经济数学系列教材之二

线性代数

郭立焕　汤琴芳　主编

科学技术文献出版社

经济数学系列教材之二

线性代数

主编 郭立焕 汤琴芳

编写：（按姓氏笔划为序）

于永象 王 泽 乔节增 吕瑞芝

周景慧 张惠敏 赵秉瑛 董铁铮

科学技术文献出版社

1988

内 容 简 介

本书内容包括了财经及经济管理各专业所必须的线性代数知识。全书共七章。前六章讲述线性代数的有关基本知识，作为线性代数的直接应用，同时也是应用广泛的计量经济模型，第七章介绍了投入产出数学模型。本书概念讲解透彻，论述简明扼要；文字叙述深入浅出，通俗易懂。每章均配有习题，书末附有答案。

本书可作为财经院校、经济管理院校各专业本科生试用教材，也可供自学和报考研究生者使用。

经济数学系列教材之二
线 性 代 数
郭立焕　汤琴芳　主编
科学技术文献出版社出版
中国科学技术情报研究所印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
787×1092毫米　16开本　13.75印张　336千字
1988年7月北京第一版第一次印刷
印数：1—17900册
社科新书目：增202—028
ISBN 7-5023-0565-3/O·4
定价：3.60元

前　言

随着现代经济及管理科学的发展，经济数学已成为经济、管理人才必备的基本知识。为进一步提高经济数学的教学水平，在全国经济院校经济数学学会的支持下，在认真总结近十年来经济数学教学经验的基础上，由北京联合大学经济管理学院、陕西财经学院、山西财经学院、北京商学院、江西财经学院、兰州商学院、黑龙江商学院、山西经济管理学院、武汉军事经济学院、安徽财贸学院、吉林财贸学院、内蒙古财经学院、郑州航空工业管理学院、北京对外经济贸易大学等十四所院校合编了这套经济数学系列教材。系列教材编委：李树仁、曹承宾、马春硕、刘宝琪，由李树仁、曹承宾具体负责。这套教材计划按高等数学、线性代数、概率论与数理统计、运筹学（Ⅰ）、运筹学（Ⅱ）、经济计量学、模糊数学及其在经济中的应用等七册出版。

我们在编写这套教材时，力求使其具有如下特点：既保持数学学科的系统性和完整性，又恰当地联系经济、管理问题，增选了经济应用例题，突出了经济、管理各专业的需要；重点放在基本概念和基本方法方面，论证严谨适度。节末配有练习，章末配有习题，以培养学生的逻辑思维能力和用数学方法分析与解决经济问题的能力。教材文字叙述深入浅出、通俗易懂。除必修的基本内容，对较深入的节、款用*号标明，供不同专业或不同教学时数的需要选用。教材包括了报考研究生所需要求。各册教材均附有习题提示和答案。

本教材——线性代数是系列教材之二。内容包括：行列式、矩阵、n维向量、线性方程组、矩阵特征值、二次型及投入产出数学模型等。

在编写过程中，我们参阅了兄弟院校的有关教材，得到了各院校的支持；成稿后，承蒙山西大学张宝林教授进行了详细审阅，并提出了许多宝贵意见，在此一并致谢。

由于成书时间仓促及编者水平所限，错误和缺点在所难免，欢迎广大读者和经济数学界同行不吝批评指正。

编　者

1987年9月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，在数学的各个分支以及其它学科中，都会经常用到它．在中学代数中，我们知道二元、三元线性方程组的解，可以利用行列式简单地表示出来．如二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时，该方程组有唯一解，其解可表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

对三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

也有类似的结论．即当

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

时其解是唯一的，且可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

在实际问题中，往往会遇到未知量不止二个、三个的线性方程组．因此，需要将二阶和三阶行列式推广到 n 阶行列式，然后利用这一工具来解含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组．

本章的主要内容是给出n阶行列式的定义，并且讨论其性质和计算方法．

§1.1 行列式的概念

我们知道，二、三阶行列式可以由对角线规则写出来，但是在定义n阶行列式时，却不能简单地按对角线规则来推广，而需要研究二、三阶行列式的结构规律．为此，下面我们先引进排列这个概念．

