

概 率 论 与 数 理 统 计

邝英强 编

华南工学院出版社

概率论与数理统计

邝英强 编



华南工学院出版社

2074/04

概率论与数理统计

邱英强 编

*

华南工学院出版社出版

(广州石牌)

广东省新华书店发行

广州科普印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/32 印张: 6.875 字数: 149千字

1985年12月第1版 1985年12月第1次印刷

书号: 15410·005 定价: 1.55元

编辑说明

“管理工程系列书”是本社为适应多层次、多种形式办学需要，针对高等学校工科管理工程专业教学要求而编辑出版的试用教材。这些书，均结合考虑大专要求和成人教育的特点，由具有较高学术水平和丰富教学经验的教授编写或审稿。其特点是，内容上理论联系实际，释疑解难，深入浅出，并附有思考题、习题或实验实习指导，便于自学；特别适用于成人高等教育的各种形式（干部专修班、函授、刊授、电大、夜大、业余大等）的教学需要。有部分书特别注明与本科通用。

“管理工程系列书”的种类和计划出版的时间是：

- 一、《概率论与数理统计》（1985年出版）
- 二、《运筹学》（1985年出版）
- 三、《工业经济学》（本科和专科通用，1986年出版）
- 四、《预测学》（1986年出版）
- 五、《管理决策分析》（1986年出版）
- 六、《工业会计与财务管理》（本科和专科通用，1987年出版）
- 七、《技术经济学》（本科和专科通用，1987年出版）
- 八、《管理信息系统》（1987年出版）
- 九、《经济法概论》（本科和专科通用，1988年出版）
- 十、《经营管理》（本科和专科通用，1988年出版）
- 十一、《生产管理》（本科和专科通用，1988年出版）
- 十二、《技术管理与质量管理》（1988年出版）

编辑出版这个学科的系列试用教材，对我们来说，是一个新的尝试，恳切地希望广大读者和师生能提出宝贵意见。

华南工学院出版社
一九八五年十二月

前 言

概率论与数理统计这门学科，应用相当广泛，目前几乎遍及所有科学领域：工农业生产和国民经济的各个部门之中。因此，不仅在各高等院校中讲授，而且在新编的中学教学大纲中也增加了这门学科的初步知识，这也就说明它已得到各方面的重视了。

本书是为工业企业管理刊授专业的管理数学课程而编写的，希望读者通过学习获得一些基础知识。但由于刊授是一种新的学习方式，且时间较紧，又限于编者水平，可能有不少缺点和错误，请读者予以批评指正。

曾文中

一九八五年四月

目 录

第一章	随机事件与随机事件的概率	(1)
第一节	排列与组合	(1)
第二节	随机试验与随机事件	(5)
第三节	随机事件的关系及运算	(7)
第四节	随机事件的概率	(13)
第五节	条件概率及其有关公式	(20)
第六节	随机事件的独立性与二项概率公式	(27)
习题一		(33)
第二章	随机变量及其分布	(38)
第一节	一维随机变量及其分布函数	(38)
第二节	一维离散型随机变量及其分布律	(41)
第三节	一维连续型随机变量及其分布密度	(48)
第四节	多维随机变量及随机变量的相互独立性	(57)
第五节	随机变量的函数及其分布	(60)
习题二		(65)
第三章	随机变量的数字特征、极限定理	(67)
第一节	期望及其性质	(67)
第二节	方差及其性质	(79)
第三节	极限定理	(84)
习题三		(90)
第四章	参数估计	(92)
第一节	随机样本	(92)
第二节	抽样分布	(96)

第三节	参数的点估计	(107)
第四节	参数的区间估计	(111)
习题四		(119)
第五章	假设检验	(121)
第一节	假设检验的基本思想	(121)
第二节	总体期望值的假设检验	(123)
第三节	总体的方差的假设检验	(137)
第四节	总体分布函数的检验	(141)
习题五		(144)
第六章	线性回归与方差分析	(148)
第一节	线性回归	(148)
第二节	方差分析	(166)
习题六		(176)
第七章	正交试验法	(179)
第一节	什么是正交试验法	(179)
第二节	正交试验的基本方法	(180)
第三节	多指标试验与水平数不同的试验	(187)
习题七		(188)
习题答案		(189)
参考书目		(194)
附表 1	标准正态分布表	(195)
附表 2	t 分布表	(197)
附表 3	χ^2 分布表	(198)
附表 4	F 分布表	(200)
附表 5	正交表	(209)

