所引起的应力	73
§ 2.17. 集中载荷通过长板条传递于弹性基础	73
§ 2.18. 力偶引起的应力	76
第三章 楔和梁内的径向应力	79
第一部分 楔	79
§ 3.1. 引言	79
§ 3.2. 沿楔对称线作用于楔顶的集中载荷	79
§ 3.3. 简化的永久补偿器	82
§ 3.4. 沿垂直于楔轴的方向作用于楔顶的集中载荷, 图 3.4(a)	82
§ 3.5. 载荷垂直于楔轴时的直角坐标应力分量	86
§ 3.6. 三角形悬臂梁	89
§ 3.7. 沿任意方向作用于楔顶的集中载荷	93
§ 3.8. 理论应力条纹图和光弹性应力条纹图	94
第二部分 集中载荷作用于矩形梁	101
§ 3.9. 集中载荷的效应	101
§ 3.10. 近似的理论应力条纹图	103
§ 3.11. 对称截面上的应力	106
§ 3.12. 梁内的各向同性点	109
第四章 圆盘	115
第一部分 圆盘中的应力	115
§ 4.1. 引言	115

§ 4.2. 圆盘中的基本应力	115
§ 4.3. 作用于圆盘的对径集中载荷	118
§ 4.4. 直角坐标应力分量	122
§ 4.5. 承受弦向载荷的圆盘	126
§ 4.6. 弦向载荷下的直角坐标应力分量	128
第二部分 圆盘的光弹性分析——理论及实验结果	131
§ 4.7. 受对径集中载荷的圆盘中条纹或等色线的双极坐标方程	131
§ 4.8. 条纹或等色线的笛卡儿方程	132
§ 4.9. 绘制条纹的一般方法	136
§ 4.10. 等倾线	139
§ 4.11. 渐近线方程	144
§ 4.12. 主应力迹线	147
§ 4.13. 圆盘作为光弹性测力计	149
第五章 集中载荷作用于无限平板	152
§ 5.1. 由应力函数 $\phi = Cr\theta \sin \theta$ 求应变和位移	152
§ 5.2. 多连通体中的位移	156
§ 5.3. 应力函数 $\phi = Ar \cos \theta \ln r$	158
§ 5.4. 作用于无限平板上一点的集中力	161
§ 5.5. 作用于无限平板微小区域内的集中载荷组	165
§ 5.6. 作用于有限宽度杆上的集中载荷	167
第六章 材料对应力分布的影响	169
第一部分	169
§ 6.1. 引言	169
§ 6.2. 特殊情形和数值例子	169
§ 6.3. 泊松比对应力状态影响的光弹性法测定	172
第二部分 铝和电木	174
带中心圆孔的板在孔内用销钉加载时的应力集中系数	174
§ 6.4. 通过孔内销钉加载的板	174
§ 6.5. 用到应变仪测量的试验	177
§ 6.6. 光弹性结果	179

§ 6.7. 对结果的讨论	183
第三部分 钢和电木	189
§ 6.8. 等厚应力条纹图	189
§ 6.9. 钢和电木中的边界应力	189
§ 6.10. 实验和理论等厚条纹图的比较	192
§ 6.11. 对称截面上的应力	193
§ 6.12. 小结	196
第七章 横向伸长计和等厚线	197
§ 7.1. 引言	197
第一部分 横向伸长计	197
§ 7.2. 横向伸长计原理	197
§ 7.3. 干涉条纹的简要原理	198
§ 7.4. 干涉仪	199
§ 7.5. 机械式横向伸长计	203
§ 7.6. 电阻伸长计	206
§ 7.7. 对横向伸长计的一般评述	208
§ 7.8. $(p + q)$ 的近似值	209
第二部分 用实验方法求等厚应力条纹图	212
§ 7.9. 用反射光法求等厚条纹图	212
§ 7.10. 设备和程序	213
§ 7.11. 钢环的等厚条纹图	215
§ 7.12. 等厚条纹图的意义和推广	216
§ 7.13. 用透射光法得出的等厚应力条纹图	218
第三部分 等厚条纹图——诺培尔图解法	220
§ 7.14. 问题的记号和提法	220
§ 7.15. 方向微商	221
§ 7.16. 等厚线的诺培尔方程	222
§ 7.17. 等厚线的图解法	226
§ 7.18. 自由边界和等厚线级数	228
§ 7.19. 其他方法	230
第八章 拉普拉斯方程的数值解法	233
第一部分 代数调和法——基本情形	233

