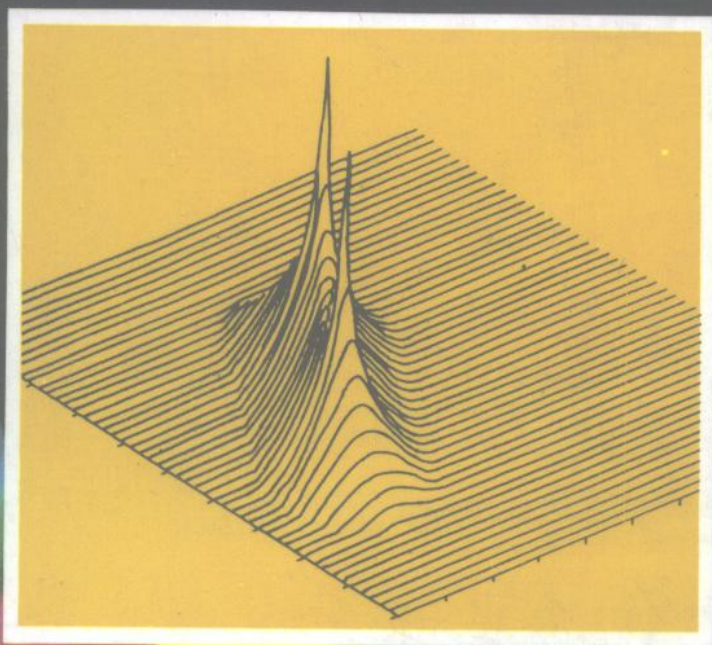


国家自然科学基金资助

# 空间谱估计及其应用

刘德树 罗景青 张剑云 编著



空间谱估计及其应用

1/2

中国科学技术大学出版社

13.412  
861

国家自然科学基金资助

# 空间谱估计及其应用

刘德树 罗景青 张剑云 编著

中国科学技术大学出版社

合肥·1997

## 内 容 简 介

空间谱估计是近二十年发展起来的一门新兴信号处理理论。它在雷达、通信、声纳及地震等方面的应用越来越受到重视。本书比较全面地介绍了空间谱估计的各种算法,性能分析,特别着重研究了空间谱估计在实际应用中碰到的几个问题及其解决的办法。作者还结合测向问题的科学研究和外场测试,证实了空间谱估计理论应用在实际测向中的可行性,其性能指标大大地优于其它一些传统的测向方法。

本书可作为信号与信息处理学科硕士研究生教材,也可以作为与此学科相关的科研工作者有益的参考书。

D031/22

## 图书在版编目(CIP)数据

空间谱估计及其应用/刘德树等编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,

1997年8月

ISBN 7-312-00903-4

I 空间谱估计及其应用

II 刘德树等 编著

III ①阵列信号处理 ②谱估计 ③测向

IV TN

中国科学技术大学出版社出版发行

(安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

开本:787×1092/16

印张:14 字数:337千

1997年8月第1版

1997年8月第1次印刷

印数:1—1500册

ISBN 7-312-00903-4/TN·30 定价:18.00元

450018e

## 前 言

空间谱估计是近二十年发展起来的一门新兴信号处理理论。它在雷达、通信、声纳及地震等方面的应用越来越受到重视。本书比较全面地、详细地介绍了空间谱估计的各种算法,性能分析,特别着重研究了空间谱估计在实际应用中碰到的几个问题及其解决的办法。作者还结合无线电测向的科学研究和外场测试,证实了空间谱估计理论应用在实际中的可行性,其性能指标大大地优于其它方法。

本书可作为信号与信息处理学科硕士研究生教材,教学时数约为70学时,由于内容丰富,在教学中可以根据情况取舍内容。本书也可以作为与此相关学科的科学工作者的参考书。

由于全书运用的符号较多,除符号表所列的符号全书统一外,其余符号的意义在不同章节有所不同,请读者注意。

本书的第1~7章由刘德树教授负责编写,第8章由张剑云博士编写,罗景青博士编写了第3章和第4章中的部分内容,全书由刘德树教授统稿。清华大学张贤达教授和中国科学技术大学朱近康教授审阅了本书,并提出了许多宝贵意见,作者表示诚挚的谢意。张佩女士为本书打印编排付出了辛勤的劳动,作者表示感谢。由于作者水平有限,难免存在一些缺点和错误,请读者批评指正。

