粘弹性力学引论

〔美〕R. M. 克里斯坦森 著

科学出版社

粘弹性力学引论

〔美〕R. M. 克里斯坦森 著

郝松林 老亮 译

科学出版社

1990

内 容 简 介

本书是有关粘弹性力学的一本名著，原著第一版是根据作者在加州大学为研究生编写的教材整理而成，第二版补充了三个方面的最新进展——实用近似计算、不适合积分变换法的问题和非线性粘弹性. 全书共分九章: (1) 粘弹性应力应变本构关系； (2) 等温边值问题； (3) 热粘弹性力学； (4) 力学性质和近似的变换反演； (5) 非变换型问题； (6) 波的传播； (7) 普遍定理及其表述； (8)非线性粘弹性力学； (9)非线性力学性能.

本书适合复合材料、聚合物科学、岩土力学、生物力学和建筑材料科学等领域的研究生、科研人员和工程技术人员以及力学专业的大学生、研究生和教师阅读和参考.

R. M. Christensen
THEORY OF VISCOELASTICITY, AN INTRODUCTION
Second Edition
Academic Press, Inc. 1982

粘弹性力学引论

〔美〕 R. M. 克里斯坦森 著
郝松林 老 亮 译

责任编辑 杨 岭

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990年11月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1990年11月第一次印刷 印张：12 5/8
印数：0001—1 100 字数：329 000

ISBN 7-03-001823-0/O · 351

定价： 15.20 元

译 者 的 话

粘弹性力学是在应用力学和材料科学之间新近发展起来的边缘学科，也是流变学的重要组成部分．近几年来，在聚合物-复合材料科学、岩土地质力学、生物力学和建筑材料科学中，粘弹性力学得到了越来越多的应用．第二次世界大战后，尤其是 60 年代以来，聚合物材料已成为重要的工程材料，目前按体积产量已经超过了钢铁．有人预计，到本世纪末其重量产量也将超过所有金属产量的总和．聚合物材料的广泛应用促进了有关力学性态和结构分析方法的研究．它向人们提出了不少新的课题，引起了众多材料学和力学工作者的注意和兴趣，从而使粘弹性力学在近二十年得到重要的发展．

美国加州大学克里斯坦森教授在粘弹性力学方面是国际知名的学者．1971 年他编写的这本研究生教材，出版后即受到各国同行的重视，并被广泛引用．在 1982 年修订第二版中，作者补充了这个领域的最新进展．本书全面而系统地介绍了粘弹性力学在各方面的理论和应用，是这个领域中一本有代表性的知名著作．在 1978 年我国力学发展规划和 1982 年中国力学学会理事会精神鼓舞之下，我们将原书 1982 年第二版译出，以便向我国读者介绍粘弹性力学的基础知识和最新发展．我们确信，不论是用作入门学习还是用作研究参考，读者都会从本书中得到许多有益的启示．

书中的数学、力学和化学名词，大部分根据《英汉数学词汇》、《英汉高分子词汇》和《英汉化学化工词汇补编(流变学部分)》译出．不能统一时，采用较为习惯的译法．原书中存在的笔误和印刷错误，凡已发现者都作了改正，一般不予逐条注明．

我们敬爱的老师周鸣溪教授始终热情关怀这次翻译工作，并

在百忙中精细地审改了部分译稿，在此谨致深切的谢意.

限于水平和时间，译文中不当之处在所难免，欢迎批评指正.

译者

第二版序言

粘弹性理论为预测材料的性态提供了一种严密而广泛的基本数学框架. 本书初版以来,该理论已经有了很大进展. 这次再版,补充了许多最新的内容.

本书在章节结构上作了修订和增补，以适应三个主要方面的发展:(i)为了实际应用的近似计算;(ii)积分变换法不适用的问题;(iii)非线性的情况.下面的新课题都是作为自成体系的章节分别加以论述的:

各性质的谱型式表示
玻璃化转变判据
热传导
各性质之间的近似相互关系
Laplace 变换的近似反演
动力问题的近似解
扩展的对应性原理
通过局部破坏来模拟裂纹增长
通过能量平衡来模拟裂纹增长
热粘弹性应力分析
粘弹性 Rayleigh 波
最优的应变历史路径
弹胶体的非线性性质
非线性加速波
测粘流动
非测粘流动
粘弹性润滑

与此同时,对原来的关于非线性力学性质一节,也作了扩充.

