带位移的奇异积分方程与边值问题
〔苏〕Г.С.利特温秋克著
赵　桢　等译
赵　桢　　校
*
北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
西安新华印刷厂印刷
*
开本：850×1168　1/32　印张：16　字数：389千
1982年12月第一版　1982年12月第一次印刷
印数：1—6,500
统一书号：13243·10　　定　价：1.95元

前 言

利特温秋克的这本专著系统地介绍了带位移的奇异积分方程与边值问题。书中包括了近十多年来在这方面的大量研究成果，内容丰富、通俗易懂，并在书末附有近三百篇文献目录。此书对于复变函数、数理方程、泛函分析等专业方向的研究生和数学工作者以及数学系高年级学生都是很有益处的。

本书的翻译工作是集体完成的。78—79年教师讨论班读这本书时就已有翻译初稿，后来又经过加工整理、校订并油印成册，在同行们建议以及北京师范大学出版社的大力支持下，本书又经过一次修改定稿，终于和广大读者见面了，这是一件值得高兴的事。本书序言、第一章、第八章、第九章以及§6、§13由赵桢同志翻译；第六章以及§11，§12，§16，§17由刘来福同志翻译；第七章以及§8，§9，§19，§20，由陈方权同志翻译；§7，§14，§15由蒋绍惠同志翻译；另外邝荣雨同志翻译了§10和§18的初稿。最后对于全书译稿由赵桢同志做了统一修改和校订。由于译者水平所限，错误一定是难免的，希望读者指正。

原书中有些段落是用小字排印的，为了便于读者区别，译文中在相应的段落前后都标有◆号。

我系进修教师和研究生在读完油印稿的基础上帮助整理和抄写手稿付出了辛勤的劳动，在此对他们致以衷心的感谢。参加这一工作的有沈乃录、何致和、李章泉、田长久、楚译甫、赵达夫、黄海洋、林益、李正吾等同志。

译 者

1981年5月

序　　言

黎曼（Riemann）首先提出了线性边值问题，它的边界条件是未知解析函数极限值之间的关系式。这种问题很自然地与奇异积分——泛函方程相联系着。这种方程的核具有用积分曲线到它自身的同胚映射（位移）给定的奇异曲线。二十世纪初期希尔伯特（Hilbert）、Haseman 以及晚些时候 Carleman 都研究过具有位移的边值问题。系统地研究这类问题在苏联差不多是三十年前由 Н. И. Мусхелишвили 首先开始的，他建议用“带位移的问题”这一术语。对带位移的边值问题理论有着奠基意义的第一篇论文，是在梯比利斯由 Д. А. Квеселава 完成的。以后在梯比利斯和其他科学中心（罗斯托夫、喀山、明斯克、杜尚别、敖德萨等）又成功地发展了这一理论，现在已经很难把在这方面做过贡献的数学家名字都说出来了。作者以及讨论班的同事们，也都参加了发展这一理论的工作。

到目前为止发表了二百五十多篇论文，在各个方向上发展了带位移的方程和边值问题理论。特别是在有着实际意义的邻近理论应用上，也得到了一定的发展。例如混合（椭圆—双曲）型偏微分方程的边值问题理论、正曲率曲面的无穷小变形理论、理想流体的空泡流动理论以及各向异性的弹性理论等。

由于积累了大批材料，许多问题已经得到了彻底解决。想用广大读者都易懂的形式来讲清楚这些问题就是本书的目的。

由于作者掌握的材料非常丰富，所以要想使这本书既不太厚，又要讲得非常完整，简直是不可能的。因此决定只能详细地讲述作者认为是最重要，而且目前又解决得足够好的那些问题。