（一）排　　列

定义1.1 由n个数码1，2，…，n 组成的一个有序数组，称为一个n阶排列．

例如，2431是一个四阶排列；35241是一个五阶排列；$12\cdots n$是一个n阶排列．

我们知道，不同的n阶排列的总数有$n!$个，例如1，2，3这三个数码的全体不同的排列一共有$3!=6$个．它们是：

123，132，231，213，312，321．

注意，在上面三个数码的排列里，除了排列123的数码是按自然顺序排列的以外，在其余的排列中都有较大的数码排在较小的数码的前面．例如，在排列132里，3比2大，但3排在2的前面；在321里，2排在1的前面，3排在1和2的前面．对此，下面我们给出排列的逆序数的定义．

定义1.2 在一个n阶排列$s_1s_2\cdots s_n$中，如果有某个较大的数码s_j排在某个较小的数码s_i前面（$s_i<s_j$），则称数码s_j与s_i构成一个逆序．一个n阶排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记作$N(s_1s_2\cdots s_n)$．

给定一个n阶排列$s_1s_2\cdots s_n$后，可按下面的方法来计算它的逆序数．首先，计算出在s_n的前面，比s_n大的数的个数m_n，然后，计算出在s_{n-1}前面比s_{n-1}大的数的个数m_{n-1}，…，从后往前，依次计算下去，最后计算出在s_2的前面，比s_2大的数的个数m_2．那么，$m_n+m_{n-1}+\cdots+m_2$就是排列$s_1s_2\cdots s_n$的逆序数．即

$$N(s_1s_2\cdots s_n)=m_n+m_{n-1}+\cdots+m_2$$

例1 计算排列2431与35241的逆序数．

解 在排列2431中，按上述方法知，$m_4=3$，$m_3=1$，$m_2=0$．因此，

$$N(2431)=3+1+0=4.$$

在排列35241中，$m_5=4$，$m_4=1$，$m_3=2$，$m_2=0$．因此，

$$N(35241)=4+1+2+0=7.$$

例2 计算排列$12\cdots n$与$n(n-1)\cdots 321$的逆序数．

解 在$12\cdots n$中，$m_n=0$，$m_{n-1}=0$，…，$m_2=0$．故$N(12\cdots n)=0$．

在$n(n-1)\cdots 321$中，$m_n=n-1$，$m_{n-1}=n-2$，…，$m_3=2$，$m_2=1$．故

$$N(n\ (n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

定义1.3 逆序数为偶数的排列，称为偶排列；逆序数为奇数的排列，称为奇排列．

如例1中，2431是偶排列；35241是奇排列；例2中，排列$12\cdots n$是偶排列．

定义1.4 把一个排列的某两个数码i，j，互换位置，而其余数码不动，就得到另一个排

列，对排列施行的这样的一个变换，称为一个对换，并用符号 (i,j) 来表示。

例如，排列31542经过对换(5,2)，得31245；记作31542→31245. 这里值得注意的是，对换对于排列的奇偶性是有影响的，如上例中 $N(31542)=5$，即排列31542是奇排列，而经过对换(5,2)后，$N(31245)=2$，即排列31245是偶排列．由此可知，对排列施行一次对换，排列的奇偶性发生了变化．一般地，有下述定理成立．

定理1.1 排列经过一次对换，其奇偶性改变．

证 以 s 表示排列 $s_1s_2\cdots s_i\cdots s_j\cdots s_n$，把 s_i 与 s_j 对调位置，则得排列 s' 为 $s_1\cdots s_j\cdots s_i\cdots s_n$.

