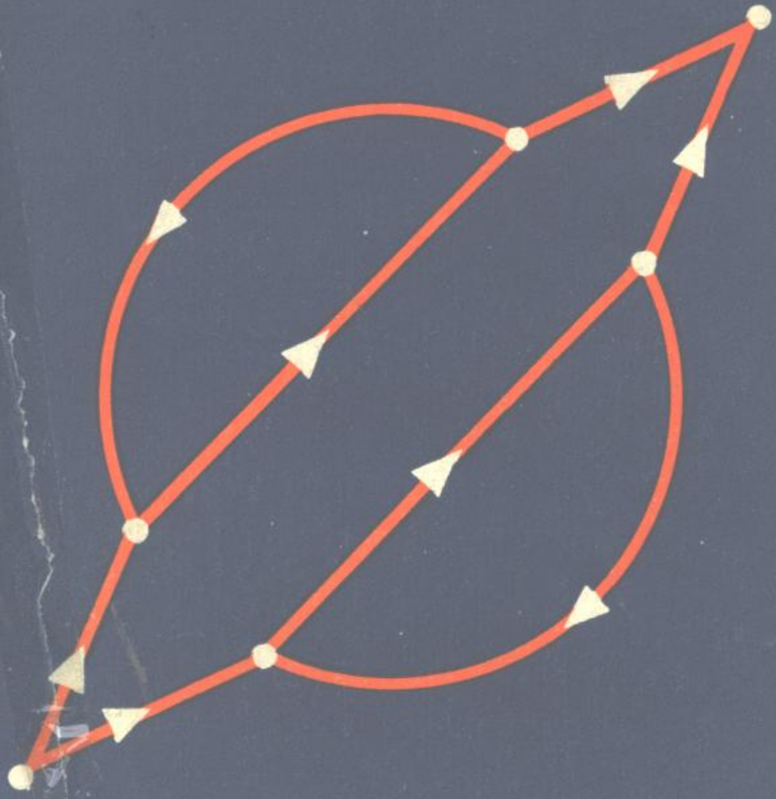


陈 屏 编著

电子工业出版社

状态变量法及其应用

ZHUANG TAI BIAN LIANG FA JI QI YING YONG

状态变量法及其应用

陈 屏 编著

電子工業出版社

内 容 提 要

本书从系统理论的角度对状态变量法作了全面的介绍。书中介绍了状态方程的各种编列方法和解法；状态变量的线性变换及状态方程的标准化方法；状态变量法和熟悉的传递函数法或（高阶）微分方程法之间的相互关系及相互转化，对离散状态方程、多变量状态方程、时变和非线性状态方程问题也作了详细讨论。最后还对状态变量法在通信理论、信息论、电网络计算机辅助设计、系统工程、控制论、管理科学、机械力学系统、运输系统以及生物生态系统中的应用作了精炼的介绍。本书取材较为新颖，内容丰富，适合于电子、系统工程、控制论、经济管理以及其它多种领域的科学工作者、工程技术人员及大专院校师生参考。

状态变量法及其应用

陈 屏 编著

责任编辑 梁祥丰

*

电子工业出版社出版

山东电子工业印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1983年7月第一版 开本：850×1168 1/32

1983年8月第一次印刷 印张：8 5/16

印数：1—10,000册 字数：215千字

统一书号：15290·1

本社书号：P11·001

定价：1.20元

序　言

提起状态变量法（或称状态空间法），人们往往首先和控制论联系起来。的确如此，在经典控制论中主要采用传递函数法、拉氏变换法和𝒵变换法，它们都是频域方法；而状态变量法是一种时域方法，它的出现和应用，使控制论发展到一个新的阶段，形成现代控制论。因此有人说：没有状态变量法，就没有现代控制论。

状态变量法在控制论和控制工程领域已广为应用。那么，在其它领域又如何呢？它到底算哪个领域的鲜花，又能在哪些领域结果呢？其实，状态变量法是系统（理）论的一朵新花，只不过是在现代控制论中首先结出了硕果。

近二十年来，随着控制工程、电子工程以及其它系统工程的迅速发展和数字电子计算机的广泛应用，作为机电和电子工程基础的系统理论，在研究对象和研究方法上都发生了深刻的变化。首先，现代工程中所采用的系统日趋复杂，它们往往不是简单的单输入单输出系统，而是多输入多输出系统。其次，在系统特性方面，以前研究的大多是线性系统，近年来对非线性系统的研究不断深入，並日趋重要。还有在信号特点方面，过去研究的主要是连续信号，由于数字计算机，数字通信和控制系统的普遍应用，对离散信号在系统中的响应分析变得越来越重要了。此外，在研究方法上，以前主要使用解析法，而这种方法对于非线性系统和非连续信号，常常是极为困难和无能为力的；随着研究对象的变化，数值计算法的应用日益广泛。