这也就是：带 Carleman 位移以及带非 Carleman 位移（尚不完整）的方程和问题的 Noether 理论，二元素边值问题的可解性理论以及某些更复杂的（多元素的）边值问题的可解性理论。首先，是二十多年来很多人研究过的广义黎曼边值问题可解性理论。至于那些补充的，不常遇到的或者暂时尚未充分解决的材料，（在有界黎曼曲面上带位移的边值问题、广义解析函数类中带位移的边值问题、带有混合边界条件的边值问题以及在复合边界上系数是分段连续情形的带位移方程等）将在每一章的未尾概括地进行简短介绍，并指出参考文献，作者力争做到一篇不漏，并且尽可能完整地给出文献目录。

作者的想法是在严格的数学基础上进行叙述，但又使主要在应用上感兴趣的人能够看懂本书。所以宁肯在系统地一般讲解以前，能够先浅显地讲一下。按照常规本书都不是从问题的最一般提法，而是从最简单的情形开始讲叙，例如第二章一开始只讲解由位移叠代产生的二元素循环群情形的 Noether理论，然后再把所得结果推广到 n 元素（n＞2）循环群情形。只是在这一章的最后才讨论了更复杂的方程，它除了位移以外，还包含取未知函数的复共轭值，并根据同样原则建立了带位移的二元素边值问题理论。在第三章讨论了正常的 Noether 问题，在第四章讲的是更复杂的超定问题。在这两章中讨论的都只是单连通区域情形。在第七章建立了多连通区域的二元素边值问题理论。在第五、六章分别讨论正常的与超定的多元素边值问题。为了同样的目的，我们把带 Carleman 位移的奇异积分方程理论也分成两部分，这种方程的 Noether 理论的基本内容（Noether 充分条件和指数公式）在第二章中就讲了，而为了掌握更加细致的问题（Noether 必要条件、算子代数的构造以及它们的标符等），读者还需要坚实的数学准备知识，我们就把这些内容移入第八章中去了。在计划中作者感到最困难的问题，是写最后的第九章(带非Carleman

位移的方程），从本质上讲，这里的叙述已不象第二至第七章那样基本，而作者仍努力做到对特定类型的读者来说，在这里可以找到他们所必需的结果，而不详细探究其论证。

只要在大学、师范学院或具有提高数学要求的工科院校里读过基本课程的人，都可以阅读本书的基本部分。为了方便读者，把一般不包含在基本课程中的必要知识写进了第一章。另外还希望读者熟悉Ф. Д. Гахов著《边值问题》一书的某些章节，因为作者仍想使本书接续该书的内容和传统。

在本书的写作过程中作者得到了讨论班集体的巨大帮助，他们是A. B. Айзенштат，Н. Л. Василевский，Ю. И. Карлович，В. Г. Кравченко，А. П. Нечаев，А. М. Николайчук，И. М. Спитковский，В. А. Чернецкий，М. В. Шапиро，作者对所有上面提到的人都表示深刻的谢意。

利特温秋克（Г. С. Литвинчук.）

于1975年1月　敖德萨

目　录

第一章　辅助材料

作者认为读者已经具备了在一般教科书范围内复变函数、实变函数和数学物理方程的知识。而且已经知道线性泛函分析的简单概念，但是在读本书时，有些在专门课中讲授的材料也是完全必需的。本章的目的就是给读者准备这些补充材料，它们是 *Noether* 算子抽象理论的基本命题，奇异积分算子的性质，带柯西（*Cauchy*）核的奇异积分方程理论以及关于一对或几对未知函数所提的黎曼边值问题理论。所有这些材料都只是简单介绍，不加证明，而且只介绍在本书中以后要直接用到的那些概念和原理。有关这里的辅助材料，如果读者想仔细了解的话，我们指出了相应的专著或综合性文章。§ 2 和 § 3 的一部分材料讲得比较完整，并带有必要的证明和解释，这有两种原因：第一，曲线到它自身的同胚性质以及与这种映射有联系的算子性质的有关材料是直接与本书基本内容相衔接的。第二，这里大部分的结果可能是在本书中第一次发表的。