第一章 随机事件与随机事件的概率

第一节 排列与组合

一、排列

什么叫排列？所谓排列是指从 n 个不同元素里任取 m 个元素出来按一定的顺序排成一行。对于所有不同的排列的种数，用记号 P_n^m 表示。

为了找出 P_n^m 的计算公式，先介绍乘法原理：若 a 有 m 种不同取法， b 有 n 种不同取法，则 (a, b) 有 mn 种不同取法。这可以从下面得到。

设 a 的不同取法为 $a_1, a_2, \dots, a_m$ ， b 的不同取法为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ，则 (a, b) 有如下 mn 种不同取法：

$(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n)$

$(a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n)$

$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \vdots$

$(a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n)$

现在求 P_n^m 的计算公式。从 n 个不同元素里任取 m 个元素排成一行，如图1，则第一个位置有 n 种不同取法，第二个位置有 $n-1$ 种不同取法（因第一个位置已有一个元素），

同理第三个位置有 $n-2$ 种不同取法, ……依此类推, 第 m 个位置有 $n-m+1$ 种不同取法。按照乘法原理, 所求的排列种数 P_n^m 如图 1。

	$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$					
位置号	1	2	3	……	$m-1$	m
取法数	n	$n-1$	$n-2$	……	……	$n-m+1$

图 1

如今 $\gamma!$ 表示 $\gamma \cdot (\gamma-1) \cdot (\gamma-2) \cdots \cdots \cdot 3 \cdot 2$

$\cdot 1$, 则 P_n^m 又可表为:

$$\begin{aligned}
 P_n^m &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \\
 &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{1} \cdot \frac{(n-m)(n-m-1)}{(n-m)(n-m-1)} \cdot \frac{\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \\
 &= \frac{n!}{(n-m)!}
 \end{aligned}$$

若规定 $0! = 1$, 则上式当 $m=n$ 时也能成立。

因此, 当 $0 < m \leq n$ 时, 从 n 个不同元素任取 m 个元素排成一列的所有种数为

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例 1 从 8 个不同元素中任取 3 个排成一列, 试计算所有的排列种数。

解: 所求的排列种数为

$$P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

例2 有颜色不同的六面旗帜，用一面或多面组成每一纵列表示一种信号。问可以表示多少种不同信号？

解：从六面旗帜取一面组成一纵列有 P_6^1 种，

从六面旗帜取二面组成一纵列有 P_6^2 种，

从六面旗帜取三面组成一纵列有 P_6^3 种，

从六面旗帜取四面组成一纵列有 P_6^4 种，

从六面旗帜取五面组成一纵列有 P_6^5 种，

从六面旗帜取六面组成一纵列有 P_6^6 种，

故总共可以表示信号种数为：

$$P_6^1 + P_6^2 + P_6^3 + P_6^4 + P_6^5 + P_6^6 = 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956 \text{ (种)}.$$

要注意的是，以上的排列是元素不可重复的。如果元素是可以重复的，那么如何计算呢？即是从 n 个不同元素里有放回地（任取一个，然后放回去，再取一个，又放回去，……）取 m 次，得到的不同排列共有多少种？

显然，在这种情况下排列种数为

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{m \text{ 个}} = n^m$$

例3 广州市的电话号码是由五个数字组成，问广州市的电话共能容纳多少个用户？

解：所求的用户总数是 10^5 (个)

$$(5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$$

$$C_5^1 C_4^1 C_3^1 C_2^1 C_1^1 P_5^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

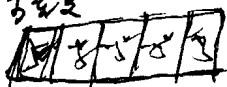
$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 3500 \\ \hline 375000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \times 25 \\ \hline 60 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 3000 \\ \hline \end{array}$$

$$125 \times 25 \times 20$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \quad 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$