作 者  
电子工程学院  
97年3月

## 符号规定

- $A$ : 方向矩阵  
 $a(\theta)$ : 方向矢量  
 $A_L$ :  $L$  行的方向矩阵  
 $a_L(\theta)$ :  $L \times 1$  的方向矢量  
 $D$ : 对角阵  $D = \text{diag}(e^{j\omega_k}, k=1, \dots, K)$   
 $E\{\cdot\}$ : 统计平均  
 $e_i$ :  $R$  的特征矢量  
 $E_N, E_S$ : 分别为噪声和信号特征矢量构成的矩阵  
 $\hat{e}_i$ :  $e_i$  的估计  
 $H$ : 共轭转置  
 $I_N$ :  $N \times N$  的单位矩阵  
 $J_N$ : 交替矩阵 ( $N \times N$ )  
 $K$ : 信号源数  
 $L$ : 子阵数  
 $L_A$ :  $A$  的左逆  
 $M$ : 噪声协方差矩阵  
 $M$ : 取样数  
 $N$ : 噪声矢量  
 $N$ : 阵元数  
 $O$ : 高阶无穷小  
 $P$ : 功率谱函数  
 $P_A$ : 投影到信号空间的投影矩阵  
 $P_N$ : 投影到噪声空间的投影矩阵  
 $P_A^\perp$ : 与  $P_A$  正交的矩阵  
 $R$ : 协方差矩阵  
 $R_S$ : 信号协方差矩阵  
 $R_A$ : 矩阵  $A$  的右逆  
 $T$ : 线性变换矩阵  
 $T$ : 转置运算  
 $S$ : 信号矢量  
 $S_K$ : 信号对角阵  
 $U_i$ : 左奇异矢量  
 $V_i$ : 右奇异矢量  
 $W$ : 权矢量  
 $X$ : 阵列输出矢量  
 $Z$ : 复平面单位圆上的点  
 $\Sigma$ : 特征值构成的对角阵  
 $\sigma_n^2$ : 阵元噪声方差  
 $\|\cdot\|$ : 内积  
 $\|\cdot\|_F$ : Fransbem 范数  
 $t_r$ : 迹  
rank: 秩  
 $*$ : 为共轭运算  
 $\mathcal{R}(A)$ :  $A$  矩阵的值域  
 $\mathcal{N}(A)$ :  $A$  矩阵的零空间, 核  
 $\mathcal{R}^\perp(A)$ : 与  $\mathcal{R}(A)$  正交的空间

# 目 录

前 言 .....	( I )
符号规定 .....	( I )
<b>绪 论</b> .....	( 1 )
<b>第 1 章 波束形成与零点技术</b> .....	( 4 )
1.1 阵列天线的方向图 .....	( 5 )
1.2 最大输出信噪比准则 .....	( 8 )
1.3 最小均方误差准则 .....	( 15 )
1.4 主瓣约束自适应阵 .....	( 18 )
<b>第 2 章 独立源高分辨处理</b> .....	( 21 )
2.1 极大似然估计算法 .....	( 21 )
2.2 特征分解法 .....	( 29 )
2.3 最小内积法 .....	( 32 )
2.4 投影矩阵法 .....	( 36 )
2.5 托布利兹逼近法(TAM) .....	( 38 )
<b>第 3 章 相干信号源的处理</b> .....	( 41 )
3.1 空间平滑技术 .....	( 41 )
3.2 频域平滑技术 .....	( 55 )
3.3 旋转子空间不变技术 .....	( 65 )
3.4 加权子空间拟合技术 .....	( 69 )
<b>第 4 章 性能分析</b> .....	( 71 )
4.1 有限取样数对特征分解精度的影响 .....	( 71 )
4.2 MUSIC 算法参数估计性能分析 .....	( 76 )
4.3 最小内积算法性能分析 .....	( 94 )
4.4 旋转子空间不变法,托布利兹逼近法和 MUSIC 一根法的性能分析 .....	( 99 )
4.5 极大似然估计的性能分析 .....	( 110 )
<b>第 5 章 空间信号源数的估计</b> .....	( 116 )
5.1 空间源数估计的必要性 .....	( 116 )
5.2 矩阵分解法 .....	( 118 )
5.3 信息论准则决定信号源数 .....	( 120 )
5.4 平滑秩序列法 .....	( 129 )
5.5 反馈判决法 .....	( 134 )
5.6 盖氏圆半径法 .....	( 135 )

<b>第 6 章 通道不一致的影响</b> .....	(141)
6.1 通道增益不一致对精度的影响 .....	(141)
6.2 通道增益不稳定对精度的影响 .....	(143)
6.3 增益测量法 .....	(148)
6.4 对消增益相位不一致的方法 .....	(151)
6.5 到达角与增益联合估计的迭代算法 .....	(153)
6.6 线性阵的角度和相位的联合估计 .....	(155)
<b>第 7 章 算法的修正</b> .....	(161)
7.1 噪声空间不平稳时的算法 .....	(161)
7.2 线性非均匀阵的算法 .....	(171)
<b>第 8 章 二维空间谱估计</b> .....	(174)
8.1 时—空二维空间谱估计 .....	(174)
8.2 空间二维谱估计 .....	(179)
<b>附 录</b> .....	(187)
<b>参考文献</b> .....	(214)

# 绪 论

信号处理在通信、雷达、导航、声纳、地震、射电天文、生物医学工程等科技领域中得到了极为广泛的应用。信号处理所包含的内容非常丰富，例如从被噪声和干扰污染的所需信号的观察数据中，恢复原来的信息；或将混在信号中的噪声与干扰剔除，其中包括多径产生的干扰；或把信号变换成所期望的另一种信号形式。不论以什么目的所进行的信号处理，其基本原则是尽可能地不丢失或少损失信息。我们知道，信息是蕴含在信号之中，或者说蕴含在信号的外部特征和内部特征参数之中，所以说信号处理中很多地方是要从复杂的电磁环境中，对信号的特征参数进行有效的检测和较精确的估计，这是信号处理最为重要的内容。