§ 1　Noether 算子理论的基本原理

在这一节我们讨论巴拿赫（*Banach*）空间中 *Noether* 算子理论的基本概念。这里引入的所有结论的证明和有关这一理论的详细论述，读者可以在 *С. Г. Крейн* 的专著[119]中找到。在本专著中还给出了关于这个问题的大量文献。

假设 X_1 和 X_2 是巴拿赫空间。如果算子 $\mathscr{A}$ 的定义域 $D_{\mathscr{A}}$ 与 X_1 重合（在本书中以后到处都是如此），而算子 $\mathscr{A}$ 把空间 X_1 作用到空间 X_2。我们把方程

$$\mathscr{A} x = 0 \tag{1.1}$$

的所有解组成的集合 $Ker\,\mathscr{A}$ 叫做算子 $\mathscr{A}$ 的零点集合（或核）。当我们讨论的算子 $\mathscr{A}$ 是有界的情形时，集合$Ker\,\mathscr{A}$ 是空间X_1的一个子空间。子空间的维数，也就是方程（1.1）的线性无关解的个数，我们用$\alpha_{\mathscr{A}}$表示，记作 $\alpha_{\mathscr{A}}=dim\ Ker\,\mathscr{A}$. 分别在空间 X_1 和X_2 上确定的有界线性泛函空间我们用X_1^*和 X_2^* 表示，并且分别叫做空间 X_1 和 X_2 的共轭空间。算子 $\mathscr{A}$ 的共轭算子我们用 $\mathscr{A}^*$表示。这个算子把 X_2^* 作用到 X_1^*. 我们把方程

$$\mathscr{A}^*u=0 \tag{1.2}$$

的所有解组成的集合叫做算子 $\mathscr{A}^*$ 的零点集合（或核），并且用$Ker\,\mathscr{A}^*$ 表示，集合 $Ker\,\mathscr{A}^*$是空间X_2^*的子空间，并且记 $\alpha_{\mathscr{A}^*}=dimKer\,\mathscr{A}^*$.

算子 $\mathscr{A}$ 叫做在豪斯道夫（$Hausdorff$）意义下正规可解，如果非齐次方程

$$\mathscr{A}x_1=x_2 \tag{1.3}$$

对而且仅对那样的右端 x_2 可解，这里 x_2 与共轭齐次方程（1.2）的所有解都是正交的，也就是说

$$u(x_2)=0 \tag{1.4}$$

对所有的$u\in Ker\,\mathscr{A}$都成立。换言之，当且仅当算子 $\mathscr{A}$ 的值域 $R_{\mathscr{A}}$ 是共轭算子 $\mathscr{A}^*$ 之核 $Ker\,\mathscr{A}^*$ 的正交补集时，算子 $\mathscr{A}$ 叫做是正规可解的。

现在我们可以引入$Noether$算子及其指数的定义了。

定义 1.1 我们把有界线性算子

$$\mathscr{A}:X_1\to X_2$$

叫做 $Noether$ 算子，如果：

1）算子 $\mathscr{A}$ 正规可解；

2）数 $\alpha_{\mathscr{A}}$和 $\alpha_{\mathscr{A}^*}$有限。

定义 1.2 我们把整数

$$Ind\,\mathscr{A} = \alpha_{\mathscr{A}} - \alpha_{\mathscr{A}^*}$$

叫做 $Noether$ 算子 $\mathscr{A}$ 的指数，记作 $Ind\,\mathscr{A}$.

