●中国科学技术大学数学研究生教材丛书●

University of Science and Technology of China
Graduate Texts in Mathematics

公理集论

汪芳庭　编著

中国科学技术大学出版社

中国科大数学研究生教材丛书

公 理 集 论

汪芳庭　编著

中国科学技术大学出版社
1995·合肥

(皖)新登字 08

中

中国科学技术大学出版社出版发行
(安徽省合肥市金寨路 96 号　邮编:230026)
中国科学技术大学印刷厂印刷
新华书店经销
*
开本:850×1168/32　印张:6.5　字数:166 千字
1995 年 1 月第 1 版　1995 年 1 月第 1 次印刷
印数:1—1500 册
ISBN7－312－00597－7/O・150　定价:7.00 元

内 容 简 介

本书是讲述公理集论基础知识的一份讲义，内容包括集论的公理化，序数与基数，连续统假设的相对无矛盾性与相对独立性等. 取材精练，论证严谨、完整.

练习题附有提示或解答.

可用作数学系研究生及高年级本科生教材或教学参考书，并可供数学教师和有关研究人员参考.

前　言

本书由公理集论这门课程的讲稿修改而成，目的是为数学系研究生提供一种篇幅不大、内容精选的基础教材或教学参考书.

集论作为数理逻辑的一个分支，是数学与逻辑的交会点．集论的建立和发展深刻地改变了整个数学的面貌.

德国数学家 G.Cantor (1845 — 1918) 是集论的创始人．他在关于三角级数展开唯一性的研究中开始了对无限集的探索．他勇敢地向数学上的一种传统观念挑战，这种传统观念认为不能把实无限作为数学的研究对象．Cantor 卓有成效地对实无限进行了细致的考察，成功地对它们进行分类，取得了丰富的研究成果．关于实无限，他曾说："我是经过多年科学上的努力和研究，几乎违背我的意愿……，逻辑地被迫承认的．"(王宪钧:《数理逻辑引论》，279页).

数学精确地表现运动，不能局限于有限．把实无限作为自己研究对象的集论不是偶然出现的，而是数学发展到更高阶段的必然产物.

本世纪初集论中关于悖论的研究促进了公理集论的建立．在公理集论随后的迅速发展中贯穿的一条主线是连续统假设的真假问题．这个问题一百多年前由 Cantor 提出，在 Hilbert 著名的 1900 问题表中列于第一．K.Gödel 于 30 年代与 P.J.Cohen 于 60 年代关于这个问题分别取得的重要研究成果皆属本世纪最杰出的数学成就.

现今的公理集论已好比是群峰耸立层峦叠嶂的风景区．书中定的目标是：攀登其中的两座主峰 —— 连续统假设的相对无矛盾性与相对独立性．较难的攀登大体上从 6.1 节开始．书中所涉及

的证明都力求完整，并力求使每个攀登处都有合适的阶梯.

假定读者已有逻辑演算与朴素集论的初步知识.

中国科学技术大学研究生院高恒珊教授、中国科学技术大学李炯生教授曾阅读过本书的初稿，并提出宝贵意见. 此外，北京工业大学杨安洲教授曾给予作者以支持. 在此谨向以上各位致以谢意.

最后要特别感谢刘卫东、余华敏等同志，他们为提高本书质量付出了辛勤的劳动.

汪芳庭

1994 年 4 月

目 次

1　集论的公理化

让我们暂且按朴素的集合概念来谈论集.

例 1　所有拉丁字母构成一个集 α :

$$\alpha = \{a,\ b,\ c,\ \cdots,\ x,\ y,\ z\}$$

α 有 26 个元素: $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, $\cdots$, $z \in \alpha$. 但 α 本身不在上述字母之列, 故 $\alpha \notin \alpha$.

例 2　所有含十个以上元素的集构成的集记作 β.

例 1中的集 α 有不止十个元素, 故 α 是例 2 中集 β 的一个元素: $\alpha \in \beta$. 具有十个以上的元素的集是很多的, 当然是不止十个. 也就是说例 2 中的集 β 有不止十个成员. 按 β 的定义, β 是 β 自己的一个元素: $\beta \in \beta$!