状态变量法正是在这种科学和技术发展需要的背景下产生和发展起来的。自从本世纪二十年代以来，研究连续信号作用于线

性系统问题，最有力的工具是拉普拉斯变换法。它的特点是将系统的特性用传递函数表示，然后就可以根据输入函数求输出响应。这种方法有人称为输入－输出法，又称端部法。因为它只研究系统（网络）的端部特性，而不考虑系统内部的结构、参数、电压和电流等。与输入－输出法相比，状态变量法是一种内部法。因为它首先分析能够代表系统内部特性的物理量，称为状态变量，然后就可根据系统的状态变量和输入量，求得所需的输出量。

显然，与微分方程法和传递函数一样，状态变量法也是一种系统分析（描述）法。那么，这种新的系统理论方法具有哪些优点呢？主要有：一是应用范围广。状态变量法不仅适用于线性系统，也适用于非线性系统；不仅适用于恒参系统，也适用于时变系统。许多过去无法解决的非线性和时变系统问题，借助状态变量法可以较容易地解决。状态变量法还适用于多输入多输出系统。对于输入－输出法来说，这是很困难的。状态变量法用于采样数据系统等离散系统以及随机输入系统，则更为优越。二是易于用数字计算机进行数值分析。就方法本身的数学表达式来说，状态变量法可以利用线性代数这个有力工具，把冗繁的数学式表达得非常简明，並且把状态方程归纳成一个统一的标准形式，这样就特别便于用计算机来解算。就数字运算本身而言，用状态变量法常常是就一简单算式作多次重复的运算，这正是计算机所擅长的。状态变量法可提供有关系统更多的信息，使人们能够了解系统内部的情况，便于分析和控制。而且对系统某些特性如可控度和可测度等）的分析，可以在不求出变量解的情况下进行，这是很方便的。在状态变量法中，状态变量的选择不是唯一的，使这种方法具有很大的灵活性。

诚然，状态变量法也有局限的一面。实际上还存在许多无法按照状态变量法列出所需的方程，或者虽然列出方程却无法求解（解析解或数值解）的问题。另外，在有些场合，特别是一些简单系统的场合，状态变量法也不一定比频域法来得方便。然而，状态

变量法作为系统理论的一个重大进展，能够解决以前无法解决或很难解决的许多问题，这一点是确定无疑的。

在国际上，状态变量法的应用早已超出控制论的范畴。这一方法用于通信理论和统计滤波方面，使这一较古老的领域又呈现出新的生机。状态变量法还广泛用于电路理论、网络分析、系统模拟、计算机辅助设计以及系统工程等方面。简单地说，一切可用微分方程和差分方程描述的领域，原则上都可应用状态变量法。就连一些机械和力学系统也可大量应用状态变量法。

全书共分六章。从系统理论的角度对状态变量法作了比较系统的介绍。本书从系统状态概念的引入谈起，介绍了多种编列状态方程的方法，状态变量的线性变换，状态方程的对角化和标准化以及状态方程的各种解法。并对状态变量法与人们熟悉的传递函数法或（高阶）微分方程法之间的相互关系及相互转化问题作了详细的讨论，还讨论了离散状态方程、多变量状态方程、时变状态方程和非线性状态方程问题。最后一章重点介绍状态变量法在控制论领域之外，诸如通信理论和信息论，电路和电网络分析，系统工程，管理科学，机械力学系统，运输系统，以至生物生态系统中的应用。

电子工业部雷达工业管理局冯世璋总工程师对本书的编写给予热情的指导并审阅了书稿；吴新瞻同志也仔细审阅了全部书稿，并提出许多宝贵的修改意见；在本书选题和编写中承蒙章治本和马兴图同志的大力帮助，在此一并致谢。

由于水平和时间所限，谬误之处在所难免，恳请批评指正。

编　者

一九八三年四月

目　　录

第一章　状态变量法概述

1.1　状态和状态变量

1.1.1　从力学系统谈起

为了建立系统状态和状态变量的概念，让我们首先看一个简单的力学系统的例子。一个质量为M的物体受力f作用的情况，如1.1所示。

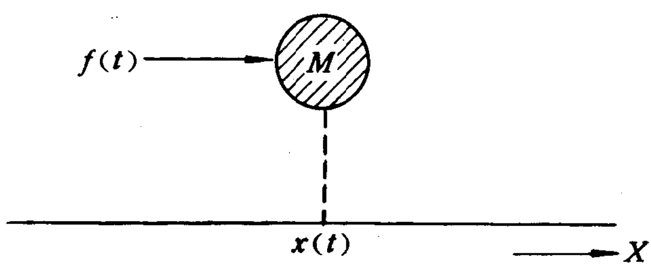


图1.1　简单力学系统

根据牛顿定律，可知质量M、力f和速度v的关系为

$$f = M\frac{dv}{dt}$$

或

$$v(t) = \frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \qquad (1.1)$$

式（1.1）表示在t瞬间物体的速度是力f在整个过去的时间内作用于M的结果。积分下限取负无穷大是一般表达法，而实际情况是力f开始作用于M的时间可在（$-\infty$，t）区间的任意时刻。