信号处理作为数学领域的一个学科，起源于17世纪，现在已成为科学技术领域的重要工具，但是直到20世纪50年代以前，信号处理主要还是用模拟设备实现的，这种处理在处理能力和处理质量上都远远地不能满足时代发展的需要，从而也影响着信号处理理论的进一步研究。微电子集成和数字技术的兴起，给信号处理在理论上，特别是实现上带来了新的活力，使其发展推向新的高潮。这给在恶劣电磁环境中，对复杂信号处理的实现提供了可能。

信号处理的前期主要集中在时域一维信号处理，如信号的频谱分析和谱估计，后来发展到二维或多维信号处理，如图像处理，时-频域二维处理，时-空二维处理等。一维时域信号处理在信号检测、谱分析和谱估计方面有丰硕的成果，各种算法大大地提高了信号的检测能力、频率估计精度和频率分辨力。在处理速度上也有很大的提高，接近于实时处理的要求，大大地增强了信号处理的自适应能力和具备有一定的智能功能。

随着信号处理应用的领域不断扩大，对空域信号处理的兴趣也越来越浓。60年代人们将时域信号处理的理论成果扩展到空域，这种扩展在原理上是显而易见的，只要把时域采样变成空域采样，将频率换成空间频率（角度）。在某些条件之下，时域处理的一些方法和算法可以移植到空域上来。例如，阵列天线的空间采样的阵元加权函数的付氏变换，就是该天线阵在此加权条件下的空间方向图，它和时域中FIR滤波器中权函数即为该滤波器的频响相类似。实际上，雷达中的电控波束扫描技术就是其中的一种。而将自适应滤波应用到空域，就得到自适应空间滤波技术，如雷达中的自适应旁瓣相消就是一例。对于提高谱估计精度和分辨力的算法，如最大熵法，极大似然估计等就可以用来作为提高角度估计和角度分辨力的一种方法。但是，这并不意味着空域信号处理只要把时域处理搬移过来即可。实际上它们之间既有相似性又有特殊性。例如，当空间存在多个辐射源时（在处理带宽内），必须考虑这些源之间的空间相关性。若多源是相干的（如多径效应产生的多源信号），还需进行去相关的预处理或采用某些特殊的算法。一般来说，对时域信号的带宽限制不是很严格的，其处理带宽可达几倍



频段。但是,对空域处理而言;对信号的瞬时带宽要求比较严格,一般都是处理窄带信号,即信号经过阵列长度所需的时间应远小于信号瞬时带宽的倒数。若不满足此要求,则这种信号不仅是要做空域处理,还要进行时域处理,即要进行时一空二维处理,或时一空多维处理。

随着对空域信号的检测和参数的估计要求越来越高,作为空域处理的主要手段阵列信号处理发展极其迅速,阵列信号处理的主要内容可分为波束形成技术,零点技术及空间谱估计技术等几个方面,它们都基于对信号进行空间采样的数据进行处理,因此,这些技术是相互渗透和相互关联的。由于处理的目不同,其着眼点有所差别,因而导致有不同的算法。从发展历史上看,空域信号处理的三个内容,实质上是阵列信号处理的发展过程,也可以说是理论的逐步深入。波束形成技术的主要目的是要使阵列天线方向图的主瓣指向所需的方向。零点技术的主要目的是使天线的零点对准干扰方向。换句话说,前者是提高阵列输出所需信号的强度,后者是减小干扰信号的强度,实质上都是提高阵列输出的信噪比的问题。而空间谱估计则主要研究在处理带宽内空间信号到达方向(DOA)的问题。当然,若将这几种技术相结合,就会对空域信号处理的性能有很大的提高。

空间谱估计技术是近30年来发展起来的一门新兴的空域信号处理技术,也可以说它是在波束形成技术,零点技术和时域谱估计技术的基础上发展起来的一种新技术,其主要目标是研究提高在处理带宽内空间信号(包括独立、部分相关和相干)角度的估计精度、角度分辨力和提高运算速度的各种算法。对空间信号到达角的估计最早的方法是采用机械波束扫描的方法,这种方法在速度和精度上都满足不了实际的需要,波束形成技术的研究,在这些方面有了突破性的进展。但是,在目前空间信号很可能存在多源(在处理带宽内)信号,波束形成所给出的角度误差将会增大,甚至将非所需的干扰信号误认为所需信号的到达角。因此,存在多源信号时,对所需信号到达角的估计就成为迫切的课题。以抑制干扰信号为目的的零点技术为解决多源信号到达角的估计奠定了理论基础,它对此条件下角度估计精度提高了许多,提高的程度与阵列波束宽度和干扰入射角有关。若干扰信号与所需信号的入射角之差小于波束宽度时,虽然,可以使干扰信号处于零点位置,但主瓣指向已偏离了所需信号到达角的方向,引起角度估计误差增大,这就是常说的瑞利限(Rayleigh Limitation),而天线的波束宽度与阵列的线长度有关。要区分开靠得比较近的所需信号与干扰,势必要加大天线的机械尺寸(孔径)。为了实现在天线尺寸较小的条件下,区分波束宽度内的两个信号,这就需要寻求超分辨算法。

