高等学校教学用書

复变函数論

B. Л. 岡冶洛夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

复变函数論

В. Л. 岡冷洛夫著
高　徹　譯

高等教育出版社

本書是根据俄罗斯联邦教育部教科書出版社(Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР)出版的岡冶洛夫(В Л. Гончаров)著"复变函数論"(Теория функций комплексного переменного)1955年版譯出的，原書經俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院物理数学系的教学参考書。

复 变 函 数 論

В. Л. 岡冶洛夫著

高 徹 譯

高等教育出版社出版 北京宣内承恩寺七号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

新华印刷厂印装 新华书店发行

統一书号 13010·415 开本 850×1168 1/32 印张 9 13/16 字数 248,000 印数 1—18,400

1958年3月第1版 1960年3月北京第6次印刷 定价(6)￥0.95

目　录

第一章　复数

第二章　函数·極限·級数

第三章　整有理函数和分式有理函数

第四章　初等超越函数

第五章　导数及积分

第六章　函数列和函数級数

第七章 勾犀积分、解析函数的概念

第八章 奇点、复变函数論在代数和分析上的应用

第九章 保角映像、复变函数論在物理問題中的应用、复变函数論的流体力学解釋

第一章　复数

§1. 复数集

讀者們無疑已經不只一次遇到过复数。最初講授复数还是初等代数課程里的事。

在复变函数論这一課程中，我們首先必須系統的来講授一下复数。在实变函数論中，自变数和依变数的値都是取之于实数集；复变函数論則不然，其中自变数和依变数的値則都取自复数集①。

在数学分析的各个分支以及一些别的数学部門中，可以是采取这一种("实的")观点，也可以是采取另一种("复的")观点。比如說，除了(通常在学校中所講授的)"实"解析几何之外，又存在"复"解析几何，它所討論的是一次和二次方程的性質，这些方程的变数和系数都假定取的是复数値；同样的說法也适用于(高次)代数曲綫論，当引进复数値时，这門理論与"代数函数論"可以对比。对于微分几何，情形也是如此。除了这些例子之外，我們現在还再举出微分方程論，它在搬到复数域之后，就变成了"微分方程的解析理論"了。

形如
$$z=x+iy \tag{1}$$
这样的結合叫做复数，这里的 x 和 y 是实数，i 則是規定好了的一个数学符号，叫做"虛單位"。符号 i 的特性下面卽將談到：該項特性和复数四則运算的定义密切有关。在 i 的性質尙未說明，复数

---

① 在这里有意識地略去兩小段原文，卽在俄文中將"TФДП"这一簡写符号表示"实变函数論"，"TФКП"这一簡写符号表示"复变函数論"，因这兩簡写符号在中文里并無意义，故不譯出——譯者。

的运算尚未定义之前，复数也同样沒有定义：在这样的情况之下，复数無异是一对实数(x, y)。給了一个复数z，在这样的情况之下，就表示給了兩个实数：x和y。

x名为z的**实部分**，y名为z的**虚部分**。

記号

$$x = Rz, \quad y = Iz \tag{2}$$

甚为通用。

由是，对于任意一个复数z，我們可以写

$$z = Rz + iIz \tag{3}$$

来代替(1)。

表示"实部分"的符号R和表示"虚部分"的符号I分别是拉丁字 *realis*（实的）和 *imaginarins*（虚的）的縮写。从后面一个字，我們可以看出符号i的起源。