带柯西核的奇异积分子算子（这种算子我们将在§4中讨论）就是 $Noether$ 算子的最重要的例子，它可以作为本节中将要建立的抽象算子理论模型。

还要指出，方程 $\mathscr{A}x_1 = x_2$ 叫做 $Noether$ 方程，这里 $\mathscr{A}$ 是 $Noether$ 算子，x_1 是未知数，而 x_2 是给定的元素。数 $Ind\,\mathscr{A}$ 也叫做 $Noether$ 方程的指数。

下面我们将给出 $Noether$ 算子及其指数的另一种定义，它们与上述定义 1.1 和定义 1.2 是等价的。

算子 $\mathscr{A}$ 的正规可解条件与算子 $\mathscr{A}$ 的值域 $R_{\mathscr{A}}$ 是闭的（即 $R_{\mathscr{A}} = \overline{R}_{\mathscr{A}}$）这个条件是等价的。我们假设上述条件满足，现在来讨论商空间 $X_2/R_{\mathscr{A}}$，这个商空间我们叫做算子 $\mathscr{A}$ 的协核，用记号 $Coker\,\mathscr{A}$ 表示，即 $Coker\,\mathscr{A} = X_2/R_{\mathscr{A}}$，且记 $\beta_{\mathscr{A}} = dim\ Coker\,\mathscr{A}$. 显然，子空间 $Ker\mathscr{A}^*$ 是有限维的充分必要条件就是商空间 $Coker\mathscr{A}$ 是有限维的。在这种情况下

$$\alpha_{\mathscr{A}^*} = \beta_{\mathscr{A}}.$$

现在就给出与定义 1.1 和 1.2 等价的定义：

定义 1.1′ 有界线性算子

$$\mathscr{A}:\ X_1 \to X_2$$

叫做 $Noether$ 算子，如果

1）算子 $\mathscr{A}$ 的值域 $R_{\mathscr{A}}$ 是闭的；

2）数 $\alpha_{\mathscr{A}}$ 和 $\beta_{\mathscr{A}}$ 是有限的。

定义 1.2′ 整数

$$Ind\,\mathscr{A} = \alpha_{\mathscr{A}} - \beta_{\mathscr{A}}$$

叫做 *Noether* 算子 $\mathscr{A}$ 的指数，记作 $Ind\,\mathscr{A}$

定义 1.1′ 和 1.2′ 的特点在于它不利用共轭算子的概念，因此，当我们不知道算子 $\mathscr{A}^*$ 的具体形式，或者根本不知道与 X_1^* 和 X_2^* 同构而其结构又足够简单的空间时，利用这种定义就显得方便多了。

根据下面的定义我们可以从所有 *Noether* 算子的集合中分出一个 *Fredholm* 算子的子集合来。

定义 1.3 指数等于零的 *Noether* 算子叫做 *Fredholm* 算子。

在以下的命题中列出了 *Noether* 算子的重要性质：

1. 算子 $\mathscr{A}$ 是 *Noether* 算子的充分必要条件是其共轭算子 $\mathscr{A}^*$ 也是 *Noether* 算子，并且 $Ind\,\mathscr{A}^* = -Ind\,\mathscr{A}$.

2. 对任何 *Noether* 算子 $\mathscr{A}$ 总存在这样的正数 $\rho(\mathscr{A})$，使得对所有满足 $\|\mathscr{B}\|<\rho(\mathscr{A})$ 的线性算子 $\mathscr{B}$ 来说，算子 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 都是 *Noether* 算子，且

$$Ind\ (\mathscr{A}+\mathscr{B}) = Ind\,\mathscr{A}.$$

通常，把这一命题叫做用范数充分小的算子干扰算子 $\mathscr{A}$ 时，其指数是稳定的命题。

3. 如果 $\mathscr{A}$ 是 *Noether* 算子，而 $\mathscr{D}$ 是完全连续算子，则算子 $\mathscr{A}+\mathscr{D}$ 仍是 *Noether* 算子，而且

$$Ind\ (\mathscr{A}+\mathscr{D}) = Ind\,\mathscr{A}.$$

这一命题也叫做用完全连续算子干扰算子 $\mathscr{A}$ 时，其指数是稳定的命题。

从命题 3 还特别可以得到 $\mathscr{U}=\mathscr{I}+\mathscr{D}$ 是 *Fredholm* 算子，这里 $\mathscr{I}$ 是恒等算子，算子 $\mathscr{U}$ 还叫做标准 *Fredholm* 算子，这种算子的简单例子是由 *Fredholm* 本人所研究过的算子：

$$(\mathscr{U}\varphi)(x) \equiv \varphi(x) + \lambda\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds = f(x),$$