第一种情况：$j=i+1$. 即 s_i 与 s_j 处于相邻的位置．此时，若 $s_i<s_{i+1}$ 则 $N(s_1\cdots s_i,\ s_{i+1}\cdots s_n)=N(s_1\cdots s_{i+1},\ s_i\cdots s_n)-1$；而在 $s_i>s_{i+1}$ 时，$N(s_1\cdots s_i,\ s_{i+1}\cdots s_n)=N(s_1\cdots s_{i+1},\ s_i\cdots s_n)+1$，所以，$s$ 与 s' 的奇偶性相反．

第二种情况：$j=i+k$（或 $i=j-k$），首先，把 s 中的 s_j 与 s_{j-1} 对调，再把 s_j 与 s_{j-2} 对调，这样对调 k 次以后，便得到了排列 s'' 为 $s_1\cdots s_js_is_{i+1}\cdots s_{i+k-1}s_{j+1}\cdots s_n$；然后，把 s'' 中的 s_i 与 s_{i+1} 对调，再把 s_i 与 s_{i+2} 对调，这样，用相邻两数对调的办法，调 $k-1$ 次以后，就得到 s'. 因此，用相邻两数对调的办法，对调 $2k-1$ 次以后，就把 s 变成 s'，由于 $2k-1$ 是奇数，所以，若 s 为奇排列，则 s' 必为偶排列；若 s 为偶排列，则 s' 必为奇排列．

定理1.2 当 $n\geqslant 2$ 时，n 个数码 $1,2,\cdots,n$，的 $n!$ 个排列中，一半是奇排列，而另一半是偶排列．

证 假设总共有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$. 对于这 m 个奇排列施行同一个对换 (i,j)，那么由定理1.1，可得到 m 个偶排列，而且不同的奇排列经过同一个对换 (i,j) 后不能得到同一个偶排列．故奇排列的个数 m，不会大于偶排列的个数 k，即 $m\leqslant k$. 同理亦可证得 $k\leqslant m$，所以，$m=k=\frac{1}{2}n!$.

例如，三个数1,2,3的所有6个3阶排列中，有3个奇排列：132，213，321；有3个偶排列：123，231，312.

有了上述排列的预备知识，就可以对二阶和三阶行列式进行研究，得出它们的结构规律，从而利用这些规律来定义 n 阶行列式．

我们先看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

我们把诸 a_{ij} 叫做行列式的元素，其中第一个下标表示这个元素所在行的序数，第二个下标表示这个元素所在列的序数．行列式中的横排叫做行，纵排叫做列．

首先从三阶行列式的展开式可以看出，它是一些乘积的代数和，如果把每一个乘积叫做一个项，那么三阶行列式由 $3^2=9$ 个元素构成，共有 $3!=6$ 项．

其次，三阶行列式的每一项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积，而且所有位于不同行、不同列的三个元素的乘积都是三阶行列式的一项，各项的一般形式可写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

该项元素的第一个下标按自然顺序排列，而第二个下标是数码1，2，3的所有排列

123，231，312，132，213，321

中的某一个．

再次，由

$$N(123)=0,\ N(231)=2,\ N(312)=2$$

知前三个排列是偶排列，与它们对应的三项取正号．由

$$N(132)=1,\ N(213)=1,\ N(321)=3$$

知后三个排列是奇排列，与它们对应的三项取负号．

分析一下二阶行列式也会发现完全类似的规律．我们就根据这些规律，来定义n阶行列式．

（二）n 阶 行 列 式

定义1.5 由n^2个数$a_{ij}(i,\ j=1,2,\cdots,\ n)$排成$n$行$n$列，在其两边各画一条竖线，并规定

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.1}$$

该数学符号称为n阶行列式，其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对$1,2,\cdots,\ n$的所有排列求和。

n阶行列式的结构规律如下：

（1）n阶行列式是由n^2个元素构成的具有$n!$项的一个代数和；

（2）它的每一项都是取自该行列式不同行与不同列的n个元素的乘积，其一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中第一个下标构成的排列$12\cdots n$是按自然顺序排列的，第二个下标构成的排列$j_1j_2\cdots j_n$是数码1，2，…，n的一个n阶排列。

（3）每一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$，也就是说，当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，这一项的符号为正，当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，这一项的符号为负。

当$n=2,3$时，可分别得到二、三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2}(-1)^{N(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{N(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

由此可见，n阶行列式是二、三阶行列式的推广．

当$n=1$时，可得到一阶行列式$|a|$，它就是数a．不过，这里要注意，一阶行列式的记号与绝对值的记号虽然形式上一样，但它们的意义是完全不同的．

在n阶行列式中，元素a_{11}，a_{22}，…，a_{nn}所在的直线，称为主对角线．下面我们利用定

义来计算行列式.