常规的或者说经典的时域(空域)的频谱(角度谱)分析是一类线性谱估计,这种谱估计受瑞利限约束。为了突破这个限制,早在60年代,在时域谱分析中采用非线性谱估计方法实现了频率的超分辨,如由Capon(1969)提出的极大似然估计<sup>[1]</sup>、Burg(1967)提出的最大熵法<sup>[90]</sup>、Pisarenko(1973)提出的谐波分解法<sup>[91]</sup>。为了提高角度分辨力,空域谱分析也必然要采用类似时域谱估计中的非线性处理,如极大似然估计,最大熵估计<sup>[2]</sup>(线性预测)和自相关矩阵的特征分解法,其中典型代表是多信号分类法

(MUSIC)<sup>[3]</sup>。随后又有多种新的算法,如旋转不变技术的参数估计法[ESPRIT]<sup>[34]</sup>,最小内积法(MN法)<sup>[4]</sup>。投影矩阵法<sup>[5]</sup>和矩阵分解法<sup>[6]</sup>等。

若空间存在相干信号,(如多径效应及回答式干扰),对时域频率谱估计影响不很明显,但是,对于空域角度谱估计将带来很大的误差,甚至无法估计信号的到达角。为了解决相干信号的处理问题,各国学者提出了不少新的算法,这些算法大致可分为两类:一类以牺牲有效阵元数来换取信号的不相关性,即先对阵列信号进行去相干的预处理,而后应用以上各种算法以获取精确的到达角,如空间平滑法<sup>[7,8,9]</sup>,前后向预测投影矩阵法<sup>[10,11]</sup>,数据矩阵分解法<sup>[12]</sup>。另一类是不损失阵元数,而利用移动阵列的方法<sup>[13,14]</sup>或采用频率平滑法<sup>[15]</sup>处理相干信号。

近10年来,对空间谱估计的各种算法取得了丰硕的成果,但有待解决的问题仍很多。以前对空间谱估计的研究主要是围绕着如何提高空间谱估计精度及减少运算量(即提高估计速度)两个方面。但是,这些算法一般都假定是高斯分布的加性噪声为前提的,在实践中,遇到的噪声经常是非高斯或者至少不完全是高斯的,这样用以上算法所得出的结果经常出现异常值,因此,必须进一步研究算法的稳健性,即常说的鲁棒性(Robustness),这是进一步提高参数估计精度的必由之路。

空间谱估计的理论日趋完善,这些理论和算法都是在特定的假设条件下得到的,将此理论应用到实践中时,经常碰到满足不了假设的情况,例如,各阵元通道的一致性,与稳定性,信号源数估计的准确性,阵元噪声空间不平稳,以及阵列位置误差等,这些都有待进一步探讨和解决。

本书主要介绍有关空间谱估计的基本理论和实际应用中所遇到的问题的解决方法。讨论各种算法时,除特别说明外都基于如下几点假设条件:

1. 阵列形式为线性均匀阵,阵元间距不大于处理最高频率信号波长的二分之一;
2. 处理器的噪声为加性高斯分布,不同阵元噪声均为平稳随机过程,且相互独立,空间平稳(各阵元噪声方差相等);
3. 空间信号为零均值平稳随机过程,它与阵元噪声相互独立;
4. 信号源数  $K$  小于阵列元数  $N$ , 信号快拍数(取样数)  $M$  大于阵列元数。

为了便于读者对空间谱估计理论更容易理解,本书的内容基本上是按此理论发展次序来安排的。教材共分八章。第一章介绍波束形成和零点技术,第二章讨论独立源的空间谱估计,第三章研究对相干信号源的处理,第四章分析各种算法的统计性能,第五章讨论空间源数的估计,第六章研究通道不一致的影响及其解决办法,第七章讨论噪声对空间谱估计的影响和线性非均匀阵列处理,第八章介绍二维估计。为了便于读者阅读本书,后面还附有必要的矩阵理论和一些复杂公式推导以及大量的参考文献。

# 第1章 波束形成与零点技术

对信号到达方向 (DOA) 的估计, 常规的方法是利用天线对各方向的响应来确定, 例如, 在通信测向中的最大值法和最小值法, 在雷达中利用波束指向来确定到达波的角度。通信中采用最小值法 (即小音点) 测向固然可以获得在到达波方向附近电平梯度最大, 但是, 它大大地降低了信噪比, 在噪声电平较高的环境中, 这种测向方法将带来很大的误差。而应用最大值法 (大音点) 或波束指向确定到达波方向, 虽然可获得最大的信噪比, 但到达波方向附近电平梯度较小, 也会产生较大的误差。为了提高测向精度, 通常采用窄波束甚至针形波束天线。这种方法带来以下几个问题:

1. 天线的几何尺寸增大。我们知道, 天线波束半功率点的宽度与天线孔径的电尺寸有如下关系

$$BW_{0.5} \approx (40 \sim 60) \frac{\lambda}{D} \quad (\text{度})$$

式中  $\lambda$  是工作波长,  $D$  为天线孔径近似为天线的机械尺寸。根据上式, 若要求波束宽度  $BW_{0.5} = 5^\circ$ , 则天线孔径至少要大于 8 个波长。这个数值对于波长比较长的工作频率而言, 这样大的尺寸是难以接受的。

2. 对于固定波束指向的天线, 为了获得全方位的角度信息, 必须进行机械扫描, (方位角和俯仰角)。机械扫描的速度是很慢的, 特别是对大尺寸的天线, 扫描一个周期的时间在 10 秒量级, 这在信息瞬变的情况下, 很容易丢失目标。

3. 波束越窄, 扫描速度越快, 接收到信号的数据率也越低。

必须指出, 接收天线的静态方向图是指天线输出对各方向的响应, 当空间有多个在处理带宽内的信号时, 天线输出响应与天线的静态方向图是不同的, 它不仅与各个信号的到达角有关, 而且也与信号强度有关, 这样得到的最大输出方向不一定是信号的到达角度。为了降低非主波束外的信号输出电平, 就必须降低旁瓣电平, 即要采用超低旁瓣天线。一般天线的最大旁瓣电平不会低于  $-10 \text{ dB} \sim -30 \text{ dB}$ , 采用特殊措施可以达到  $-40 \text{ dB}$  甚至更低, 再进一步降低旁瓣电平就很困难, 其原因对于线阵列天线而言是天线阵元间的互耦效应, 对于面天线主要是初级馈源的泄漏, 口径阻挡效应和天线的边缘效应。虽然目前已做成最大旁瓣电平低于  $-40 \text{ dB}$  的超低旁瓣天线, 但付出的代价也相当可观。为了解决扫描速度和多源干扰的问题, 采用阵列信号处理中的波束形成和零点技术, 不失为一个好方法。本章主要研究这两种技术的一般理论。

## 1.1 阵列天线的方向图

## 一、线性阵列

在讨论波束形成技术之前,我们先介绍一下一般阵列天线的特性。设有  $N$  个无方向性的传感器组成的线性均匀阵列,阵元间距为  $d$ ,来波方向与阵列法线的夹角为  $\theta$ ,以左边第一阵元为基准,则第  $i$  个阵元感应的复电压振幅,在忽略噪声的条件下为

$$X_i = S_0 e^{j(i-1)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta} = S_0 e^{j(i-1)\beta}$$

式中  $S_0$  为来波的复振幅,  $\beta = \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$ ,  $\lambda$  为到达波的中心波长。将所有阵元输出相加后得到阵列输出为

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{i=1}^N S_0 e^{j(i-1)\beta} \\ &= NS_0 e^{j\frac{N-1}{2}\beta} \frac{\sin \frac{N}{2}\beta}{N \sin \frac{1}{2}\beta} \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

取绝对值,并归一化得

$$|Y_0| = \left| \frac{\sin \frac{1}{2}N\beta}{N \sin \frac{1}{2}\beta} \right| \quad (1.1.2)$$

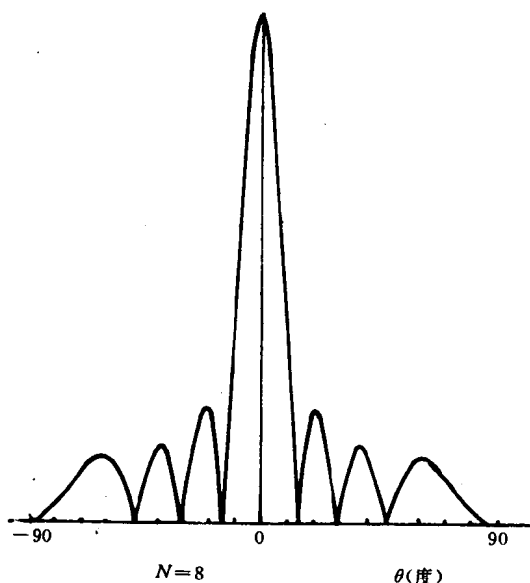


图 1.1 阵列天线方向图

阵列输出的绝对值与来波方向  $\theta$  间的关系称为天线的静态方向图, 当  $\frac{d}{\lambda} = 0.5$  时, 其方向图如图 1.1 所示。

从图中可得出<sup>[17]</sup>

- (1) 天线最大方向 (主瓣) 位于  $\beta=0$ , 或  $\theta=0$  处;
- (2) 天线主瓣两个零点之间的角度称为零点波瓣宽度  $BW_0$ 。

$$BW_0 = 2\sin^{-1} \frac{\lambda}{Nd} \quad (1.1.3)$$

若  $N\lambda \gg d$ , 则

$$BW_0 \approx \frac{2\lambda}{Nd} \quad (1.1.4)$$

主瓣半功率点的宽度在  $Nd \gg \lambda$  的条件下, 可近似为

$$BW_{0.5} \approx 0.886 \frac{\lambda}{Nd} \quad (1.1.5)$$

(3) 方向图的第一旁瓣电平最高, 且随阵元数  $N$  的增加而减小。当  $N=5$  时, 旁瓣电平为  $-12\text{dB}$ ;  $N=20$  时, 为  $-13\text{dB}$ , 而  $N$  相当大时, 它趋近于  $-13.3\text{dB}$ 。可见  $N$  增加旁瓣电平虽然有所降低, 但  $N$  很大时也不会小于  $-13.3\text{dB}$ 。