其中核 $K(x, s)$ 在区域 $a \leqslant x \leqslant b$，$a \leqslant s \leqslant b$ 上连续，右端 $f(x)$ 在 $a \leqslant x \leqslant b$ 上连续，而 a 和 b 是实数。

4. 如果算子 $\mathscr{A}$：$X_2 \to X_3$ 和 $\mathscr{B}$：$X_1 \to X_2$ 都是 *Noether* 算子，则它们的组合（乘积）$\mathscr{A}\mathscr{B}$：$X_1 \to X_3$ 也是 *Noether* 算子，而且

$$Ind\ (\mathscr{A}\mathscr{B}) = Ind\,\mathscr{A} + Ind\,\mathscr{B}.$$

如果存在这样的有界线性算子 $\mathscr{B}$，使得乘积 $\mathscr{B}\mathscr{A}$（$\mathscr{A}\mathscr{B}$）是一标准 *Fredholm* 算子，则称算子 $\mathscr{A}$ 可以从左（从右）正则化。在这种情况下算子 $\mathscr{B}$ 叫做算子 $\mathscr{A}$ 的左(右)正则化算子。如果算子 $\mathscr{A}$ 既可以从左又可以从右正则化，则称算子 $\mathscr{A}$ 可以正则化。在这种情况下，左（右）正则化算子也是右（左）正则化算子，并且简称为算子 $\mathscr{A}$ 的正则化算子。如果正则化算子存在，那么不计一个完全连续加项的话，它是完全确定的。

5. 算子 $\mathscr{A}$ 是 *Noether* 算子的充分必要条件是满足下列两条件中的一个：

a）算子 $\mathscr{A}$ 可以正则化；

$б$）存在这样的线性算子 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 使得算子 $\mathscr{B}_1\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{A}\mathscr{B}_2$ 都是 *Noether* 算子。

6. 对于带 *Fredholm* 算子 $\mathscr{A}$ 的方程（1.3）有以下两结论之一成立：

a）或者相应的齐次方程（1.1）没有线性无关解（$\alpha_{\mathscr{A}} = 0$），这时候，方程（1.3）无条件单值可解。

$б$）或者方程（1.3）可解的充分必要条件是满足 $\alpha_{\mathscr{A}^*} = \alpha_{\mathscr{A}}$ 个可解条件 $u\ (x_2) = 0$.

这个命题叫做 *Fredholm* 二者选一命题，在本书后面几章里要常常用到。

Noether 算子 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 叫做是同伦的，如果存在这样的 *Noether* 算子连续族 V_θ，$0 \leqslant \theta \leqslant 1$，使得 $V_0 = \mathscr{A}$ 和 $V_1 = \mathscr{B}$.

7. 如果算子 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是同伦的，则

$$Ind\,\mathscr{A} = Ind\,\mathscr{B}.$$

算子 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 同伦，我们将用记号$\mathscr{A}\simeq\mathscr{B}$表示，特别是如果差$\mathscr{A}-\mathscr{B}$是一完全连续算子时，将有$\mathscr{A}\simeq\mathscr{B}$.