120

P_5^5

二、组合

什么叫组合？所谓组合是从 n 个不同元素里任取 m 个出来，不管怎样的顺序并成一组。所有不同的组合的个数叫组合数，并用符号 C_n^m 表示。

排列与组合的区别在于：从 n 个不同元素里任取 m 个出来，这 m 个元素是组合就不用考虑次序，而排列则要考虑次序。从上可以推出组合的计算公式：从 n 个不同元素里任取 m 个出来进行排列，它可以分为两步进行。第一步从 n 个不同元素里任取 m 个出来，第二步将 m 个不同元素排成一列。第一步种数为 C_n^m ，第二步种数为 P_m^m ，根据乘法原理，

$$\text{得} \quad P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m$$

即

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

因此，从 n 个不同元素里任取 m 个的组合数计算公式是

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

例4 分配5个人的工种，要3个人开车床，2个人当钳工，问有几种分配方案？

解：因为不是开车床，就是当钳工，故定下当钳工的人，方案就定了，所以分配方案种数是

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)! 2!} = 10 \text{ (种)}$$

例5 从10件产品（假定它们互不相同）中任抽3件检验，问

（1）一共有多少种不同的抽法？

（2）如果10件产品中有2件次品，抽取3件中恰好有1件次品的抽法有多少种？

（3）如果10件产品中有2件次品，抽取3件中至少有1件次品的抽法有多少种？

解：（1）所求的不同抽法种数为

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)! 3!} = 120$$

（2）从2件次品中抽1件有 C_2^1 种抽法，从8件正品中抽2件有 C_8^2 种抽法，根据乘法原理，得

$$C_2^1 \cdot C_8^2 = 2 \times 28 = 56$$

（3）至少有一件次品，即有一件次品或有两件次品，根据（2）问的解法，故共有抽法

$$C_2^1 \cdot C_8^2 + C_2^2 \cdot C_8^1 = 2 \times 28 + 1 \times 8 = 64$$

第二节 随机试验与随机事件

在科学管理中，我们经常作一些试验，下面是一些具体例子：

例1 从次品率为p的一批产品中，一件接一件地接连

抽取几件（抽得一件产品后，立即放回去，再抽下一件），多次做这样的试验，各次取得的几件产品中次品的件数不一定相同。每次取得的次品的件数是 $0、1、2、\cdots n$ 中的一个数。

例2 在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命。每次测试结果是 $(0, \infty)$ 中的一个数。

例3 站在某地向上抛掷一枚硬币，多次做这样的试验。每次结果不一定相同，是“正面朝上”与“反面朝上”之一。

上面举出的例子有着共同的特点，就是：

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行。

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先知道试验的所有可能结果。

(3) 每次试验之前不能确定哪个结果会出现。

今后，我们称具有上述三个特点的试验为随机试验，简称为试验。

随机试验的结果称为随机事件。其中，随机试验中必然发生的事情又称必然事件，不可能发生的事情称为不可能事件。当然，必然事件与不可能事件按理来说不是随机事件，但为方便起见，我们也称它们为随机事件。如例1中每次取得的次品件数为 n 件是一随机事件，每次取得的次品件数小于或等于 n 件是一必然事件，每次取得的次品件数大于 n 是一不可能事件，但我们都称它们为随机事件。今后，用 $A、B、C$ 等表示随机事件，用 U 表示必然事件，用 ϕ 表示不可能事件。

在随机试验中，它的每一个可能出现的结果都是一个随

机事件。它们是这个试验的最简单的随机事件。我们称这些简单的随机事件为基本事件。基本事件的全体我们称为基本事件空间。如例 1 中，若用 i 表示每次取得的次品件数，则基本事件空间为

$$\{0, 1, 2, \dots, n\}$$

基本事件空间记为 U 。

第三节 随机事件的关系及运算

随机事件今后简称为事件。在实际中，有些事件比较简单，我们可以用一个字母来表示它；但有些事件是比较复杂的，这就要求我们用一些简单的事件来表示它。因此，研究事件之间的关系及运算是必要的。