§ 8.1.	引言. 调和函数. 狄里希勒定理	233
§ 8.2.	无奇点的调和函数的某些另外的属性	234
§ 8.3.	基本方程	235
§ 8.4.	控制值. 定义	236
§ 8.5.	不完全的和完全的(3×3)矩形的控制值, 图 8.2(a)	237
§ 8.6.	不完全的和完全的(3×4)矩形的控制值, 图 8.3	238
§ 8.7.	不完全的和完全的(4×3)矩形的控制值, 图 8.4	238
§ 8.8.	不完全的和完全的(4×4)正方形的控制值, 图 8.5	239
§ 8.9.	拉普拉斯周界值	242
§ 8.10.	以 P 和 P 表示的各基本图形的公式汇总	242
第二部分 迭代法		244
§ 8.11.	迭代法. 引言	244
§ 8.12.	用迭代法解线性方程组	244
§ 8.13.	用迭代法作调和运算的程序. 修正的次序	246
第三部分 用线性交汇法求初值		247
§ 8.14.	初值. 线性交汇法	247
§ 8.15.	线性交汇法作为横向伸长计	249
§ 8.16.	线性交汇法的进一步应用	250
第四部分 成块迭代法		254
§ 8.17.	矩形面积	254
第五部分 一般边界		257
§ 8.18.	不规则边界和曲线边界	257
§ 8.19.	基本矩形在调和法中的应用	262
§ 8.20.	粗网络和混合网络	263
§ 8.21.	粗网络中的初值	265
第六部分 差分法		272
§ 8.22.	差分法	272
第七部分 张弛法		277
§ 8.23.	张弛法	277
§ 8.24.	泊松方程	285
附录		285
§ 8.25.	由泰勒级数推导四点影响方程	285

§ 8.26. 用表格求解矩形面积	287
§ 8.27. 辅助表	288
第九章 保角变换. 极坐标与双极坐标在调和法中的运用 ...	294
§ 9.1. 变换方程. 对应点和对应曲线	294
§ 9.2. 正交变换	295
§ 9.3. 伸缩率	297
§ 9.4. 保角变换	298
§ 9.5. 调和函数的根本特性是不为保角变换所改变	301
§ 9.6. 极坐标	303
§ 9.7. 双极坐标	303
§ 9.8. 两个圆决定两极的位置	309
例 9.1. 垂直作用于半无限平板的集中载荷	310
例 9.2. 作用于半无限平板的倾斜载荷	314
例 9.3. 受对径集中载荷的圆环	316
例 9.4. 带中心圆孔杆的拉伸	318
例 9.5. 带深槽杆的拉伸. 双极坐标	321
第十章 三维应力光性定律	331
§ 10.1. 引言	331
§ 10.2. 次主应力	331
§ 10.3. 三维应力光性定律	332
§ 10.4. 与光线平行的正应力	335
§ 10.5. 与光线共面的剪应力	336
§ 10.6. 纯拉伸时的次主应力	337
§ 10.7. 纯弯曲时的次主应力	341
§ 10.8. 可变次主应力	345
§ 10.9. 圆盘中的次主应力	347
§ 10.10. 圆盘在斜射光下的应力条纹图	349
§ 10.11. 旋转的效应	355
§ 10.12. 实验验证	358
第十一章 三维光测技术	361
§ 11.1. 引言	361
§ 11.2. 材料和准备工作	361
§ 11.3. 对圆轴加载的方法	362