(4) 阵元间距  $d$  小于  $\lambda/2$  时, 天线方向图只有一个主瓣, 若超过了半个波长, 方向图可能出现较大的旁瓣甚至和主瓣高度相同的旁瓣, 称之为栅瓣, 对接收方向图而言表现在不同方向上有两个很大的输出, 使人们无法确定信号从哪个方向进入阵列, 所以又称它为模糊瓣, 为了避免出现栅瓣, 通常选择  $d \leq \lambda/2$ , 或用别的方法来消除模糊角度。

## 二、相位控制阵列

将阵元输出直接相加, 其阵列输出最大值出现在阵列法线方向 (即  $\theta=0$ ), 为了使所需信号的来波方向输出最大, 就必须转动天线 (称之为扫描) 使法线方向对准所需信号的来波方向。这给使用上带来很多的不便。通常利用阵元连续相位滞后 (或超前) 加权的方法, 控制加权的相位就可控制天线主瓣方向的指向, 这种方法称为相位控制阵列, 简称相控阵列。

设第  $i$  个阵元的权值为  $W_i$ , 那么阵元加权的输出相加得到的阵列输出为

$$Y_0 = \sum_{i=1}^N W_i S_0 e^{j(i-1)\beta}$$

若  $W_i = e^{-j(i-1)\beta_d}$ , 则

$$\begin{aligned} Y_0 &= \sum_{i=1}^N S_0 e^{j(i-1)(\beta - \beta_d)} \\ &= NS_0 e^{j\frac{N-1}{2}(\beta - \beta_d)} \frac{\sin\left[\frac{N}{2}(\beta - \beta_d)\right]}{N \sin \frac{1}{2}(\beta - \beta_d)} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

其输出绝对值归一化后为

$$|Y_0| = \left| \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta - \beta_d)}{N \sin \frac{1}{2}(\beta - \beta_d)} \right| \quad (1.1.7)$$

从上式可见,  $|Y_0|$  的最大值出现在  $\beta = \beta_d$  处, 若  $\beta_d = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta_d$ , 则  $\theta = \theta_d$  时输出最大, 只要控制  $\theta_d$  就可得到从  $-\pi/2 \rightarrow \pi/2$  范围内任何一个  $\theta$  上出现最大输出。此时零点波瓣宽度与半功率点波瓣宽度表示与前面表示有所不同

$$BW_0 = 2 \sin^{-1} \left( \frac{\lambda}{Nd} + \sin \theta_d \right) \quad (1.1.8)$$

$$BW_{0.5} = 0.886 \frac{\lambda}{Nd} \sec \theta_d \quad (1.1.9)$$

### 三、自适应阵列

连续相位滞后 (或超前) 加权虽然可以控制天线方向图主瓣的指向, 但是它对天线的旁瓣电平没有多大的影响。实际上, 我们并不需要降低除主瓣方向外其余所有方向的电平, 我们只要使非所需信号 (即干扰信号) 来波方向的响应降低, 最好的方法使其处于天线方向图的零点位置。这时, 所需信号与干扰信号方向的响应电平之比就可达 60dB~80dB。所以, 我们所关心的方向图是主瓣对准所需信号的来波方向, 干扰来波处在方向图的零点。必须指出所需信号和干扰方向都是未知的, 这就要求天线方向图应自动地满足上述要求, 换句话说, 要求天线方向性有自适应能力, 具有此能力的天线称为自适应天线。

连续相位滞后 (或超前) 加权可控制主瓣指向, 若幅度和相位同时加权, 还可获得主瓣指向信号零点指向干扰的方向图。当然, 幅度与相位加权是相互影响的, 但总是可以寻求一种复加权来获得如期效果。那么要怎样来确定阵列的加权函数? 实际上, 自适应阵列是一个空间域的滤波器, 根据不同的要求, 滤波器的性能有所不同, 例如, 以获得最大输出信噪 (干) 比的匹配滤波器; 根据输出与希望信号之差为最小均方误差的维纳滤波器; 以及专门对干扰 (或干扰加噪声) 抑制的滤波器等。所以, 在确定权函数时有如下几种准则:

- (1) 输出最大信噪比准则 (MSNR);
- (2) 最小均方误差准则 (LMS);
- (3) 干扰最大抑制准则。

最为常用的是前两种准则, 它们是从对信号处理总的性能考虑的, 而后一种是专门对干扰进行抑制的滤波器, 下面我们分别讨论这些准则的权函数。

## 1.2 最大输出信噪比准则

## 一、最佳权矢量的表示

设所需信号的复振幅为  $S_d$ , 则第  $i$  个阵元所感应的复振幅为

$$X_i = S_d e^{j(i-1)\beta_d}$$

经加权后阵元输出信号电压为

$$U_s = \sum_{i=1}^N W_i S_d e^{j(i-1)\beta_d}$$

用矢量表示为

$$U_s = \sqrt{N} S_d \mathbf{W}^T \mathbf{a}(\theta_d) = \sqrt{N} S_d \mathbf{a}^T(\theta_d) \mathbf{W} \quad (1.2.1)$$

式中

$$\mathbf{W} = [W_1, W_2, \dots, W_N]^T \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{a}(\theta_d) = \frac{1}{\sqrt{N}} [1, e^{j\beta_d}, \dots, e^{j(N-1)\beta_d}]^T \quad (1.2.3)$$

其中“ $T$ ”表示转置运算,  $\mathbf{a}(\theta_d)$  为归一化了的所需信号方向矢量。

单位电阻上阵列输出信号功率为

$$P_s = |U_s|^2 = N |S_d|^2 \mathbf{W}^T \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{W} \quad (1.2.4)$$

式中“ $H$ ”和“ $*$ ”分别为共轭转置和共轭运算。

阵列输出干扰加噪声(简称噪声)单位电阻上的统计平均功率为

$$\begin{aligned} P_n &= E\{|U_n|^2\} = E\{\mathbf{W}^T \mathbf{N} \mathbf{N}^H \mathbf{W}\} \\ &= \mathbf{W}^T E\{\mathbf{N} \mathbf{N}^H\} \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W} \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

式中  $\mathbf{M} = E\{\mathbf{N} \mathbf{N}^H\}$  称为噪声协方差矩阵, 它是一个 Hermitian 矩阵, 即  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^T$

$$\mathbf{N} = [n_1, n_2, \dots, n_N]^T$$

“ $E\{\cdot\}$ ”表示统计平均运算,  $n_i$  表示第  $i$  阵元的噪声。

阵列输出信噪比

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{|S_d|^2 \mathbf{N} \mathbf{W}^T \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{W}}{\mathbf{W}^T \mathbf{M} \mathbf{W}} \quad (1.2.6)$$

由上式可见, 当空间电磁环境确定的情况下, 输出信噪比是权矢量  $\mathbf{W}$  的函数, 为了简化求最大值, 我们采用将噪声协方差矩阵进行变换。由于  $\mathbf{M}$  是一个正定矩阵, 可以用两个 Hermitian 矩阵的积表示, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \mathbf{T} \mathbf{T} = \mathbf{T}^2 \\ \mathbf{M}^{-1} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-2} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

式中“ $-1$ ”表示矩阵求逆运算。

用矩阵  $\mathbf{T}^*$  对权矢量进行变换, 即

$$\mathscr{W} = \mathbf{T}^* \mathbf{W}, \quad \mathbf{W} = (\mathbf{T}^*)^{-1} \mathscr{W} \quad (1.2.8)$$

将上式代入 (1.2.6) 式中, 得到

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{P_s}{P_N} = \frac{|S_d|^2 N \mathcal{W}^T (T^{-1}) \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) (T^{-1}) \mathcal{W}^*}{\mathcal{W}^T (T^{-1}) \mathbf{M} (T^{-1}) \mathcal{W}^*} \\ &= \frac{N |S_d|^2 \mathcal{W}^T (T^{-1}) \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) (T^{-1}) \mathcal{W}^*}{\mathcal{W}^T \mathcal{W}^*} \\ &= \frac{N |S_d|^2 \mathcal{W}^T \mathbf{C} \mathbf{C}^H \mathcal{W}^*}{\mathcal{W}^T \mathcal{W}^*} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

式中

$$\mathbf{C} = (T^{-1}) \mathbf{a}(\theta_d) \quad (1.2.10)$$

从 (1.2.9) 式求最大值的问题转化为求简单的特征值问题, 得 SNR 最大值的解为

$$\mathcal{W} = \mathbf{e}_{\max}^*$$

$$\mathbf{C} \mathbf{C}^H \mathbf{e}_{\max} = \lambda_{\max} \mathbf{e}_{\max} \quad (1.2.11)$$

其中  $\lambda_{\max}$  和  $\mathbf{e}_{\max}$  是矩阵  $\mathbf{C} \mathbf{C}^H$  的最大特征值和与其相应的特征矢量。于是, 最大输出阵列信噪比为

$$(\text{SNR})_{\max} = N |S_d|^2 \lambda_{\max} \quad (1.2.12)$$

根据 (2.2.8) 式知最佳权矢量为

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = (T^{-1})^* \mathbf{e}_{\max}^* \quad (1.2.13)$$