1902年, 英国数理逻辑学家 Russell 提出了下面有名的悖论. 考察由所有不是自己成员的集构成的集 b :

$$b = \{\ 集\ a |\ \ a \notin a\}.$$

现问: 是 $b \in b$, 还是 $b \notin b$? 一回答问题, 立即导致矛盾:

$b \in b \Longrightarrow b \notin b$　　(若 b 为 b 的成员, 则具有性质: $b \notin b$)

$b \notin b \Longrightarrow b \in b$　　(b 若具有性质 $b \notin b$, 则 $b \in b$)

Russell 悖论的表述十分简单且明确无误, 这对本世纪初被认为是已可靠形成了的数学基础产生了冲击, 形成了所谓“第三次数学危机”.

除 Russell 悖论外, 当时还出现了其他一些悖论. 出现这些悖论, 说明不加限制地使用“集合”一词会出毛病. 构成一个集, 必须要有一些限制, 必须要作一些规定. 这就导致了集论的公理化. 一般把由 Cantor 开始建立的未进行公理化的集论叫做朴素集论.

常用的集论公理系统是 ZF 公理系统. (加上选择公理以后, 叫

做 ZFC 系统.) 这种系统首先由 Zermelo 于本世纪初提出，后由 Fraenkel 等人进行了修改和补充. 除了 ZF 系统，还有其他系统，例如 NBG (von Neumann-Bernays-Gödel) 系统. 在 NBG 系统中，有集和类这两种不同的形式对象.

本书中讨论的公理系统是 ZF. ZF 系统的形式对象只有集而没有类. 但后面我们会清楚，ZF 系统的这一特点并不妨碍我们在该系统中去研究类，当然，是在特定的意义下去研究.

在 ZF 系统中，我们把集理解为具有公理所规定的性质的对象. 集的元素也是集. 集的元素的元素仍然是集. 除了这种"世袭的集"，在集论的论域中没有别的东西.

1.1 ZF 系统的形式语言

除了 Russell 悖论，我们还会遇见另一种类型的麻烦.

先来看下面几个正整数:

第 10000 个素数，

数 987654321 的平方、

比 π^{10} 大的最小整数.

它们有个共同点: 用不超过一百个印刷符号就可明确定义. 印刷符号只有有限个. 用不超过一百个印刷符号能定义的正整数也只有有限个. 下面我们来定义一个正整数 z_0:

z_0 **是用不超过一百个印刷符号不能定义的最小正整数.**

但上面定义的这个正整数 z_0 恰恰是用不超过一百个印刷符号能定义的! (它上面的定义只用了 24 个符号.) 问题在于上面所用的语言中，"能定义"一词是不精确的.

我们介绍的公理系统 ZF(或 ZFC)是用形式语言来表达的形式系统. 所用的形式语言不同于自然语言，是一种人工语言，具有精确、不含混的特点.

ZF 系统的语言含有以下符号.

(1) 五个逻辑连接词: $\neg$(否定词), $\vee$(析取词), $\wedge$(合取词), $\rightarrow$(蕴涵词), $\leftrightarrow$(等价词).

(2) 两个量词: $\forall$(全称量词), $\exists$(存在量词).

(3) 两个关系词: $=$(等词), $\in$(属词).

(4) 可数个变元: $x, y, z, \cdots$(可带下标).

(5) 左括号(, 右括号).

由以上符号中若干有限个符号按一定的规则形成的符号串叫做公式. 规则有两条:

(Ⅰ) $x \in y$, $x = y$ 是公式, 叫做原子公式, 其中 x, y 可以换成其他变元;

(Ⅱ) 若 φ, ψ 是公式, 则

$\neg(\varphi)$, $(\varphi) \vee (\psi)$, $(\varphi) \wedge (\psi)$, $(\varphi) \rightarrow (\psi)$,

$(\varphi) \leftrightarrow (\psi)$, $\forall x(\varphi)$, $\exists x(\varphi)$

都是公式, 叫做更高层次的公式, 其中 x 可换成其他变元.