§ 11.4. 厚板中的拉应力	364
§ 11.5. 电木在高温时的抗拉强度	366
§ 11.6. 电炉和加热	367
§ 11.7. 加载构架	368
§ 11.8. 夹具	369
§ 11.9. 模型	371
§ 11.10. 切片法	371
§ 11.11. 时间应力	373
§ 11.12. 条纹级数的确定	378
§ 11.13. 补偿器法	380
§ 11.14. 几何法	381
§ 11.15. 条纹值	385
§ 11.16. 由曲边模型或不规则模型得出的应力条纹图	386

第十二章 斜射光和旋转效应的应用 389

§ 12.1. 引言	389
第一部分 圣维南扭转	390
§ 12.2. 纯扭转的基本方程	390
§ 12.3. 边界应力	395
§ 12.4. 圆轴内的应力	397
§ 12.5. 边界应力	399
§ 12.6. 径向线上的应力	401
§ 12.7. 扭转时的近似理论应力条纹图	403
§ 12.8. 变直径圆轴的扭转。应力集中	406
§ 12.9. 二维中的主应力分离	414
§ 12.10. 对称截面	417
第二部分 弯曲应力	421
§ 12.11. 弯曲应力	421

第十三章 受拉伸与弯曲的圆轴 426

第一部分 引论	426
§ 13.1. 本章的范围	426
§ 13.2. 记号	426

§ 13.3. 应力集中系数。各种方法	427
第二部分 受拉伸的带横孔圆轴	429
§ 13.4. 情形 1 ($r/d = 0.164$)	429
§ 13.5. 情形 2 ($r/d = 0.323$)	433
§ 13.6. 情形 3 ($r/d = 0.067$)	435
§ 13.7. k_3 与 k_2 的关系	436
§ 13.8. 对结果的解释。独立片层作用	438
第三部分 带横孔的受弯圆轴内的应力	440
疲劳试验与应变测量结果之间的关系	440
§ 13.9. 轴的实心部分的应力分布	440
§ 13.10. 情形 1 ($r/d = 0.145$)	440
§ 13.11. 情形 2 ($r/d = 0.07$)	445
§ 13.12. 光弹性应力集中系数	445
§ 13.13. 片层作用理论	446
§ 13.14. 按片层作用假定的应力集中系数	450
§ 13.15. 与疲劳试验和应变测量结果的比较	450
§ 13.16. 片层作用假定引起的误差。其他误差	452
§ 13.17. 结论	453
第四部分 圆角和槽	454
§ 13.18. 受拉伸的带圆角轴, 图 13.27	454
§ 13.19. 受拉伸的带半圆槽轴, 图 13.29	456
§ 13.20. 受拉伸的带三个相邻槽的圆轴	458
§ 13.21. 带槽空心轴, 图 13.33	461
第十四章 散射光和会聚光	463
§ 14.1. 非偏振光的散射	463
§ 14.2. 偏振光的散射	463
§ 14.3. 双折射介质中的散射	465
§ 14.4. 散射当作光学检偏振镜	466
§ 14.5. 散射光的应力光性定律	467
§ 14.6. 用散射光作光弹性应力分析	468
§ 14.7. 边界应力	473
§ 14.8. 一般情形	474

§ 14.9. 希耳切会聚光法	476
附录 用于三维光测弹性力学的一种新材料——福斯特塑料	479
第一部分 一般特性	479
§ A.1. 引言	479
§ A.2. 化学成分	479
§ A.3. 固化时间	480
§ A.4. 尺寸	480
§ A.5. 机械加工性及透明性	480
§ A.6. 高温时福斯特塑料的应变	480
§ A.7. 弹性状态时的最小温度, 临界温度	481
§ A.8. 冻结应力条纹图	483
§ A.9. 时间应力	483
§ A.10. 弹性模量和条纹值	484
§ A.11. 福斯特塑料的蠕变	484
§ A.12. 临界温度时的蠕变	485
§ A.13. 条纹级数作为应变的函数	486
第二部分 用福斯特塑料作定量试验	487
§ A.14. 带中心圆孔的受拉平杆	487
§ A.15. 带双曲线深凹口的受拉轴	489
内容索引	493

第一章 二維協調方程及基本应力函数

第一部分 協調方程及应力函数

§ 1.1. 引言

本书前几章将先处理一些数学弹性力学的问题, 这些问题对于光测弹性力学工作者是直接有用的. 虽然光测弹性力学是应力分析的一种实验方法, 但由偏振光镜所得的应力数据的解释, 却常常要以弹性力学中的定理和关系为依据.