最后，为了读者方便，我们再引入某些以后常用到的有关巴拿赫空间线性算子理论的概念和事实。

A. 一个有界算子和另一个完全连续算子的乘积（组合）仍是完全连续算子。

从 X_1 作用到 X_2 的所有有界线性算子构成的巴拿赫空间，我们用 $\mathscr{L}(X_1, X_2)$ 表示，算子的范数就是空间$\mathscr{L}(X_1, X_2)$的范数。空间 $\mathscr{L}(X, X)$，这里 X 是巴拿赫空间，将用$\mathscr{L}(X)$表示，空间 $\mathscr{L}(X)$ 是一个巴拿赫代数。

如果$\mathscr{P}\in\mathscr{L}(X)$，且$\mathscr{P}^2=\mathscr{P}$，则$\mathscr{P}$叫做射影算子（或叫做到空间 X 的某一子空间的射影算子）。和$\mathscr{P}$一起是射影算子的还有算子$\mathscr{Q}=\mathscr{I}-\mathscr{P}$，其中$\mathscr{I}$是空间 X 的恒等算子。

Б. 算子$\mathscr{P}$和 $\mathscr{Q}=\mathscr{I}-\mathscr{P}$是互相正交的射影算子，并把空间 X 分成两个子空间 $\widetilde{X}=Ker\,\mathscr{Q}=R_{\mathscr{P}}$，$\widetilde{\widetilde{X}}=Ker\,\mathscr{P}=R_{\mathscr{Q}}$ 的直接和，分解式 $X=\widetilde{X}\oplus\widetilde{\widetilde{X}}$ 是由公式

$$\mathscr{I}x=\mathscr{P}x+\mathscr{Q}x$$

给出，其中 $x\in X$，$\mathscr{P}x\in\widetilde{X}$，$\mathscr{Q}x\in\widetilde{\widetilde{X}}$.

§.2 简单光滑曲线到它自身同胚变换的某些性质

假设 Γ 是简单的闭光滑曲线，$\alpha(t)$ 是曲线 Γ 到它自身的同胚变换（相互单值连续变换）我们把同胚变换 $\alpha(t)$：$\Gamma\to\Gamma$ 也叫做位移。函数 $\alpha(t)$ 实现的变换或者保持曲线 Γ 原来的方向，或者改变成它的相反方向。保持 Γ 方向的同胚变换我们常常叫做正位移，而改变 Γ 方向的同胚变换叫做反位移。有时，把正、反位移分别用 $\alpha_+(t)$ 和 $\alpha_-(t)$ 来表示。我们以后将会看到边值

问题和带位移的奇异积分方程理论与位移的性质有着本质的联系。本节的目的就是研究以后我们要用到的有关位移的某些性质，并在这个基础上给出位移的分类。有一种分类的要重原则是根据我们上面给出的位移定向，还有一种分类原则是根据位移有没有某一重数的不动点。如果位移具有不动点，则还应该区分曲线的所有点都是不动点与只是某一固定闭子集合中的点是不动点两种情形。我们先提醒一下不动点的定义：

点 $\tau\in\Gamma$ 叫做位移 $\alpha(t)$ 的 k 重（$k\geqslant 1$）不动点，如果当 $k>1$ 时，$\alpha_k(\tau)=\tau$，而对一切 $i=1, 2,\cdots, k-1$，$\alpha_i(\tau)\neq\tau$，其中 $\alpha_i(t)=\alpha\left[\alpha_{i-1}(t)\right]$，$\alpha_0(t)\equiv t$.

一重不动点有时就简称为不动点。

位移 $\alpha(t)$ 的 k 重不动点集合我们用 $\mathfrak{N}(\alpha, k)$ 表示。

序列 $\alpha_n(t)$，$n=1, 2, \cdots$，叫做位移 $\alpha(t)$ 在点 t 处的叠代序列。位移 $\alpha(t)$：$\Gamma\rightarrow\Gamma$ 的全体$\mathfrak{M}$可以分成以下三个不相交的类：

1. 类 $\mathfrak{M}_1$. $\alpha(t)$ 的不动点集合与曲线 Γ 重合。

2. 类 $\mathfrak{M}_2$. $\alpha(t)$ 的不动点集合不空，也不与曲线 Γ 重合。

3. 类 $\mathfrak{M}_3$. $\alpha(t)$ 的不动点集合是空集合。

我们规定在曲线 Γ 上给定的某一方向是正方向，我们用 (τ, t)（相应的 $[\tau, t]$）表示曲线 Γ 的开（闭）弧（即从点 τ 按正方向到点 t 所跑过的弧）。