例。 $R\{2+3i\}=2, I\{2+3i\}=3.$

Rz和Iz这兩个式子显然都是复变数z的实函数。

我們簡写x代替$x+i0$，这样一来，我們就把复数$x+i0$和实数x等同看待。由是，所有的实数都可看作是虚部分为0的复数。虚部分不为0的复数叫做**虚数**。

同样，我們將$0+iy$簡写为iy，这种样子的复数叫做**純虚数**。

特别，$0+i0$写作0（零）。

等式。兩个复数当也只当它們的实部分和虚部分分别相等的时候，才被認为相等。

換句話說，假若z表示复数$x+iy$，z'表示复数$x'+iy'$，那末，等式

$$z = z' \tag{4}$$

就相当于兩个等式： $$x = x' \tag{5}$$

和 $$y = y'. \tag{6}$$

因此，一个复等式相当于两个实等式。

必須正确的理解上面所說的等式。这就是說，我們不仅認为从一对等式(5)和(6)可以推出等式(4)，而且也認为从等式(4)可以推出一对等式(5)和(6)[①]。

例如 $2+3i$ 和 $2+5i$ 就不相等，$2+3i$ 和 $1+3i$ 也不相等；事实上，3不等于5，2不等于1。

下列关于复等式的两个性質乃属显而易見，無須詳細解釋：

(1) 若 $z=z'$，則 $z'=z$；

(2) 若 $z=z'$，又 $z'=z''$，則 $z=z''$。

不等式。記号 $\neq$ 在运用于复数时，是用作等号的否定。换句話說，关系

$$z\neq z'$$

乃是表示：等式(5)和(6)中至少有一个不成立。

显而易見，关系 $z'\neq z$ 和 $z\neq z'$ 相当。

記号 $<$（小于）和 $>$（大于）不直接用于虚数。

复数的几何表示

复数 $z=x+iy$ 和实数对 (x, y) 成一一对应。而实数对 (x, y)，正如我們在解析几何中所知道的，又与坐标平面 Oxy 上的点成一一对应。由是可以推知，复数 $z=x+iy$ 与座标平面 Oxy 上的点成一一对应。

我們就說：数 $z=x+iy$ 由平面 Oxy 上的点 (x, y)“表出”。

反过来，数 $z=x+iy$ 有时叫做这点 (x, y) 的附标。但这个术語已經陈旧，很少用到。容易看出，实数是由 Ox 軸上的点表出；純

① 我們要注意，在数学中有时会把两个不完全一样的东西看作相等。例如两个向量，假若它們平行，且有同样的長度和同样的指向，有时就把它們看作相等，尽管它們的始点和終点不一样。

虚数是由 Oy 軸上的点表出；复数（同时也是实数）0 是由坐标系的原点 O 表出。

虚数是由平面 Oxy 上不在 Ox 軸上的点表出(圖 1)。

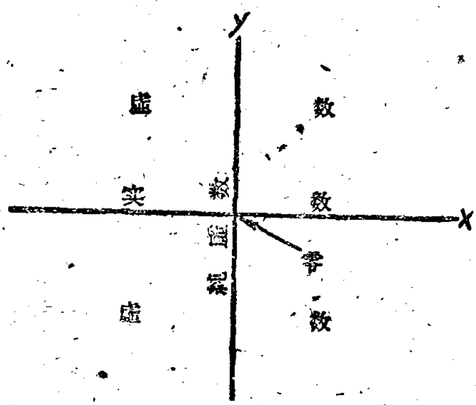

圖 1.

在复变函数論中，Ox 軸也叫做实軸，Oy 軸也叫做虚軸。把“坐标系的原点”簡称为“原点”；把“表示复数 z 的点”說成“z 点”；把“坐标平面”說成“复平面”。

我們現在看出，坐标平面以及它上面的点已經被选来作为一个几何模型，用以表示兩組不同的对象：一方面是实数对，另一方面則是复数。坐标平面这样的双重用法，它本身并不会引起矛盾；但是对于那些同时随便使用兩种不同的几何表示的人，矛盾却可能因之發生。

比如說，讀者不难在 Oxy 平面上作出函数 $y=x^2+1$ 的圖形（拋物綫）；但若他又要在这平面上去寻找該拋物綫与 Ox 軸的交点 $x=\pm i$，那他就錯了。

§2. 复数的四則运算

复数 $z=x+iy$ 和实数对(x,y)不同之处在于对于复数我們定义了数学运算：加、减、乘、除（而对于实数对，就沒有定义这些运算）。

复数的正运算——加法和乘法——定义如下：这兩种运算是按照通常的代数規則① 并在下列补充条件之下来实施的：这条件

① 意思就是說：形如 $x+iy$ 的結合是解釋成为 x 和 iy 之和；iy 則是解釋成为 i 和 y 之积。

就是在遇到乘积 $ii=i^2$ 时,則代之以(-1)。等式

$$\boxed{i^2=-1} \tag{7}$$

表明了虚單位的固有性質。减法和除法可以定义（我們在下面將要看到）成为加法和乘法的逆运算；同时，它們的算法（我們將証明）也是按照上面所說的規則来实施的。

我們現来詳細說明每一运算的定义。我們先規定下面的記号：

$$z=x+iy;\quad z_1=x_1+iy_1;\quad z_2=x_2+iy_2;\quad z_3=x_3+iy_3;$$
$$\zeta=\xi+i\eta.$$