由于矩阵  $\mathbf{C} \mathbf{C}^H$  的秩为 1,  $\mathbf{e}_{\max}$  是  $\mathbf{C} \mathbf{C}^H$  矩阵唯一的非零特征值相应的特征矢量, 所以  $\mathbf{C}$  也是矩阵  $\mathbf{C} \mathbf{C}^H$  的特征基矢量, 即  $\mathbf{e}_{\max}$  与  $\mathbf{C}$  同向, 即

$$\mathbf{e}_{\max} = \mu^* \mathbf{C} = \mu^* (T^{-1}) \mathbf{a}(\theta_d)$$

$$\mathbf{W}_{\text{opt}} = \mu (T^{-1})^* (T^{-1})^* \mathbf{a}^*(\theta_d) = \mu (M^{-1})^* \mathbf{a}^*(\theta_d) \quad (1.2.14)$$

式中,  $\mu$  是任意复常数。

最佳权矢量时, 阵列输出信噪比为

$$(\text{SNR})_{\max} = N |S_d|^2 \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d) \quad (1.2.15)$$

## 二、自适应阵的方向图

根据最大信噪比准则确定的权矢量能否达到主瓣对准所需信号方向, 干扰处在零点的目的呢? 今以一个干扰源为例加以说明: 设所需信号来波方向为  $\theta_d$ , 干扰方向为  $\theta_j$ , 此时阵列方向图为

$$\mathbf{G}(\theta) = \mathbf{W}_{\text{opt}}^T \mathbf{a}(\theta) = \mu \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{M}^{-1} \mathbf{a}(\theta) \quad (1.2.16)$$

噪声协方差矩阵可写成

$$\mathbf{M} = \sigma_n^2 \mathbf{I} + \mathbf{M}_j \quad (1.2.17)$$

式中  $\sigma_n^2$  是阵列单元噪声方差, 这里假设各阵元噪声方差相同, 且噪声独立,  $\mathbf{I}$  为  $N \times N$  阶单位矩阵, 一个干扰源的协方差矩阵为  $\mathbf{M}_j$ , 它为

$$\mathbf{M}_j = N P_j \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j)$$

9810024



利用矩阵求逆的公式, 将  $M_j$  代入 (1.2.17) 式后求得

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{1}{\sigma_n^2} I - \frac{\frac{1}{\sigma_n^2} NP_j \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j) \frac{1}{\sigma_n^2}}{1 + \frac{NP_j}{\sigma_n^2} \mathbf{a}^H(\theta_j) \mathbf{a}(\theta_j)} \\ &= \frac{1}{\sigma_n^2} \left[ I - \frac{\frac{NP_j}{\sigma_n^2} \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j)}{1 + \frac{NP_j}{\sigma_n^2}} \right] \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

把它代入 (1.2.16) 式, 可得方向函数为

$$\begin{aligned} G(\theta) &= \frac{\mu \mathbf{a}^H(\theta_d)}{\sigma_n^2} \left[ I - \frac{\frac{NP_j}{\sigma_n^2} \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j)}{1 + \frac{NP_j}{\sigma_n^2}} \right] \mathbf{a}(\theta) \\ &= \frac{\mu}{\sigma_n^2} \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta) - \frac{\mu NP_j}{\sigma_n^4} \frac{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j) \mathbf{a}(\theta)}{1 + \frac{NP_j}{\sigma_n^2}} \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

由上式可知天线的方向图由两部分之差组成, 式中右端的第一项是没有干扰和噪声时天线的静方向图 (1.1.7) 式, 第二项是由于干扰信号存在时的特征矢量方向图。我们感兴趣的是信号来波方向  $\theta_d$  和干扰方向  $\theta_j$  的响应。

(1) 当  $\theta = \theta_d$  时 (即信号方向的响应), 归一化后, 为

$$G(\theta_d) = 1 - \frac{NP_j}{\sigma_n^2} \frac{\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j) \mathbf{a}(\theta_d)}{1 + \frac{NP_j}{\sigma_n^2}}$$

通常干扰的功率  $P_j$  比  $\sigma^2$  大得多, 上式近似为

$$G(\theta_d) = 1 - \|\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j)\|^2$$

式中  $\|\cdot\|$  为范数

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j) &= \frac{1}{N} e^{j\frac{N-1}{2}(\beta_j - \beta_d)} \frac{\sin \frac{N}{2}(\beta_j - \beta_d)}{\sin \frac{1}{2}(\beta_j - \beta_d)} \\ \|\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j)\|^2 &= \frac{\sin^2 \frac{N}{2}(\beta_j - \beta_d)}{N^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\beta_j - \beta_d)} = \frac{\sin^2 \left[ \frac{N\pi d}{\lambda} (\sin \theta_j - \sin \theta_d) \right]}{N^2 \sin^2 \left[ \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \theta_j - \sin \theta_d) \right]} \end{aligned}$$

很显然, 当  $\theta_j$  离  $\theta_d$  比较远, 例如大于天线波束宽度, 则  $\|\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j)\| \approx 0$ , 因此, 在所需信号方向上的响应为 1, 则主瓣指向  $\theta_d$ 。

(2) 当  $\theta = \theta_j$  时

$$G(\theta_j) \approx \frac{\mu}{\sigma_n^2} [\mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j) - \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{a}(\theta_j) \mathbf{a}^H(\theta_j) \mathbf{a}(\theta_j)] = 0$$

3200130