我们将证明可以说明位移 $\alpha(t)$ 不动点集合构造的几个命题，在这些命题的基础上，把位移进行分类，这对讲解本书的基本材料来说是够用了。

引理 2.1 如果正位移 $\alpha(t)$ 或者属于类 $\mathfrak{M}_1$，或者属于类 $\mathfrak{M}_2$，而且 τ 是 $\alpha(t)$ 的一重不动点，那末，只要还有其他不动点的话，它就一定也是一重的。

证明 根据条件，集合$\mathfrak{R}(\alpha, k)$不空，如果$\mathfrak{R}(\alpha, 1)=\Gamma$，则$\alpha(t)\equiv t$，于是引理显然成立。假设$\mathfrak{R}(\alpha, 1)\neq\Gamma$，并且假设$t$是曲线$\Gamma$上不属于集合$\mathfrak{R}(\alpha, 1)$的点。集合$\mathfrak{R}(\alpha, 1)$是闭的，于是它到曲线$\Gamma$的补集必是开集，从而它可以表成区间和的形式，因此一定可以选取这样的点τ_1，$\tau_2\in\mathfrak{R}(\alpha, 1)$使得$t\in(\tau_1, \tau_2)$且区间$(\tau_1, \tau_2)$与集合$\mathfrak{R}(\alpha, 1)$的交集是空集合：

$$(\tau_1, \tau_2)\cap\mathfrak{R}(\alpha, 1)=\Phi. \tag{2.1}$$

特别地，点τ_1和τ_2可以重合（如果集合$\mathfrak{R}(\alpha, 1)$只由一个点组成），这时$(\tau_1, \tau_2)=\Gamma\backslash\{\tau_1\}$，因为$\tau_1$，$\tau_2\in\mathfrak{R}(\alpha, 1)$，而$\alpha(t)$是保持方向的同胚，那么点$\alpha(t)\in(\tau_1, \tau_2)$. 事实上，弧$(\tau_1, t)$和$(t, \tau_2)$通过函数$\alpha(t)$分别映射成弧$(\tau_1, \alpha(t))$和$(\alpha(t), \tau_2)$，假定$\alpha(t)\overline{\in}(\tau_1, \tau_2)$，就与映射$\alpha(t)$: $\Gamma\to\Gamma$保持方向矛盾。再按归纳法得到，对有所的n成立

$$\alpha_n(t)\in(\tau_1, \tau_2). \tag{2.2}$$

因为$t\overline{\in}\mathfrak{R}(\alpha, 1)$，那么或者$\alpha(t)\in(t, \tau_2)$(《超前》位移)，或者$\alpha(t)\in(\tau_1, t)$（《滞后》位移）。我们假定$\alpha(t)\in(t, \tau_2)$，由上面得到：位移$\alpha(t)$把弧$(\tau_1, \tau_2)$映射成它本身，再考虑到$\alpha(t)$还保持方向，我们得到

$$\alpha_n(t)\in(\alpha_{n-1}(t), \tau_2), \quad n=1, 2, \cdots\cdots. \tag{2.3}$$

由(2.3)，还特别地得到对所有的$n=1, 2, \cdots\cdots$都有$\alpha_n(t)\neq t$，因此如果$t\overline{\in}\mathfrak{R}(\alpha, 1)$，那么对所有$k=2, 3, \cdots\cdots$都有$t\overline{\in}\mathfrak{R}(\alpha, k)$，因为$t$是$\Gamma\backslash\mathfrak{R}(\alpha, 1)$中的任意点，于是$\mathfrak{R}(\alpha, k)=\Phi$，$k=2, 3, \cdots\cdots$. 从而引理2.1得证。

