高等数学教程

第一册

施学瑜

清华大学出版社

高等数学教程

第一册

施 学 瑜

清 华 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书第一、二册是参照教育部高等学校工科数学教材编审委员会审订的高等数学（基础部分）教学大纲编写的教材，含有少量超过大纲的内容，冠以星号。第一册内容为一元微积分、向量代数和空间解析几何，共八章。每章每节均配有习题，每章末尾配有复习题。最后附有杂题。绝大部分习题与杂题附有答案或提示。

本书可作为高等工科院校基础数学教材或参考书，也适于工程技术工作者和广大自学者的参考。

高 等 数 学 教 程

（第一册）

施学瑜 编著

★

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂排版

北京丰华印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

★

开本：787×1092 1/32 印张：19 字数：443 千字

1985 年 9 月第一版 1985 年 9 月第一次印刷

印数：000001～20,000

统一书号：15235·176 定价：3.50 元

序

本书第一册、第二册是参照教育部高等学校工科数学教材编审委员会审订的高等数学（基础部分）教学大纲编写的，含有少数超过大纲的内容，冠以星号。第一册内容为一元微积分、向量代数、空间解析几何，第二册内容为多元微积分、级数、微分方程、*场论。适用于高等学校工科和有关的理科专业作为教材，也可供工程技术工作者参考，和供自学者、参加高等数学自学考试者（除去带星号的内容）参考。

为了便于读者学习，我们编入了适当数量的例题。每节之后配有习题，每章之后配有复习题，每册之后配有杂题。在每册的末尾，附有绝大部分题目的答案，以及难题的提示。下面谈一下编写时的一些想法。

目前国内外中学都已将集合及其运算作为必修的内容，同时，国内外一些现代工程技术书籍和文献，经常引用一些集合、映射、函数空间的知识，我们感到这些概念、术语、符号，在工科和有关理科的基础数学教材中应当有所反映，因此，本书在传统写法的基础上，适当使用集合的概念和符号（数集，点集，函数集，如 $C[a,b]$，$C_n[a,b]$等）。

为了对读者掌握概念和提高证题能力有所帮助，在正文之前写了一段“命题与常用的数学证题法”。这一段也可以不讲，由学生自学。读者在学到后面的内容时，如能经常翻一翻这一段，想必是有益的。

函数的基本内容在中学已学过，这一章是在简要复习的基

础上，在若干方面加以提高，着重于中学没有重点学习的分段表示的函数。根据近几年的教学经验，入学的学生并未掌握用极坐标方程与参数方程表示的一些曲线，因此作一个简要的复习与补充。

学生在中学虽已学过数列极限的精确定义，但考虑到极限这一章历来是初学者学习的难点，因此极限的几种情形都仍从直观的概念、直观的例子写起，然后再抽象出精确的定义。大部分定理都给出了证明（讲课只证一部分），凡不证的都说清楚没有证。对极限的精确定义的要求，主要是使读者掌握概念，能在今后理解和掌握用定义证明的定理，会证较简单的题目。

在导数中引入了左、右导数的概念，并用来研究分段表示的函数的导数。考虑到与多元函数全微分概念的衔接，微分没有采用直接用 $y'dx$ 定义的方法，而是采用线性主部的方法。

对积分的概念和应用，据我们所知，物理、力学和工程科学的教师，在讲课和科学研究中，经常使用的是元素相加法的实质、微分方程的表达形式。我们认为，这样的方法是可取的，它很简练、单纯，并且在绝大多数问题里，建立积分式的过程也就是定义这个量的过程，无需验证所取的元素是不是微分，其合理性是由实际是否合理来检验的。因此我们对各种积分的应用都采用这样的方法。

基于与上同样的想法，我们对导数和积分，适当采用了牛顿和莱布尼兹的虽不严格但很生动的“极其微小的增量的比”、“极其微小的增量的总和”的说法。（但指出这只是直观的不够严格的说法。）

作为一种自然的推广，在二元函数的概念之后，用类比的方法简述了 n 维空间和 n 元函数的概念。$F(x, y)=0$ 的隐函数存在定理按教学要求不加以证明，但为了使读者了解它的实