加法的定义:

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2). \tag{8}$$

我們要注意,將复数写成和数 $x+iy$ 的形狀，这并不会与我們关于加法所下的定义發生矛盾。

实际上，$x=x+i0$, $iy=0+iy$;將这兩数相加,即得

$$(x+i0)+(0+iy)=(x+0)+i(0+y)=x+iy.$$

我們不难証明加法的各項定律成立:

I. 交換律:

$$z_1+z_2=z_2+z_1. \tag{9}$$

II. 結合律:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3). \tag{10}$$

事实上,我們有

1) $$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$z_2+z_1=(x_2+x_1)+i(y_2+y_1),$$

兩个等式右边是相等的,因为对于实数来說,交換律是成立的。

2) $$(z_1+z_2)+z_3=[(x_1+x_2)+x_3]+i[(y_1+y_2)+y_3],$$
$$z_1+(z_2+z_3)=[x_1+(x_2+x_3)]+i[y_1+(y_2+y_3)],$$

兩个等式右边是相等的,因为結合律对实数是成立的。

减法的定义。

所謂求差数 z_2-z_1，即从 z_2 减去 z_1，意思就是去寻求满足等式

$$z_1+\zeta=z_2$$

的数 ζ（关于 ζ 解出方程）。利用加法的定义，这方程可写成：

$$(x_1+\xi)+i(y_1+\eta)=x_2+iy_2;$$

从等式的定义，即可推知：

$$\begin{cases} x_1+\xi=x_2 \\ y_1+\eta=y_2, \end{cases}$$

由是即得：

$$\begin{cases} \xi=x_2-x_1 \\ \eta=y_2-y_1, \end{cases}$$

因此，
$$\zeta=(x_2-x_1)+i(y_2-y_1).$$

由此即得：

$$(x_2+iy_2)-(x_1+iy_1)=(x_2-x_1)+i(y_2-y_1). \qquad (11)$$

假若我們按照"通常的代数規則"来运算，也可以立刻得出同样的結果。

数 $(-z)$（即 $0-z$）叫做負 z。

减去某一数，意思也就是說加上它的負数。

乘法的定义。

利用"虚單位的固有性質"，我們有：

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)&=x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+i^2y_1y_2=\\ &=x_1x_2+i(x_1y_2+x_2y_1)+(-1)y_1y_2=\\ &=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).\end{aligned}$$

于是，乘法可以由下面公式定义：

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1). \qquad (12)$$

我們要注意，在复数 $z=x+iy$ 的写法中，量 iy 实际上是 i 与

y 之积。事实上，

$$(0+i\cdot 1)(y+i\cdot 0)=(0\cdot y-1\cdot 0)+i(0\cdot 0+1\cdot y)=iy.$$

我們現来驗証乘法的各項規律成立：

III. 交換律：

$$z_1z_2=z_2z_1. \tag{13}$$

IV. 結合律：

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3). \tag{14}$$

实际上，我們有：

3) $$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1),$$
$$z_2z_1=(x_2x_1-y_2y_1)+i(x_2y_1+x_1y_2),$$

二式右边显然是相等的。

4) $$(z_1z_2)z_3=[(x_1x_2-y_1y_2)x_3-(x_1y_2-x_2y_1)y_3]+ +i[(x_1x_2-y_1y_2)y_3+(x_1y_2+x_2y_1)x_3],$$
$$z_1(z_2z_3)=[x_1(x_2x_3-y_2y_3)-y_1(x_2y_3+x_3y_2)]+ +i[x_1(x_2y_3+x_3y_2)+y_1(x_2x_3-y_2y_3)],$$

二式右边显然也是相等的。

此外，(乘法关于加法的)分配律也成立：

V. $$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3. \tag{15}$$

实际上，

5) $$z_1(z_2+z_3)=[x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)]+ +i[x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)],$$
$$z_1z_2+z_1z_3=[(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)]+ +i[(x_1y_2+x_2y_1)+(x_1y_3+x_3y_1)],$$