例如从一批产品中一件接一件地抽取产品检验。“第一次抽到次品”是一个事件，这个事件可以用 A 表示。“第二次抽到正品”是一个事件，这个事件可以用 B 表示。“第二次才抽到正品”是一个事件，这个事件可以用 C 表示。我们仔细分析一下事件 C ，它表示“第二次才抽到正品”，也即表示“第一次抽到次品，第二次抽到正品”。这说明事件 C 与事件 A 、事件 B 是有一定的关系的。这个关系如何表示？一般地事件之间的关系及运算有下列几种：

一、子事件

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 是事件 B 的子事件。记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，读作事件 A 包含于事

件B或事件B包含事件A，也可读作事件A是事件B的子事件。

例如：验收某一圆柱形产品时，要求长度合格及直径合格才算一个产品合格。那么不论“直径不合格”或“长度不合格”都导致“产品不合格”，所以“直径不合格”或“长度不合格”都是“产品不合格”的子事件。

若以A表示“直径不合格”这件事，B表示“产品不合格”这件事，则以上事实可记为 $A \subset B$ 。

为方便起见，我们规定：对于任一事件A，有 $\phi \subset A$ ，即不可能事件是任一事件的子事件。另对任一事件A，有 $A \supset U$ ，即任一事件是必然事件的子事件。事件的包含关系见本节后的图2。

今后，我们称两事件相等是指它们相互包含的。这是很自然的事实。两事件中第一个事件包含第二个事件，而第二个事件又包含第一个事件，这两个事件当然相等。记事件A与事件B相等为 $A = B$ 。

二、和事件

如果事件C的发生就是事件A发生或事件B发生，我们就称事件C为事件A与事件B的和事件。记作 $C = A + B$ 或 $C = A \cup B$ 。读作事件C等于事件A与事件B的和。

例如：“直径不合格”与“长度不合格”这两件事的和便是事件“产品不合格”。

若以A表示“直径不合格”这件事，B表示“长度不合格”这件事，C表示“产品不合格”这件事，则以上事实可记为 $C = A + B$ 。

两事件的和事件的图示见本节后的图2。

三、积事件

如果事件C的发生就是事件A与事件B同时发生，我们就称事件C为事件A与事件B的积事件。记作 $C = AB$ 或 $C = A \cap B$ 。读作事件C等于事件A与事件B的积。

例如：“产品合格”这一事件是“长度合格”与“直径合格”这两事件的积事件。因为只有“长度合格”和“直径合格”这两件事同时发生，“产品合格”这件事才发生。

若以A表示“产品合格”这件事，B表示“长度合格”这件事，C表示“直径合格”这件事，则以上事实可记为 $A = BC$ 。

两事件的积事件的图示见本节后的图2。

若事件A与事件B的积事件为不可能事件，即 $AB = \phi$ ，则称事件A与事件B互斥。两事件互斥的图示见本节后的图2。

若事件A与事件B互斥并满足 $A + B = U$ ，则称事件A与事件B互为对立事件。今后事件A的对立事件记为 $\bar{A}$ ，即此时有 $B = \bar{A}$ 。

例如：“产品合格”与“产品不合格”是互为对立事件。因为“产品合格”这件事发生，“产品不合格”这件事就不会发生；同样“产品不合格”这件事发生，“产品合格”这件事就不会发生，而且产品不是合格就是不合格，故它们的和事件是必然事件，所以“产品合格”与“产品不合格”这两件事是互斥的。若以A表示“产品合格”这件事，则 $\bar{A}$ 表示“产品不合格”这件事。

四、差事件

如果事件C发生就是事件A发生而且事件B不发生，我们就称事件C为事件A与事件B的差事件.记作 $C = A - B$.读作事件C等于事件A与事件B的差.

例如：事件“直径合格且长度不合格”便是事件“直径合格”与事件“长度合格”的差事件.

若以A表示“直径合格且长度不合格”这件事，B表示“直径合格”这件事，C表示“长度合格”这件事，则以上事实可记为 $A = B - C$.因为事件B发生并且事件C不发生正是事件A的发生.

显然 $A - B = A \overline{B}$. 两事件的差事件的图示见图2.

下面是事件的关系图示.