质，我们对它给以几何解释。

对于付里叶级数，我们感到如只限于从周期函数的角度来讨论（包括延拓为周期函数），读者在今后遇到按一般正交函数系展开的问题（如在有关的技术专业课中和在《数学物理方程》中），对于展开的概念和完备性都会遇到困难。因此作为带星号的节，写了一节按一般正交函数系展开的概念，并适当引入了函数集合中的距离、内积和完备的正交函数系（不加以证明）的初步概念。

场论这一章对许多专业是必修的，同时考虑到它和线、面积分有着密切的联系，在这个意义上说，它和其他《工程数学》内容的地位有所不同，因此作为带星号的章写入本书第二册。平面场是常用的，它有一些与一般空间情形不同的处理方法与基本公式，但常不被重视，我们将它写入相应的段落。

凡是带星号的内容都是供教师和读者灵活处理是否选用的。

使用本书也可按照先讲向量代数与空间解析几何后讲一元微积分的次序。

关于习题，为了使读者能分清主次，并为了教师使用灵活起见，多数难题是放在每一册最后的《杂题》这个项目之内。

编写本书时曾得到孙念增先生很多的帮助。

第一册 1～8 章、第二册 9～11 章的习题，是在李永乐同志为 1980 年校内试用本选编的习题基础上修改的。

在此特别感谢我系领导的鼓励和关心。编写中曾向栾汝书先生请教，同肖树铁、胡显承、康静安同志进行了讨论。经多次试用，我系许多同志曾提出宝贵的意见，这次修改定稿特别吸收了近几年系统使用本书校内试用本进行教学的陈凯、梁国珍、李秀谆、金善锟、吴洁华、陈宝林、王燕来等同志所提

的意见。戴遒山同志（哈尔滨船舶工程学院）和裘网乡（华东水利学院）、何继文（安徽工学院）、孙显奕（太原机械学院）、任国臣（北方交通大学）诸同志曾寄来书面意见。在此向以上各位同志表示诚挚的谢意。

本书不当之处，请同志们多多指正，俾再版时得以改进。

施学瑜

1984 年 10 月，清华园

目　录

引 言

本课程的基础内容是一元微积分，读者在开始学习时，当然想预先了解一下微积分研究的典型问题是什么？这些问题要用什么方法解决？微积分产生的历史背景是什么？下面就来大体谈一下。

微积分的两个典型几何问题是：（1）平面曲线的切线斜率问题；（2）平面图形的面积问题。下面以问题（2）为例，说明用什么方法解决。

例．求抛物线 $y=x^2$，直线 $x=1$，与 x 轴围成的图形的面积。图 0.1.1.

在中学数学里，用圆内接正多边面积来逼近圆的面积，现在我们也考虑用直线形的面积来逼近抛物线下的面积。

日常生活中常看到用直线形逼近曲线形的例子，例如，要用砖砌出一个拱形的墙，可以采取将砖的数目一层一层减少的办法，如图 0.1.2 所示，这是用台阶形逼近曲线形。这个模

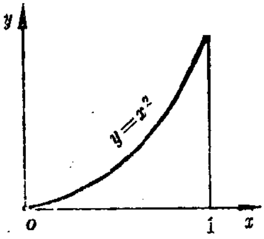

图 0.1.1

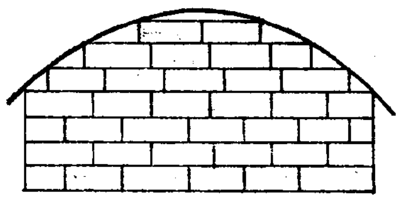

图 0.1.2

型同我们的问题很相似。

如图 0.1.3 将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 等分成许多小段，在每一小段上用左端点处的高作一长方形，这样，在 $0\leqslant x\leqslant 1$ 上就得到一个台阶形，我们用台阶形的面积逼近曲线下的面积.

由图看到，当将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分得越细，逼近的误差就越小，可以想象，如果将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 无限细分，台阶形面积就无限逼近曲线下的面积.