任何实事求是的评价都表明，线性理论已经相当完整而全面．关于非线性形式的一般理论，尽管已经取得了可喜的进展，但还远未臻于完善．本书对非线性理论的讨论就反映了这种状况．然而，线性和非线性理论的实际应用，都会给技术进步不断提供机会．

感谢 Lawrence Livermore 国家实验室在复合材料方面对本人工作所给予的支持．感谢许多人就本书第一版向我提出了有益的意见．关于本书第二版，我衷心地感谢 Sheila Slavin 小姐准确而迅速的打印．最后，我愿向 Kristy，Lori 和 Kurt C. 表示感激之情，他们从大大小小的许多方面为书稿的撰写作了准备工作。

R. 克里斯坦森

加利福尼亚　丹维尔

第一版序言

材料的粘弹性态这一概念，尽管起源悠久，但只在最近才突出地受到广泛的注意并得到运用．本领域的近期活动成果，主要由于聚合物的出现，使该理论的许多不同方面及其应用方法都得到了发展．本书准备结合这种种不同的理论发展，为材料的粘弹性线性理论提供一种相当完整而连贯的描述．并对粘弹性力学的一般非线性理论作一初步介绍．

这里所遵循的途径是按照连续介质力学的观点导出适当的理论表达式，并对某些问题的解题技巧进行了举例说明和讨论．前五章[1]讨论了线性理论的许多方面，包括等温和非等温两种条件，还包括动力学和准静力学方面的问题．划清了固体和流体之间的界限，并论述了线性理论在流体方面的有限适用性．在广泛探讨了线性理论之后，第六章对粘弹性非线性理论进行了简要分析．对适用于固体和流体的非线性理论分别给予推导．指明了线性与非线性理论的共同特征和某些差异．最后一章简短探讨了适合于线性和非线性理论的一些确定力学性质的方法．总而言之，写这本书的宗旨是表明本课题的理论特色．然而，希望本书最终能够合乎实际应用的动机强烈地影响着我们的写作思想．此外还需说明，辟确定力学性质一章，是为了介绍该理论在某些特定方面的实际应用．

本书原想写成研究生用的教科书．书里面的某些内容参考了本人 1966 年和 1970 年在伯克利加州大学关于本专题的研究生课程的讲稿．与此有关，或许应该提一下，这里给出的一些进展，在

1) 指第一版．第一版和第二版头三章基本相同，其他章次大致对应关系是：四相当于六；五相当于七；六相当于八；七（最后一章）相当于四和九的一部分．——译者注

文献中似乎尚未见过。无论是用作教材或参考书，都假定有一本用笛卡儿张量记号的线弹性理论书作为本书的补充．许多从弹性理论中得到的结果在本书中仅仅提一下就拿来应用．本书可作为本专题一学期课程的教材．对不满一学期的粘弹性力学课程，第一、三和六章分别作为线性等温理论、线性非等温理论和非线性理论的基础．第二、四和五章同第一、三章有关，但也可以看成是相互独立的．第七章同前面所有的内容都有关系．在弹性力学课程的最后阶段，可以把第一、二章或其中的一部分概括进去，作为粘弹性力学线性理论的一个简单介绍．

我要对伯克利加州大学 P. M. Naghdi 教授表示衷心的感谢，感谢他近若干年来的许多很有教益的学术讨论，特别是有关粘弹性理论的热力学方面．还感谢 Naghdi 教授把他关于热流变性简单材料的理论方面的一些研究成果，在未发表以前就友好地向我公开，第 3.6 节的部分内容就是在他的工作的基础上写出的．虽然本书的范围有意限制在均匀材料的情况，可是某些实例和推导受到我在 Shell 开发公司研究复合聚合物力学性态的启发，就此谨向该公司致谢．最后，还应感谢 Kristine Christensen 和 Clara Anderson 帮助准备手稿和 Joyce Shivel 的打字工作．

R. 克里斯坦森

目　　录

第一章　粘弹性应力应变本构关系

1.1 引　　言

线性粘弹性理论的全面发展和广泛应用，是较为近期发生的事情．事实上，这个领域里的活动主要是由于聚合物材料的大规模发展和利用．许多这类新型材料所显示的力学响应特征，其力学性质都超出了弹性和粘性理论的范畴．因此，显然需要有一种更为普遍的理论．

更具体地讲，弹性理论可以考虑那些有能力存储机械能而不耗散能量的材料．相反，处于非静水应力状态的 Newton 粘性流体，不言而喻有一种耗散能量的能力，但无法存储能量．但是，那些力学性质肯定超出以上两种理论的材料，使它们变形所作的功可以部分(不是全部)恢复．这些材料既能存储、又能耗散机械能量．

另一种表示这些材料特性的方法是通过在试件上突然施加表面均布载荷时获得其响应特征．这里用“突然施加”一词并不意味着加载速率大到足以激起试件内的动力响应．当突然施加一恒定载荷时，弹性材料立即引起的响应是保持恒定的变形状态．对突然施加的均匀剪切应力状态，Newton 粘性流体的响应是一种稳态的流动过程．但有一些材料，在突然施加并保持均匀应力状态时，先引起瞬时变形，继而随着时间的流逝，产生有限量的或是无限量的流动过程．这样反应的材料，可以说是既展现瞬时弹性效应又显示蠕变特征．这种性态显然不能单靠弹性或粘性理论来描述，而需要结合两者的各自特点．