引理 2.2 如果点τ_1，$\tau_2\in\mathfrak{R}(\alpha, 1)$，并且

$$(\tau_1, \tau_2)\cap\mathfrak{R}(\alpha, 1)=\Phi, \tag{2.1}$$

那么对于任意点$t\in(\tau_1, \tau_2)$，叠代序列$\alpha_n(t)$收敛于同一个不动点，它或者是点τ_1，或者是点τ_2。

证明 假设 t 是开弧 (τ_1, τ_2) 中的某一点，由 (2.2)，所有的点 $\alpha_n(t)$ 都属于弧 (τ_1, τ_2) 中，从这有界序列 $\{\alpha_n(t)\}$ 中可以分出一个收敛的子序列 $\{\alpha_{n_i}(t)\}$：

$$\lim \alpha_{n_i}(t) = \tau_3,\text{ 其中 } \tau_3 \in [\tau_1, \tau_2]. \tag{2.4}$$

点 $t \bar{\in} \mathfrak{R}(\alpha, 1)$. 因此或者 $\alpha(t) \in (t, \tau_2)$，或者 $\alpha(t) \in (\tau_1, t)$，为了确定起见，假定 $\alpha(t) \in (t, \tau_2)$. 我们讨论弧 (t, τ_3) 和 (τ_3, τ_2). 如果存在这样的号码 $m>1$，使得 $\alpha_m(t) \in (\tau_3, \tau_2)$，那么，根据 (2.3) 得到：对所有的 $n_i>m$，都有 $\alpha_{n_i}(t) \in (\alpha_m(t), \tau_2)$，但这与 (2.4) 相矛盾，因此对所有的 $n>n_i$ 都有 $\alpha_n(t) \in (\alpha_{n_i}(t), \tau_3)$. 由此根据 (2.4) 得到 $\lim \alpha_n(t) = \tau_3$. 此外，还有

$$\tau_3 = \lim \alpha_{n+1}(t) = \lim \alpha[\alpha_n(t)] = \alpha(\tau_3). \tag{2.5}$$

这样，$\tau_3 \in \mathfrak{R}(\alpha, 1)$. 再根据条件(2.1)和 (2.4)，得到 $\tau_3 = \tau_2$. 如果 $\alpha(t) \in (\tau_1, t)$，那末完全类似地可以证明序列 $\{\alpha_n(t)\}$ 收敛于极限 $\tau_3 = \tau_1$. 假设 $\lim \alpha_n(t) = \tau_2$，于是，$\lim \alpha_{-n}(t) = \tau_1$，并且弧 (τ_1, τ_2) 被分成可数个弧 $[\alpha_k(t), \alpha_{k+1}(t))$，$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$. 选取任意点 $\bar{t} \in (\tau_1, \tau_2)$，点 $\alpha_k(\bar{t})$ 必属于弧 $[\alpha_k(t), \alpha_{k+1}(t))$ 当中的某一个。因为

$$\lim_{k\to+\infty} \alpha_k(t) = \lim_{k\to+\infty} \alpha_{k+1}(t) = \tau_2,$$

那么 $\lim\limits_{k\to+\infty} \alpha_k(\bar{t}) = \tau_2$. 于是**引理** 2.2 得证。

引理 2.1 有如下的推论成立。

引理2.3 如果正位移 $\alpha(t)$ 属于类 $\mathfrak{M}_1$ 或 $\mathfrak{M}_2$ 中的一个，而 τ 是 $\alpha(t)$ 的 k $(k \geqslant 1)$ 重不动点，那么，只要 $\alpha(t)$ 还存在其他不动点的话，它也一定是 k 重的。

当 $k=1$ 时，这一命题就是前面已经证明了的引理2.1。

证明 根据条件 $\mathfrak{R}(\alpha, k) \neq \phi$. 假设 m 是使集合 $\mathfrak{R}(\alpha, m)$ 不空的最小正整数，换句话说，就是 $\mathfrak{R}(\alpha, m) \neq \phi$，而（如果