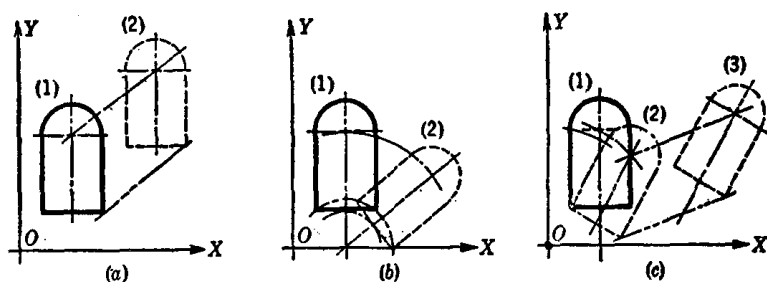


图 1.1 刚体运动的图示

(a) 纯平移; (b) 纯旋转; (c) 平面运动.

弹性理论本身讨论应力和应变以及产生它们的载荷之间的基本关系. 应变的概念是由变形的概念导出来的, 而变形则又与各点的位移相关联. 这里, 我们必须对刚体位移及引起变形和应变的位移加以区别.

在刚体运动中, 物体的形状和尺寸保持不变. 物体中任意二点之间的距离保持不变, 从而任意二线段之间的角度也就保持不变. 图 1.1 表示平面刚体运动的三种基本型式, 即纯平移、纯旋转及二者的联合运动(一般平面运动). 这些都是不会发生任何应力

及应变的假想物体的运动。刚体运动是动力学的处理对象。

弹性力学则讨论发生变形的位移。这里，物体的形状、尺寸、各点之间的距离、直线之间的角度总是有所改变的，虽则在金属物体中这些尺寸变化往往小到极难测出。受拉的杆、受弯的梁、受扭的轴等都是应变体或变形体的简单例子。

弹性力学的范围通常限于讨论胡克 (R. Hooke) 定律得以成立的弹性范围以内的均匀各向同性体。在弹性范围内，当载荷卸除后，应力和变形能完全恢复。弹性范围以外的变形则在塑性力学中处理。

§ 1.2. 直角坐标中的应变分量

图 1.2 表示一应变体的截面及固定坐标系 OX 和 OY 。现在来看二相交直线 OA 及 OB ，它们在未受载荷前与坐标轴重合。但在加载以后，就使点 O 、 A 及 B 移动到新的位置点 O' 、 A' 及 B' ，而直角 AOB 变为角 $A'O'B'$ 。一点的位移将用分别平行于 X 、 Y 、 Z 轴的三个直角分量 u 、 v 、 w 来表示。下面将假定这些位移是坐标 x 、 y 、 z 的连续函数¹⁾。我们仅限于讨论二维的情形。令 u 、 v 表原点 O 的位移，则点 A 和 B 处的位移分量 u_a 、 v_a 、 u_b 、 v_b 将分别为：

$$u_a = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

$$v_a = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx,$$

$$u_b = u + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

$$v_b = v + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

如图 1.2 所示，长度 $O'A''$ 可表示成：

1) 还应假定这些位移对坐标的偏微商是小量，使得这些微商的所有较高次幂与其一阶幂相比较可忽略不计。这就是通常所说的微小变形假定。

$$\begin{aligned}
 O'A'' &= dx + u_a - u = dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u \\
 &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx.
 \end{aligned}$$