例3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

的值.

解 按照定义，D是一个含有$5!=120$项的代数和，但在这个行列式中，除了$3\times2\times4\times7\times5$外，其余各项均为零。项$3\times2\times4\times7\times5$的行下标是按自然顺序排列的，而列的下标构成的排列为54321，它的逆序数为$N(54321)=10$，所以，$D=(-1)^{N(54321)}3\times2\times4\times7\times5=840$.

例4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 根据定义，D是一个$4!=24$项的代数和. 在这个行列式里，除了$acfh, adeh, bdeg, bcfg$这四项外，其余的项都至少含有一个因子0，因而，其余的项都等于0.

上面四项的行下标是按自然顺序排列，列下标排列依次是1234，1324，4321，4231，其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列，因此，

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg$$

例5 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \quad (a_{ii}\neq 0 \quad i=1,2,3,4)$$

（主对角线下（上）方的元素全为零的行列式，称为上（下）三角形行列式）.

解 根据定义，可知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3j_4}(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$$

其一般项是$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$，相应的符号是$(-1)^{N(j_1j_2j_3j_4)}$.

这个行列式有不少元素是零，从而有很多项都等于零，我们只要把可能不为零的项找出来，再相加就可以了.

先从零最多的第4行开始考虑，当$j_4=1$，2或3时，$a_{4j_4}=0$，从而，相应的项a_{1j_1}

a_{2j_2}，a_{3j_3} a_{4j_4}都等于零，于是，只有$j_4=4$，这样的项是a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{44}；又因为第3行中，除元素a_{33}，a_{34}外，其它两个元素都是零，按定义要求，每项的元素应取自不同行，不同列，因此，j_3不能取4，这样，j_3只能取3，即$j_3=3$，相应的乘积为a_{1j_1} a_{2j_2} a_{33} a_{44}；同理可知，j_2只能取2，j_1只能取1，所以，只有一项$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$不为零，其余各项都等于零，而这一项的每一元素，都在主对角线上，并且列下标的排列1234是偶排列．于是，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

同理可知，下三角形行列式，其值亦等于主对角线上各元素的乘积．其中$a_{ii}\neq 0$（$i=1$，2，…，n）．

特殊情况，当主对角线上方的元素和下方的元素都为零，且$a_{ii}\neq 0$（$i=1$，2，…，n）时，得到的行列式称为对角形行列式．对角形行列式的值亦等于它的主对角线各元素的乘积．即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

练 习 1.1

1．求下列排列的逆序数：

（1）631254；　　（2）196325478；

（3）$1357\cdots 2n-1\ 2\ 4\ 6\ 8\cdots 2n$；　　（4）$246\cdots 2n\ 135\cdots 2n-1$．

2．写出第一、二个位置是3，2的全部5阶排列．

3．在下面的排列中，确定逆序数；并指出n取哪些数时，这排列是偶排列，n取哪些数时，它是奇排列．

（1）$147\cdots 3n-2\ \ 2\ 5\ 8\cdots 3n-1\ \ 3\ 6\ 9\cdots 3n$；

（2）$15\cdots 4n-3\ \ 26\cdots 4n-2\ \ 37\cdots 4n-1\ \ 48\cdots 4n$；

（3）$2\ 5\ 8\cdots 3n-1\ \ 3\ 6\ 9\cdots 3n\ \ 1\ 4\ 7\cdots 3n-2$；

（4）$4n\ \ 4n-4\cdots 8\ 4\ \ 4n-1\ \ 4n-5\cdots 7\ 3\ \ 4n-2\ \ 4n-6\cdots 6\ 2\ \ 4n-3\ \ 4n-7\cdots 5\ 1$。