设想将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 分成 n 等分，记每一小段的左端点分别为 x_1，x_2，…，x_n，再记每一小段的长为 Δx，则相应的小长方形面积分别为 $x_1^2\Delta x$，$x_2^2\Delta x$，…，$x_n^2\Delta x$，将这些小长方形的面积相加，得面积的近似式

$$A\approx x_1^2\Delta x+x_2^2\Delta x+\cdots+x_n^2\Delta x.$$

将 $0\leqslant x\leqslant 1$ 无限细分，台阶形面积就无限逼近抛物线下的面积，记成

$$A=\lim(x_1^2\Delta x+x_2^2\Delta x+\cdots+x_n^2\Delta x),$$

称为台阶形面积的极限，lim 是“limit（极限）”的前三个字母.

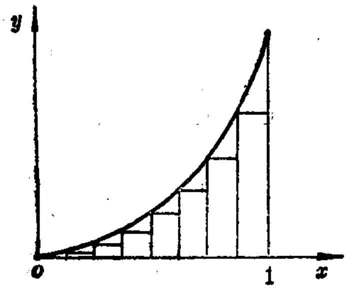

图 0.1.3

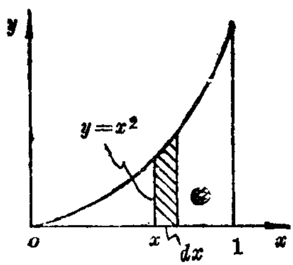

图 0.1.4

以上步骤可以用一个很形象的符号来表示.

设想将 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 无限细分时，每一小窄条的宽度是 dx，再考虑以任一点 x 为左端点的小窄条，如图 0.1.4，在无限细分的条件下，小窄条的面积就成为以 x^2 为高、以 dx 为底的长方形面积，记成

$$dA = x^2 dx,$$

称为面积的微分，将这些极其微小的面积(它们布满整个图形)由 $x=0$ 到 $x=1$ 积累起来，就成为总面积，记成

$$A = \int_0^1 x^2 dx,$$

称为微分 x^2dx 的积分，所以

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim(x_1^2 \Delta x + x_2^2 \Delta x + \cdots + x_n^2 \Delta x).$$

在第 6 章 §1，§2 中将详细说明这个积分的计算方法，这里就不再继续算下去了.

由上可知，问题 (2) 是一种特殊类型的极限问题. 以后将看到，问题 (1) 是另一种特殊类型的极限问题.

微积分的另外两个典型力学问题，是关于变速运动的速度和路程的研究，它们也是与上两类问题类似的极限问题.

下面简要说明微积分产生的历史背景. 十七世纪的欧洲，正处在工业革命时期，航海，造船，运河、渠道的修建，以及各种机械都在发展，这就促使人们寻求研究物体的运动变化、曲线、图形的一般数学方法，这样就产生了微积分.

例如造船，由于保证船舶安全航行的要求，就需要知道处理面积、体积、力矩、重心等的一般数学方法. 这些问题的解决和上面所说的面积问题有着类似的思路.

研究变速运动的一个例子是关于天体运行规律的研究。由于航海中利用天体确定船舶位置的需要，以及怎样解释现实世界的需要，引起了人们对于天体运行规律深入研究的兴趣。行星运动就是一种变速运动。

这里，值得谈一下历史上微积分方法在研究天体运行规律中取得成就的一个例子。

在波兰天文学家哥白尼的日心说的基础上，十七世纪初，法国天文学家开普勒通过对行星特别是火星的观察，总结出了行星运动的三大定律：

（1）行星沿椭圆轨道围绕太阳运动，太阳位于椭圆轨道的一个焦点；

（2）行星和太阳之间的联线，在相等的时间内扫过椭圆的面积相等，见图 0.1.5，行星离太阳越近速度越快，离太阳越远速度越慢；

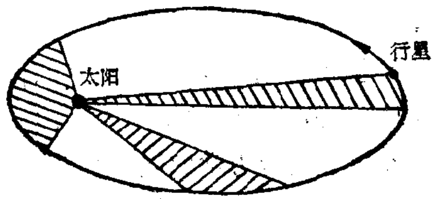

图 0.1.5

（3）行星在椭圆轨道上运行一周的时间的平方，正比于椭圆长半轴的平方。

开普勒只是通过观测进行总结，并未在数学上加以论证。开普勒三大定律涉及曲线形的面积、面积速度、变速运动的瞬时速度、路程等数学概念和处理的方法，运用基本的物理定律和数学方法论证开普勒三大定律，只有当十七世纪下半叶牛顿