考虑下述情形是有益的，它代表材料对表面力的一次突加改变而产生响应的一种推广．设想有一种上述瞬时弹性和蠕变特征的材料，受到两种不是同时突变却相互叠加到一起的均匀应力．在

施加第一次应力之后和第二次应力作用以前，材料按某种与初加应力的大小有关的时间依赖方式发生响应．现在来研究在突加第二次应力状态后的任一瞬间的情况．材料不但经历了表面力第二次改变的瞬时响应，还经历着由于第一次施加的应力水平而引起的、与持续时间有关的响应．弹性材料只在每一瞬间对所受总应力水平发生响应．所以，这类较为普遍的材料具有一种可以说成是记忆效应的特征．这就是说，材料的响应不仅取决于现时的应力状态，也决定于全部过去的应力状态，就一般意义来说，材料对过去所有的应力状态都有记忆．一种类似的情况是，如果把变形作为预定量来考虑，那么，现时的应力要取决于变形的整个已往历史．

基于这后一点看法，即材料可以有记忆的能力，下节将给出一种简单但基本的数学表述．在此以后，一种表示定理将用来建立在等温条件下的线性粘弹性应力应变本构关系．这样一来，采用“记忆”这个术语，就会变得较为精确；但是，值得在这里指出，还有一些其他关于材料变形具有记忆的材料力学性能的理论，那些理论和这里要研究的有着根本差别．例如，塑性力学的增量理论中同样有记忆效应，最终的变形状态不仅取决于最后的应力状态，还和到达该最后状态在应力空间所经历的路径有关．可是，这两种理论之间的根本区别在于，塑性理论与加载和卸载过程中所经历的时间长短无关，而粘弹性理论则有特定的时间或速率的依赖关系．

本章和随后各章的所有推导和应用都假定了均匀性条件．在许多情况下推广到某些类型的非均匀材料并不困难，可是在另一些情况中，这种推广即使可能也是困难的．因此，把有关均质粘弹性材料的方法和分析推广到非均质材料，就必须专门加以考虑．

最后应该指出，虽然粘弹性理论大都是近期发展起来的，但基本的线性和等温场的理论推导早就存在相当长的一段时间了．尽管有若干早期的贡献者，如 Maxwell, Kelvin 和 Voigt, Boltzmann[1.1] 显然在 1874 年首先提供了各向同性粘弹性三维理论的

论述，而 Volterra[1.2] 在 1909 年为各向异性固体得到了可类比的形式.

1.2 应力应变本构关系的积分形式，Stieltjes 卷积记法

现在考虑等温粘弹性应力应变本构关系的表述. 为建立一套完整理论所需的另一些相关的场方程将在下一章叙述. 首先，简要地说一下应力和应变的定义. 有关它们的更详细的资料可查看弹性力学教科书，例如 Sokolnikoff[1.3].

用通常的笛卡儿张量记号，拉丁指标限于 1，2，3 范围，而重复指标则暗示求和的约定. 设以笛卡儿直角坐标轴 X_i 表示固定的参考位形中物体内一点的坐标. 当物体为固体时，固定参考位形取定为未变形的位形. 令 x_i 表示同一点的变形后位形坐标. 连续体运动的全过程由下式来规定

$$x_i(\tau) = x_i(X_j,\ \tau),\quad -\infty < \tau \leqslant t$$

其中 τ 是时间变量，而 t 表示当前的时间.

位移向量的分量定义为

$$u_i(\tau) = x_i(\tau) - X_i$$

变形的测度由下式给出

$$\frac{\partial u_i(\tau)}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial X_j} - \delta_{ij}$$

其中 δ_{ij} 是 Kronecker 记号. 取 ε 的定义如下

$$\varepsilon = \sup_{\tau} |u_{i,j}(\tau)|$$

这里采用记号 $u_{i,j} = \partial u_i / \partial X_j$，$|\ |$表示大小，而 sup 表示最小的上界. 如果 $\varepsilon \ll 1$，我们就说变形在所有时间 τ 都是无限小的. 此外，如果 $\varepsilon \ll 1$，而且连续体的位移小于物体的所有特征尺寸时，我们就把要展开讨论的粘弹性理论称为无限小理论. 在这些条件下，无限小应变张量 ε_{ij} 就定义为

$$e_{ij}(\tau) = \frac{1}{2}\ [u_{i,j}(\tau) + u_{j,i}(\tau)]$$

在这里，不管是对 x_i 还是对 X_i 坐标微分都无关紧要，因为位移都是无限小的. 此后，在无限小理论中，这些导数都是相对于 x_i 坐标列出.