假定 $O'A'$ 和 $O'A''$ 间的角度 $\Delta\theta_1$ 很微小,以致它的余弦可取为 1, 这样就可取长度 $O'A'$ 等于 $O'A''$. 因此,长度 OA 的变形 δ_x 为:

$$\delta_x = O'A'' - OA = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx - dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

根据定义,应变 ϵ_x 为

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (a)$$

同理有

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (b)$$

(1.1)

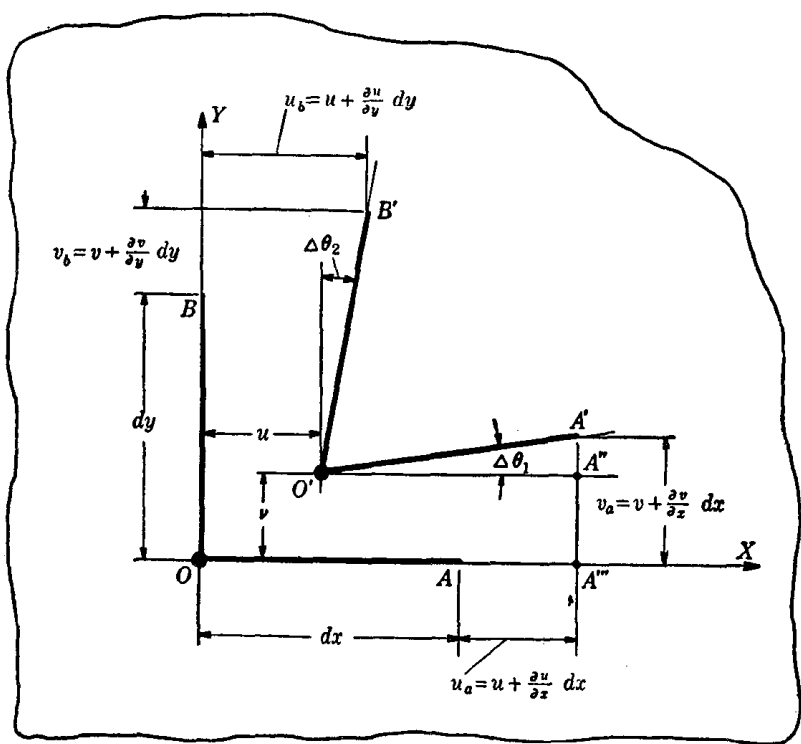


图 1.2 笛卡儿坐标系中的位移和记号

此外,我们记得 $\Delta\theta_1$ 和 $\Delta\theta_2$ 都是微小角度,便有

$$\tan \Delta\theta_1 \approx \Delta\theta_1 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \frac{1}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\tan \Delta\theta_2 \approx \Delta\theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \frac{1}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此,原点 O 处的剪应变 γ_{xy} [其定义是直角 AOB 的角变(见卷 I, §1.18)] 是

$$\gamma_{xy} = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.2)$$

一般地说,在三维问题中有以下给出的六个应变分量:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}.$$

在二维或平面问题中必须区别两类不同的状态: 平面应变 和 平面应力. 平面应变状态的定义是: 位移 u 和 v 仅是 x 和 y 的函数, 而位移 w 为零. 因此应变分量 ϵ_z , γ_{xz} 和 γ_{yz} 为零, 而只剩下

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

由平面应变而形成的应力分量是 σ_x , σ_y , σ_z 和 τ_{xy} , 它们都只是 x 和 y 的函数.

于是, 平面应变状态的根本特征是: ϵ_z 为零, 而相应的应力 σ_z 却不为零.

另一方面,平面应力则定义为如下的应力状态:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

这表示既存的应力都平行于 XY 平面. 应力分量 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 一般都是坐标 x , y 和 z 的函数. 然而, 在极薄的平板内, 可以将各应力看作只是 x 和 y 的函数, 亦即, 可以认为各应力沿板厚不变¹⁾.