形式系统的命题和推理都是用这种语言表达的. 对这种形式语言可作多种解释. 但我们心目中的解释是:

变元 —— 集;	$\in$ —— 是 $\cdots$ 的元素;
$=$ —— 等于;	$\neg$ —— 否定;
$\vee$ —— (可兼)或;	$\wedge$ —— 与;
$\rightarrow$ —— 如果 $\cdots$, 那么 $\cdots$;	$\leftrightarrow$ —— 当且仅当;
$\forall x$ —— 对每个集 $x \cdots$;	$\exists x$ —— 存在集 $x \cdots$.

这样, 一个公式就可解释为某个关于集的命题. 例如, 公式

$$\forall x\ ((x \in a) \leftrightarrow (x \in b))$$

表示命题“对任意集 x, x 是集 a 的元素当且仅当 x 是集 b 的元素”; 公式

$$\exists x\ \forall y\ (\neg(y \in x))$$

表示命题“存在着没有任何成员的集”. 与此同时, 可以把关于集的命题翻译成公式. 例如, 命题“存在把一切集作为自己成员的

集”(不论其真假)可翻成公式

$$\exists x\ \forall y\ (y \in x).$$

命题“存在着以集 a 和集 b 为仅有元素的集”可翻成公式

$$\exists x\ \forall y\ ((y \in x) \leftrightarrow ((y = a) \vee (y = b))).$$

在不引起混淆时，可省去公式中的一些括号. 公式

$$\neg(x = y) \quad 与 \quad \neg(x \in y)$$

常被分别写作

$$x \neq y \quad 与 \quad x \notin y.$$

为了方便，常在公式中引进一些缩写. 例如常把公式

$$\exists x\ (x \in a \wedge \varphi(x)) \quad 与 \quad \forall x\ (x \in a \rightarrow \varphi(x))$$

分别缩写为

$$\exists x \in a\ \varphi(x) \quad 与 \quad \forall x \in a\ \varphi(x).$$

把公式

$$\exists x\ (\varphi(x) \wedge \forall y\ (\varphi(y) \rightarrow y = x))$$

缩写为

$$\exists! x\ \varphi(x).$$

意思是: “唯一存在具有性质 φ 的 x. ”有时甚至还在公式中夹进一些普通的语言 (必要时可以消去). 这样做可使公式的意义更容易理解; 不这样做, 公式就会写得很长, 难于阅读.

关于集论形式语言的进一步讨论见 5.1 节.

1.2 外延公理与内涵公理

我们开始讨论 ZF 公理系统，其中的公理是逐步引入的.

(ZF1) **外延公理**

$$\forall x\ (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b$$

这条公理是个蕴涵式，根据等词的可替换性，此式的反方向

也成立:

$$a = b \rightarrow \forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b)$$

合起来, 有

$$\forall x\,(x \in a \leftrightarrow x \in b) \leftrightarrow a = b.$$

根据外延公理, 二集相等, 指它们有完全相同的成员; 任何集都由它的成员完全确定. 外延公理作为集论的第一公理很好地服务于数学, 表现了数学思维具有精确性的特点.

引进缩写 $a \subset b$, 它代表公式

$$\forall x\,(x \in a \rightarrow x \in b),$$

于是外延公理可写成

$$(a \subset b \wedge b \subset a) \rightarrow a = b.$$

为证等式 $a = b$, 可分开证 $a \subset b$ 和 $b \subset a$.

现在希望能具体地构造出集来. 构造出的集应是在我们的语言中能精确规定的. 常用的构造方式是使用下面的内涵公理.

(ZF2) **内涵公理**

$$\forall s\,\exists y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)),$$

其中 $\varphi(x)$ 是任一不含有变元 y 的公式.

内涵公理的含义是: 用已知的性质 $\varphi(x)$ 可以形成一已知集 s 的子集 y, 这个 y 由 s 中具有性质 $\varphi(x)$ 的那些元素构成. 这里要求公式 $\varphi(x)$ 中不含变元 y, 是为了避免变元干扰: 公理所断言存在的集 y 不应预先出现在 $\varphi(x)$中.

内涵公理通常又称作概括公理或分离公理.

注意(ZF2)不是单独的一条公理, 而是一种公理模式, 其中含有无数条公理 —— 每个公式 $\varphi(x)$ 都对应于一条公理.