二式右边是相等的。

定理 1. 乘积中若有一因子为 0，則积为 0。

此可由公式(12)推出，只須于其中令 $z_1=0$（因而 $x_1=y_1=0$）即可。借助乘法的結合律，定理可以推广到任意多个因子之积的

情形上去。

除法的定义

作 z_2 与 z_1 之比，亦即以 z_1 除 z_2，意思就是去寻求满足等式

$$z_1\zeta=z_2$$

的数 ζ（关于 ζ 解出方程）。利用乘法的定义，上式可以写成：

$$(x_1\xi-y_1\eta)+i(x_1\eta+y_1\xi)=x_2+iy_2.$$

这一复等式相当于两个实等式：

$$\begin{cases}x_1\xi-y_1\eta=x_2,\\ y_1\xi+x_1\eta=y_2.\end{cases}$$

这里的未知数是 ξ 和 η，假若方程组的行列式：

$$\begin{vmatrix}x_1 & -y_1\\ y_1 & x_1\end{vmatrix}=x_1^2+y_1^2$$

不为 0，我們的方程組即有一組唯一的解：

$$\xi=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2},\quad \eta=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}.$$

条件 $x_1^2+y_1^2\neq0$ 的意思就是説数 x_1 和 y_1 中至少有一不为 0，也就是説，$z_1\neq0$。由是，假若除数（分数的分母）z_1 不为 0，則用 z_1 除 z_2 是可能的，且比（分数）$\frac{z_2}{z_1}$ 具有唯一的值，即：

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+i\,\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2}. \tag{16}$$

但若 $z_1=0$（而 $z_2\neq0$），則所論的方程組关于 ξ 和 η 無解。

因此，用 0 去除异于 0 的数是不可能的。（至于用 0 除 0，那完全是不确定的，因为根据定理 1，0 与任何数之积皆为 0。）数 $\frac{1}{z}$ 叫做数 z（$z\neq0$）的倒数。用某一（异于 0 的）数去除，意思也就是説用它的倒数去乘。

我們現在来看一种重要的特别情形，即用实数去乘或去除的这种情形。在公式(12)和(16)中，令 $y_1=0$，即得

$$x_1(x_2+iy_2)=x_1x_2+ix_1y_2,$$

$$\frac{x_2+iy_2}{x_1}=\frac{x_2}{x_1}+i\frac{y_2}{x_1}, \qquad (x_1\neq 0).$$

因此，要想用实数去乘(或用异于 0 的实数去除)复数，只須用它去乘(或去除)复数的实部分和虛部分卽可(順便提一下，这也可以由分配律推出)。

我們現再指出一种更特殊的情形，那就是在用 1 去乘或去除时，复数不变：

$$z\cdot 1=z,\quad \frac{z}{1}=z.$$

定理 2. 以异于 0 的数除 0，結果为 0。

这可由公式(16)令 $z_2=0$(卽 $x_2=y_2=0$)得出。

定理 3. 若二数之积为 0，則至少有一因子为 0。

設 $z_1z_2=0$。若 $z_1\neq 0$，則 $z_2=\frac{0}{z_1}=0$。这就是說，或者 $z_1=0$，或者 $z_2=0$，定理于是証明。

利用乘法的結合律，定理可以推广到任意(有限)多个因子之积的情形上去。

定理 4. 若一分数为 0，則它的分子为 0。

設 $\frac{z_2}{z_1}=0$；則 $z_2=z_1\cdot 0$，由定理 2，$z_2=0$。

总結。

任意兩个給定的复数經四則运算中任一运算之后，可以产生一唯一的結果，只有用 0 去除这种情形除外，这种情形是不允許的。

(換言之，复数系“做成一域”。)

我們已經証明，复数的运算規律 I—V 和实数的运算規律是一样的。由此可以推知，从这几条規律所推演出来的一切代数恒等式，無論它的文字是取复数值或取实数値，結果皆同样成立。

例如: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$("平方差"),

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$("$n$方差"),

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^m b^{n-m}\text{("牛頓二項式定理")},$$

等等。

等式的性質

設 z_1 和 z_2 是兩个相等的复数,又設 z_3 也是一个复数,则下之等式成立:

(1) $z_1+z_3=z_2+z_3$,

(2) $z_1-z_3=z_2-z_3$,

(3) $z_1z_3=z_2z_3$,

(4) 若更設 $z_3\neq 0$,則

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{z_2}{z_3}.$$

我們現来証明(1)。假定 $z_1=z_2$,也就是假定 $x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$;要証明 $z_1+z_3=z_2+z_3$,也就是要証明 $x_1+x_3=x_2+x_3$ 和 $y_1+y_3=y_2+y_3$。根据实数相等的性質,由 $x_1=x_2$ 卽可得出 $x_1+x_3=x_2+x_3$,又由 $y_1=y_2$,卽可得出 $y_1+y_3=y_2+y_3$。

定理(2)—(4)的証明与此类似,讀者不难自己作出。

§3. 共軛数

$\bar{z}=x-iy$ 叫做 $z=x+iy$ 的共軛数。显而易見,z 又是 $\bar{z}$ 的共軛数。因此,z 和 $\bar{z}$ 是互相共軛的数。

若 z 是实数,則它的共軛数和它相等。反之,若 $z=\bar{z}$,則 z 为实数。

事实上,我們有 $x+i0=x-i0$(因为 $x=x$, $0=-0$),反之,由

$x+iy=x-iy$, 即得 $y=-y$, 亦即 $y=0$。

我們要注意:

1) 二共軛数之和是一实数;它等于所給的兩个数当中任意一个的实部分的二倍:

$$z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x;$$

2) 二共軛数之差是一純虛数;它等于被減数的虛部分与 i 之积的二倍:

$$z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy;$$

3) 二共軛数之积是一大于或等于 0 的实数,它只当所給的兩个数皆为 0 的时候为 0:

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2\geqslant 0.$$

分数的基本性質。实际去除的方法

設 $z_1\neq 0, z_3\neq 0$。先用 z_1 除等式 $z_1(z_2z_3)=z_2(z_1z_3)$, 然后再用 z_1z_3 去除,即得:

$$\frac{z_2z_3}{z_1z_3}=\frac{z_2}{z_1}. \tag{17}$$

这是分数的基本性質:(分母不为 0 的)分数的分子和分母同以一(异于 0 的)数乘之,其值不变。

除法公式(16)相当难記。因此下面所講的实际去除的方法頗为有用:要想用一(不为 0 的)数去除另一数,只須用除数(分母)的共軛数去乘被除数和除数(或分子和分母)即可。

实际上,我們有:

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{(x_2+iy_2)(x_1-iy_1)}{(x_1+iy_1)(x_1-iy_1)}=$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_1y_2-x_2y_1)}{x_1^2+y_1^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_1^2}+i\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1^2+y_1^2},$$

这(正如我們在事先必然会看到的)和公式(16)是一致的。

§4. 复数的三角写法·模和幅角

設 $z=x+iy$ 是一异于 0 的复数，因而 x 和 y 不同时为 0。我們現在引进極坐标代替原来的直角坐标。由实变数 θ 和 r 的方程組：

$$\begin{aligned} r\cos\theta&=x,\\ r\sin\theta&=y \end{aligned} \tag{18}$$

（在 $r\geqslant 0$ 这条件下此方程組是可解的），我們即得：

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{19}$$

这里的根取的是正値，并得：

$$\begin{cases} \cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ \sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases} \tag{20}$$

由是，θ 除相差一形如 $2k\pi$（k 为整数）之数外，唯一地被决定。

順便提一下，由公式(20)，我們有：

$$\theta=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x};$$

但在上面这一公式中，x 和 y 的符号沒有完全被考虑进去，因此根据这一公式算出来的 θ 値可能有一形如 $k\pi$ 的差数（k 为整数）。

由方程組(18)和公式(19)所唯一定义的正数 r 叫做 z 的模（或絕对値）；任意滿足方程組(18)（或(20)）的 θ 値叫做 z 的幅角（圖 2）。

特別，由公式(19)，数 0 的模为 0。

每一复数必有模。我們采用絕对値的記号来作为模的記号。

复数的"模"是实数的絕对值的一种推广：当 $y=0$ 时，我們有：

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2}=|x|.$$