1) N. L. G. Filon 曾引入广义平面应力的概念, 其中以沿板厚的平均应力来代替实际应力. 可以证明, 平均应力满足平衡微分方程和其它基本关系式, 见 Coker 和 Filon 著 "Treatise on Photoelasticity", § 2.23.

§ 1.3. 极坐标中的应变分量

令图 1.3 中的 $ABCD$ 代表一未变形面元的位置, 并令 $A'B'C'D'$ 是该面元在变形后的位置. 我们分别用 u 和 v 表示点 A 的径向和切向位移, 而以 ϵ_r 和 ϵ_θ 表示相应的应变, 用 $\gamma_{r,\theta}$ 表示剪应变. 由观察可知

$$A'B'' = dr + \frac{\partial u}{\partial r} dr.$$

因此, 径向的变形是

$$A'B'' - AB = \delta_r = \frac{\partial u}{\partial r} dr,$$

径向应变的表达式便为

$$\epsilon_r = \frac{\delta_r}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (1.3)$$

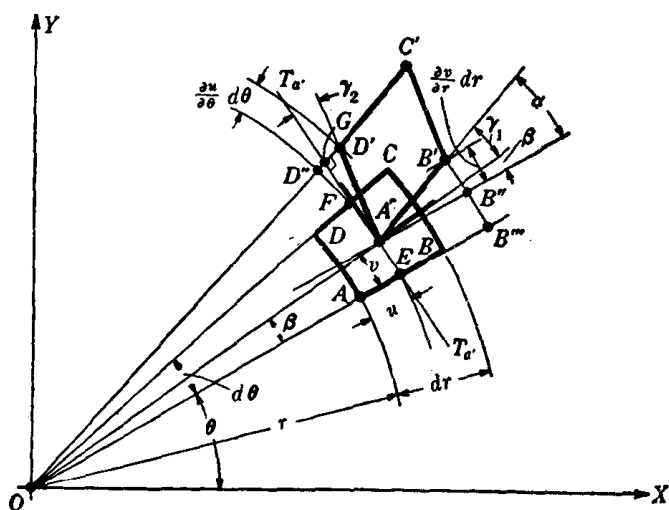


图 1.3 图示极坐标中的位移和记号

为了寻求切向应变的表达式, 我们发现, 线元 AD 有双重变形: 其一是因径向位移引起的, 另一是因切向位移引起的. 因此, 令弧段 AD 先作径向位移至位置 EF , 那么其长度将是 $(r + u)d\theta$.

其次令线元 EF 移动至位置 $A'D''$ 。这时长度 ED'' 为

$$ED'' = (r + u)d\theta + v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta.$$

于是长度 AD 的切向变形 δ_θ 可表示成

$$\begin{aligned}\delta_\theta &= (r + u)d\theta + v + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta - r d\theta - v \\ &= u d\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} d\theta,\end{aligned}$$

而切向应变 ϵ_θ 成为

$$\epsilon_\theta = \frac{\delta_\theta}{r d\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (1.4)$$

由此可见，切向应变不仅是切向位移 v 的函数，而且还是径向位移 u 的函数。

最后，我们来确定剪应变 $\gamma_{r,\theta}$ ，它是在点 A' 处的直角的角变。此角由二部分组成： γ_1 ，它代表边 $A'B'$ 与过点 A' 的径向线之间的夹角； γ_2 ，它是边 $A'D'$ 与切于圆周上点 A' 的切线 $T_{a'}$ 间的夹角。我们通过点 A' 画一条与边 AB 平行的辅助线 $A'B''$ ，并以 β 表此线与通过点 A' 的径向线之间的夹角。此角代表该线元作为整体的刚体旋转。

令

$$\gamma_1 + \beta = \alpha.$$

由图 1.3 并考虑到 α 是微小角度，我们近似地有

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \alpha = \frac{B''B'}{B''A'} \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial r} dr \right) \frac{1}{dr} = \frac{\partial v}{\partial r}.\end{aligned}$$

同理，

$$\tan \beta = \beta = \frac{v}{r},$$

因此

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (1.5)$$