命题 1 **对给定的集 s 和公式 $\varphi(x)$, 由内涵公理(ZF2)所断言存在的集 y 是唯一存在的, 即**

$$\exists!\,y\,\forall x\,(x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge \varphi(x)).$$

证明 对给定的 s 和 $\varphi(x)$, 设 y 和 z 都是(ZF2)所断言存在

的集，我们有

$$\forall x\ (x \in y \ \leftrightarrow\ x \in s \ \wedge\ \varphi(x)) \quad 及$$

$$\forall x\ (x \in z \ \leftrightarrow\ x \in s \ \wedge\ \varphi(x)).$$

由此得

$$\forall x\ (x \in y \ \leftrightarrow\ x \in z),$$

再由外延公理(ZF1)得 $y = z$.

证　毕

有了命题 1，我们可按通常的习惯将(ZF2)中的

$$\forall x\ (x \in y \ \leftrightarrow\ x \in s \ \wedge\ \varphi(x))$$

缩写成

$$y = \{x \mid x \in s \ \wedge\ \varphi(x)\}$$

或

$$y = \{x \in s \mid \varphi(x)\},$$

等式右边 $\{x \in s \mid \varphi(x)\}$ 表示(ZF2)所断言存在的集，它是唯一的. 每逢遇见

$$t \in \{x \in s \mid \varphi(x)\},$$

我们可将它改用原来的语言写成

$$t \in s \ \wedge\ \varphi(t).$$

内涵公理(ZF2)现可写成

$$\forall s\ \exists y\ (y = \{x \in s \mid \varphi(x)\}).$$

在公理化以前，人们常自由地形成集 $\{x \mid \varphi(x)\}$，其中 $\varphi(x)$ 是关于 x 的某种性质. 我们已经看到，这种不加限制地形成集的方式导致了 Russell 悖论的产生：令 $b = \{x \mid x \notin x\}$，则得 $b \in b \ \leftrightarrow\ b \notin b$. 根据(ZF2)的要求，不能说$\{x \mid \varphi(x)\}$ 一定是集($\{x \mid x \notin x\}$ 则肯定不是集). 应用(ZF2)，必须先给定集 s，在 s 内部可用公式 $\varphi(x)$ 去形成 s 的子集.

命题 2　**不存在把一切集都作为自己元素的集，即**

$$\neg\exists s\ \forall y\ (y \in s).$$

证明　只用证明：对于任何集 s，都存在着不是 s 的成员的

集. 任给集 s, 作集

$$b = \{x \in s \mid x \notin x\}.$$

按照(ZF2), b 是集, 是 s 中所有具有性质"$x \notin x$"的成员 x 所构成的 s 的子集. 下面证明 $b \notin s$, 即 s 并非把一切集作为自己的成员. 事实上, 假设 $b \in s$ 便导致矛盾:

$b \in b \longrightarrow b \notin b$ （$b \notin b$ 是 b 的成员的性质)

$b \notin b \longrightarrow b \in b$ （由 $b \in s$ 及 $b \notin b$ 可知 $b \in b$ ）

证 毕

分析命题 2 的结论和它的证明便可看到, 有了内涵公理, Russell 悖论就不会出现. 要规定一个集, 不能光凭一个语句, 而是手头上预先有一个集 s, 再加上一条性质. 命题2 指出, 包含一切集的集 s 不存在. 若有这样的 s, 则内涵公理中的"$x \in s$"便成了虚设, 用内涵公理形成集的方式与无限制地形成集 $\{x \mid \varphi(x)\}$ 的方式并无区别, 于是 Russell 悖论又可重演了.

至此我们尚未见到一个具体的集. 第一个具体的集是由下面的命题3 给出的.

命题 3 唯一存在没有任何元素的集, 即

$$\exists!\, y\, \forall x\, (x \notin y)$$

证明 将(ZF2)中的 $\varphi(x)$ 取为 $x \neq x$, 并将(ZF2)中的 s 取为任意一个集, 则(ZF2)及命题1 断言了

$$\exists!\, y\, \forall x\, (x \in y \leftrightarrow x \in s \wedge x \neq x),$$

即

$$\exists!\, y\, (y = \{x \in s | x \neq x\}).$$

y就是所求的没有任何元素的集. 事实上, 若有 $x \in y$, 则有 $x \neq x$. 与 $x = x$ 矛盾.