4．在数码1，2，…，n怎样的排列中，逆序数最大，它等于多少？

5．位于排列中第k个位置的数1，作成多少逆序？

6．在数码1，2，…，n的任一排列中，逆序数和正序数的和等于多少？

7．求i、j的值，使

（1）$134i78j92$为奇排列；　　（2）$38i41j27$为偶排列。

8．写出五阶行列式中，含有$a_{32}a_{15}$的所有项。

9．写出四阶行列式中，含有a_{41}且带负号的项。

§1.2 行列式的性质

在n较小时（如$n=2$，3），可以由定义去计算行列式的值，但在n较大时，按定义计算就很困难了。例如，$n=9$时，直接由定义计算9阶行列式的值，需要计算$9!=362880$项，其计算的工作量非常繁重。当n更大时，按定义计算行列式几乎是不可能的事。因此，我们有必要讨论行列式的基本性质。这些性质可以帮助我们更深入地了解行列式，以便简化行列式的计算。

定理1.3 从n阶行列式的第i_1，i_2，…，i_n行和第j_1，j_2，…，j_n列，取出元素作乘积

$$a_{i_1 j_1}a_{i_2 j_2}\cdots a_{i_n j_n} \qquad ①$$

这里$i_1 i_2\cdots i_n$和$j_1 j_2\cdots j_n$都是1，2，…，n这n个数码的一个n阶排列，那么，这一项在行列式中的符号是$(-1)^{s+t}$，其中，$s=N(i_1 i_2\cdots i_n)$，$t=N(j_1 j_2\cdots j_n)$。

证 如果交换乘积①中某两个因子的位置，那么，①的元素的第一个下标和第二个下标所成的排列，同时经过一次对换。假定经过这样一次对换后，所得的两个排列的逆序数分别为s'和t'，那么，由定理1.1知$s'-s$和$t'-t$都是奇数。因为两个奇数的和是一个偶数，所以，$(s'+t')-(s+t)=(s'-s)+(t'-t)$是一个偶数，因此，$s'+t'$与$s+t$同时是偶数，或同时是奇数，从而

$$(-1)^{s'+t'}=(-1)^{s+t}$$

另一方面，排列$i_1 i_2\cdots i_n$总可以经过若干次对换，变为$12\cdots n$，因此，经过若干次交换因子的次序，乘积①可以变为

$$a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n} \qquad ②$$

这里，$k_1 k_2\cdots k_n$也是一个n阶排列，根据行列式的定义，乘积（2）的符号是

$$(-1)^{N(k_1 k_2\cdots k_n)}$$

然而，$N(12\cdots n)=0$ 由上面的讨论可知

$$(-1)^{s+t}=(-1)^{N(1,2,\cdots n)+N(k_1 k_2\cdots k_n)}=(-1)^{N(k_1 k_2\cdots k_n)}$$

定义1.6 将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行依次换为列，并且不改变它们的前后次序，得到一个新的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

D'称为D的转置行列式。

例如，$D=\begin{vmatrix}2&3&5\\4&7&2\\1&8&9\end{vmatrix}$，其转置行列式$D'=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&7&8\\5&2&9\end{vmatrix}$

性质1 行列式D与它的转置行列式D'的值相等，即$D=D'$。

证 在D中任取一项$a=a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，它的元素位于$D$的不同行不同列，从而位于$D'$的不同列与不同行，因而$a$也是$D'$的一项。由定理1.3，这一项$a$在$D$中与在$D'$中的符号都是$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}$．反过来，$D'$的任一项也是$D$的一项，而且在两个行列式中有相同的符号。因此，$D$与$D'$是有相同符号的相同项的代数和，即$D=D'$。