应力是按下列方式定义的. 设 δa 是某一表面内一个单元面积，这个表面既可表示物体边界上的，也可能只是物体内部的一个截面. 设 $\boldsymbol{n}$ 表示无穷小面素 δa 的单位法向向量. 应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$ 将通过作用在面素 δa 上的合力 $\boldsymbol{G}$ 来定义

$$\sigma_i = \lim_{\delta a \to 0} \frac{G_i}{\delta a}$$

该应力向量将规定在 δa 的正法向 $\boldsymbol{n}$ 的一侧. 对于面素 δa 的每个不同取向，都有一个不同的应力向量 $\boldsymbol{\sigma}$. 应力张量 σ_{ij} 就是通过应力向量分量与面素取向相关的变换来定义的，即

$$\sigma_i = \sigma_{ji} n_j$$

这一关系是应用一个微小四面体的线动量的平衡求得的. 利用微小体素的角动量的平衡关系，就得到应力张量的对称性 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$. 在目前的无限小理论中，面积 δa 可以取参考位形或变形后的位形为准，差异是十分微小的，因为这两种状态间的位移是无限小量级的. 这与第八和九章中所提出的一般理论不同，后者没有涉及到先前的微小性假设.

在目前的无限小理论中，要寻求的正是应力 σ_{ij} 和应变 e_{ij} 之间的本构关系. 假定这个关系是线性的，这同已引用的微小性假设是一致的. 把无限小理论说成是线性的，除已注明的线性关系之外，为构成一套完整理论所必需的补充的场方程也都是线性的. 第二章中要叙述这些补充关系.

假设应力张量的现时值取决于应变张量各分量的全部已往历史，则形式上可表示为

$$\sigma_{ij}(t) = \mathop{\phi_{ij}}_{s=0}^{\infty}(e_{kl}(t-s),\ e_{kl}(t)) \tag{1.1}$$

其中 $\overset{\infty}{\underset{s=0}{\phi_{ij}}}(\ )$是一个线性张量值的泛函，它把每一个应变历史 $\varepsilon_{ij}(t)$，$-\infty \leqslant t \leqslant \infty$，转换为对应的应力历史 $\sigma_{ij}(t)$. 这一泛函与应变的现时值 $\varepsilon_{kl}(t)$ 有一种参数依赖关系，后者和引言中提过的瞬时弹性效应相当. 一般地说，所有场变量不仅是时间的函数，而且还是位置x_i的函数；但由于这里只考虑局部效应，所以 σ_{ij} 和 ε_{ij} 对于 x_i 的依赖关系被隐蔽了.

如果假定应变历史 $\varepsilon_{ij}(t)$ 是连续的，并且假定泛函是线性的，就可以用 Riesz 表示定理[1.4]把泛函 (1.1) 写成一个 Stieltjes 积分，给出

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^\infty \varepsilon_{kl}(t-s)\,dG_{ijkl}(s) \tag{1.2}$$

这里的积分函数 $G_{ijkl}(t)$ 构成一种四阶张量，在 $-\infty < t < 0$ 内，$G_{ijkl}(t) = 0$；且每一分量在 $-\infty < t < \infty$ 的所有闭子区间内都是有界的变量. 实际上，(1.2) 中的积分是一种 Stieltjes 积分的卷积形式. 这种形式意味着本构关系 (1.2) 同时间尺度的任何平移无关. 这种性质叫做时间平移不变性，在这本书里，所有的结果都采用了这个条件. 应力和应变张量的对称性意味着有下列关系

$$G_{ijkl}(t) = G_{jikl}(t) = G_{ijlk}(t) \tag{1.3}$$

现在设 $t < 0$ 时 $\varepsilon_{ij}(t) = 0$，并假定在 $0 \leqslant t < \infty$ 区间 $G_{ijkl}(t)$ 及其一阶时间导数都是连续的，这样，(1.2) 就可写成下列形式

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(t) + \int_0^t \varepsilon_{kl}(t-s)\frac{dG_{ijkl}(s)}{ds}\,ds \tag{1.4}$$

由此看来，(1.4) 可以认为是从 (1.2) 通过对 Dirac δ 函数的积分求得的，后者包含在 $t = 0$ 时积分函数 $G_{ijkl}(t)$ 的微分内. 用另一种方法，(1.4) 可以通过 Stieltjes 和 Riemann 卷积之间的联系，从 (1.2) 求得. Gurtin 和 Sternberg[1.5] 认为后一推理思路更加严密，并在他们的推导中沿用了这一方法.

应力本构关系的另一形式可以从 (1.4) 得到，通过变量的更