证 毕

定义 1 (空集)

命题 3 所断言唯一存在的集叫做空集, 记作 ϕ.

定义毕

在 ZF 语言的字母表中并没有 ϕ 这个符号. 我们根据命题 3 引入这个新符号, 是为了方便. 如有必要可随时消去它, 从而不必扩大原来的字母表. 事实上, "$y = \phi$"可用"$\forall x(x \notin y)$"消去; "$\phi \in z$"可用"$\exists y(y = \phi \wedge y \in z)$"消去. 以后在通过定义引入新符号时不再一一说明类似的消去方法. 当然, 每引入一个新符号都须有根据, 且须符合可消去原则.

1.3 无序对与有序对

空集 ϕ 是我们第一个得到的具体的集. 除了 ϕ 是否还存在别的集? 由前面两个公理得不出结论. 为了得到新的集, 还要有新公理.

(ZF3) **无序对公理**

$$\exists s\ (a \in s\ \wedge\ b \in s).$$

无序对公理的含义是: 已知集 a 和集 b, 一定存在以 a 和 b 为元素的集 s. 根据(ZF3)与(ZF2), 可作出如下定义.

定义 1 **(无序对)**

设有集 a, b. 取集 s 使 $a, b \in s$((ZF3)肯定了这种 s 的存在性). 由 a 和 b 形成的无序对, 用 $\{a, b\}$ 表示, 指集

$$\{a,b\} = \{x \in s | x = a\ \vee\ x = b\}.$$

定义毕

定义 1 用了(ZF3), 还用了(ZF2). 定义式右边的集是内涵公理(ZF2)断言存在的. 在使用(ZF2)时, 公式 $\varphi(x)$ 取为

$$x = a\ \vee\ x = b.$$

由定义 1 知无序对 $\{a,b\}$ 以 a 和 b 为仅有的成员:

$$x \in \{a,b\}\ \leftrightarrow\ x = a\ \vee\ x = b.$$

当 $a = b$ 时, 记 $\{a\} = \{a, a\}$, 叫做由集 a 形成的独元集.

有了无序对公理(ZF3), 可以用它去形成新的集, 如 $\{\phi\}$, $\{\phi,\{\phi\}\}$, $\{\{\phi\}\}$, $\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$, 等等.

在无序对 $\{a,b\}$ 中, a和 b 的地位是平等的: $\{a,b\}=\{b,a\}$. 如果想要让 a 和 b 的地位有所区别, 应如何做? 为使集论服务于数学, 这是重要的事.

定义 2 **(有序对)**

以集 a 为先, 集 b 为后的有序对, 用 (a,b) 表示, 指集

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

定义毕

这样来定义有序对, 理由是清楚的: 从 $\{\{a\},\{a,b\}\}$ 中, 我们看到集 a 和集 b, 还看到了 a 和 b 的地位有所不同. 这样定义的有序对具有性质:

命题 1 $(a,b)=(c,d) \ \rightarrow \ a=c \ \wedge \ b=d.$

证明 (1) $a=b$ 时, 由 $(c,d)=(a,a)$ 得

$$\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\},\{a,a\}\}=\{\{a\},\{a\}\}=\{\{a\}\},$$

于是有 $\{c,d\}=\{a\}$, 进而得 $c=d=a$.

(2) $a\neq b$ 时, $\{c\}\neq\{a,b\}$(否则$c=a=b$), 于是由

$$\{\{c\},\{c,d\}\}=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

可得 $\{c\}=\{a\}$ 和 $\{a,b\}=\{c,d\}$, 前者导致 $c=a$, 进而由后者得 $b=d$.

证 毕

还可用其他不同的方式来定义有序对, 并使之具有命题1 中的性质. 只要有此性质, 不管构造方式如何, 应用是一样的.

利用无序对公理(ZF3)可以形成很多新的集. 这种集的形式可能很复杂, 但有个共同点: 至多有两个成员. 要得到更大的集则要有新的公理.