性质1表明，在行列式中，行与列的地位是对称的，凡是对行成立的性质，对列也成立，因此，以后有关行列式的性质、定理只对行进行证明即可。

性质2 交换行列式的两行（列），行列式改变符号。

证 设给定行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

交换D的第i行与第j行，得

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

D与D_1的项数一样，都是$n!$项；

D的一般项可以写成

$$a_{1k_1}\cdots a_{ik_i}\cdots a_{jk_j}\cdots a_{nk_n}$$

因为这一项的元素，位于D的不同的行与不同的列，所以，它也是D_1的一项．反过来，D_1的每一项，也是D的一项，因此，D与D_1含有相同的项。

在D中一般项的符号是

$(-1)^{N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}=(-1)^{N(1\cdots i\cdots j\cdots n)+N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}$

这一项在D_1中，由于原行列式的第i行变成第j行，第j行变成第i行，而列的次序并没有改变，并注意到$N(1\cdots j\cdots i\cdots n)$是一奇数，所以，它在$D_1$中的符号是

$(-1)^{N(1\cdots j\cdots i\cdots n)+N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)}=(-1)^{N(k_1\cdots k_i\cdots k_j\cdots k_n)+1}$

因此，一般项在D和D_1中的符号相反．故D与D_1的符号相反，即$D_1=-D$。

推论 如果一个行列式，有两行（列）元素对应相同，那么，这个行列式等于零。

证 设行列式D的第i行与第j行（$i\neq j$）相同，由性质2，交换这两行后，行列式改变

符号，所以，新的行列式等于$-D$；但另一方面，交换相同的两行，行列式并没有改变，由此，得$D=-D$或$2D=0$，所以$D=0$。

性质 3 行列式某一行（列）所有元素的公因子可以提到行列式符号的外边。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

（k为常数）。

证 按行列式定义，

$$\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (k a_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$$

$$= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \text{右端}.$$

推论 1 以常数k乘行列式D，等于将k乘D的某一行（列）的所有元素。

推论 2 若行列式D有一行（列）的元素均为零，则$D=0$。

推论 3 若行列式D中，有两行（列）的对应元素成比例，则$D=0$。

性质 4 若行列式D中第i行（列）的所有元素都可以表成两个数的和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式D可以写成两个行列式的和，其中一个行列式的第i行元素是b_{i1}，b_{i2}，…，b_{in}，另一个行列式的第i行元素是c_{i1}，c_{i2}，…，c_{in}，而这两个行列式的其它各行都与D的一样。即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

证 $\text{左端} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n}$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$+ \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \text{右端}.$$

显然此性质可以推广到某一行（列）的每一个元素是m个数的和的情形（$m\geqslant 2$）.

性质 5 将行列式的某一行（列）的元素乘以同一数k后，加到某一行（列）的对应元素上，行列式的值不变。即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

证 由性质4和性质3的推论3得

$$\text{右端} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + 0 = \text{左端}.$$

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

解 *按行列式性质 2，第一行与第二行互换，则得*

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}$$

再据性质5，把第一行的各元素，分别乘以2，加到第二行上，乘以－3，加到第三行上，乘以－2，加到第四行上，则得

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&34&-26\\0&26&-33&-24\end{vmatrix}$$

把第二行上各元素乘以2，加到第三、四行上去，使第二列上的第三、四行上元素为零，得

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&17&10\end{vmatrix}$$

再把第三行各元素，乘以$-\frac{17}{16}$，加到第四行上去，得

$$D=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&16&8\\0&0&0&\frac{3}{2}\end{vmatrix}$$

因为D为三角形行列式，它等于主对角线上元素的乘积．即

$$D=1\times(-13)\times16\times\frac{3}{2}=-312$$

例2　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a_1&a&a_2&a_2\\a_2&a_2&a&a_3\\a_3&a_3&a_3&a\end{vmatrix}$$

解　依次用$-a_1$，$-a_2$，$-a_3$乘第一行后，分别加到第二、三、四各行上，根据性质5，得

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-a_1&a_2-a_1&a_2-a_1\\0&0&a-a_2&a_3-a_2\\0&0&0&a-a_3\end{vmatrix}$$