(Isaac Newton, 1642—1727) 总结出了万有引力定律，和牛顿、莱布尼兹 (Gottfrie Wilholm Leibniz, 1646—1716) 总结出了微积分以后才有可能。

1781 年，德国的威廉·赫歇尔通过观察，发现了土星之外的一颗新的行星，就是天王星，在进一步研究天王星运动的过程中，人们发现它在太空中的计算位置与观测位置不符，因而推测在天王星之外还有一颗未知的行星。

十九世纪中叶，英国的亚当斯和法国的勒维列，先后用数学方法推算出了这颗未知行星在太空中的位置，不过，这只是理论的推测，还未被实践所证实。

1846 年 9 月 23 日，柏林天文台收到了勒维列的信，当晚，在柏林天文台工作的加勒，将望远镜指向秋夜的星空，在勒维列计算所指出的位置，果然找到了这颗新的行星，就是海王星。亚当斯和勒维列的计算结果被证实了！

这个例子一方面说明了运用数学方法在历史上取得的成就，另一方面也大体说明了应用数学方法解决实际问题的三个环节：

始：将实际问题运用物理定律或其他资料化为数学问题。如行星运动要运用万有引力定律、开普勒定律等；

中：求解。如亚当斯和勒维列计算海王星的位置；

终：求解的结果要经过实践（包括实验）的检验，能解释实际现象或解决实际问题。如海王星的存在被加勒观测所证实。

最后要指出，在牛顿、莱布尼兹的著作中，并没有将极限作为微积分的基础，而是用“无限小长度”、“无限小时间”这样一些不够明确的概念来解决问题的。

系统地将微积分建立在极限基础之上的，是十九世纪上半

叶法国的柯西（Augustin Cauchy，1789—1857）。而作为极限理论基础的实数理论、集合论，则是由十九世纪下半叶的狄特金(R. Dedekind，1831—1916)、康脱(George Cantor，1845—1918)，以及二十世纪初期的策墨罗（Zelmelo）等建立的。在近代，已经发展到系统地运用集合论来处理微积分的问题。

本书只将微积分建立在极限的基础之上，并在适当的场合运用牛顿、莱布尼兹的虽不严格但却很直观、很生动的思路。不过，为了和现代数学接近，并且为了叙述方便起见，将运用一些集合的概念和符号，主要用于函数的定义域、函数集合。

命题与常用的数学证题法

1. 命题，命题的四种形式及相互关系

所谓命题是指每一个有真假可言的语句。

有的命题写成陈述语句：

"甲是乙"，"甲具有…性质"；

有的命题写成条件复合语句：

"如果 A，则 B"，或"如 A 则 B"，或"设 A 则B"。其中 A 是条件，B 是结论，A，B 都是用前面类型的陈述语句表示的命题。

用陈述语句表示的命题也有条件和结论，如"甲是乙"，相当于"如果丙是甲，则丙是乙"。

一个命题可能是正确的，也可能是错误的，正确的是真的，错误的是假的，在数学中，重要的正确的命题称为定理。

要肯定一个命题为真，应当给出证明。要说清一个命题为假，通常的办法是举反例。如命题"如 $a^2=25$，则 $a=5$"，为假，因为可举出反例：$(-5)^2=25$，但 $-5\neq5$。

对命题"如 A 则 B"，如果将条件和结论交换，或者将它们的否定作为条件或结论，总共就有四种不同形式的命题，分别称为：（以下记 $\bar{A}$ 为 A 的否定，$\bar{B}$ 为 B 的否定，读作"非 A"，"非 B"）

原命题："如 A 则 B"；

逆命题："如 B 则 A"；

否命题："如 $\bar{A}$ 则 $\bar{B}$"；