式（1.1）还可写成

$$v(t)=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t_0}f(\tau)d\tau+\frac{1}{M}\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau \qquad (1.2)$$

$$=v(t_0)+\frac{1}{M}\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau \qquad (1.3)$$

可见速度$v(t)$的积分可分成两项：一项为初始速度$v(t_0)$，也就是初始条件；另一项就是激励函数$f(t)$在（t_0，t）区间的积分。其中，初始时刻t_0可有无穷多个取值，但通常令$t_0=0$。由上式可以看出，物体M对作用力的响应（速度）可以完全由初速 $v(t_0)$ 和在（t_0，t）区间的输入$f(t)$决定，从而可写成

$$v(t)=\psi\left[v(t_0),\ f(t)\right],\ t\geqslant t_0 \qquad (1.4)$$

上面是只有一个初始条件的情况，再看看多个初始条件的情况。让我们来确定物体M受力f作用时在某时刻t的位置S。因为f为水平作用力，故水平位移和速度的关系为

$$\frac{ds}{dt}=v$$

于是有 $$s(t)=\int_{-\infty}^{t}v(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{t_0}v(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}v(\xi)d\xi$$

$$=s(t_0)+\int_{t_0}^{t}v(\xi)d\xi \qquad (1.5)$$

把式（1.3）代入式（1.5）得

$$s(t)=s(t_0)+\int_{t_0}^{t}\left[v(t_0)+\frac{1}{M}\int_{t_0}^{\xi}f(\tau)d\tau\right]d\xi$$

$$=s(t_0)+v(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{M}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\xi}f(\tau)d\tau d\xi \tag{1.6}$$

显然，当（t_0，t）区间的$f(t)$已知时，求物体M的位置需要两个初始条件$s(t_0)$和$v(t_0)$。因此，这几个量间的函数关系可抽象成

$$s(t)=\psi\ [s(t_0),v(t_0),f(t)],t\geqslant t_0 \tag{1.7}$$

从式（1.4）和式（1.7），能得到什么启示，甚至引出什么新概念呢？首先可以建立系统状态的概念。我们把$t=t_0$时刻的初始条件称为该系统在$t=t_0$时的状态，如式（1.7）中的$s(t_0)$、$v(t_0)$就是图1.1所示的力学系统在t_0时刻的状态。推而广之，如果一个系统具有n个初始条件$x_1(t_0)$，$x_2(t_0)$，$\cdots$，$x_n(t_0)$，则它们就构成系统在t_0时刻的状态（叫初态）。可以清楚地看出，系统在t_0时刻的状态包含了和系统过去整个历史有关的全部信息。知道了系统t_0时刻的状态，以及$t\geqslant t_0$的系统输入，就可求得系统在任何时刻t的输出。

那么，什么是状态变量呢？粗浅地说，如果系统的状态可以用一组变量$x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_n(t)$来表示，则这样一组变量就称为状态变量。系统的初态就是系统的状态变量在t_0时刻的值。

为了用状态或状态变量表示一个系统，我们设系统响应$y(t)$与系统t_0时刻的状态以及系统输入$u(t)$的关系为

$$y(t)=\psi\ [x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0),u(t)]\qquad t\geqslant t_0 \tag{1.8}$$

为简便计，把t_0时刻系统的一组初态记为$\{x(t_0)\}$，就有

$$y(t)=\psi\ [\{x(t_0)\},u(t)],t\geqslant t_0 \tag{1.9}$$

再作进一步观察，$t\geqslant t_0$的任意时刻的系统响应$y(t)$可以完全由系统的初态$\{x(t_0)\}$和在（t_0，t）区间的系统输入$u(t)$决定。因此，$t=t_0$时刻的$y(t_0)$应由初态$\{x(t_0)\}$和(t_0,t_0)区

间的输入 $u(t)$ 决定， 而后者就是 $u(t_0)$ 。由此可以进一步说，任意时刻 t ，系统的输出均由在时刻 t 的系统的状态和系统的输入所决定。也就是说，在某个时刻 t ，系统的状态包含了那个时刻有关这个系统的全部信息。从而式（1.9）可改写成

$$y(t)=\psi[\{x(t)\},u(t)] \tag{1.10}$$

由此，可以画出用状态变量表示的系统框图，如图 1.2 所示。为便于比较，图 1.3 和图 1.4 还画出了相应的用传递函数或脉冲响应函数表示的系统框图。十分明显，系统的状态变量是系统的极其重要的特征参量。象传递函数和脉冲响应函数一样，状态变量法作为描述和分析系统的一种新方法，是非常有用的。说到此，也许有人要问，图 1.2 中的函数关系 ψ 到底是什么形式呢？这个问题将在后面给以介绍。

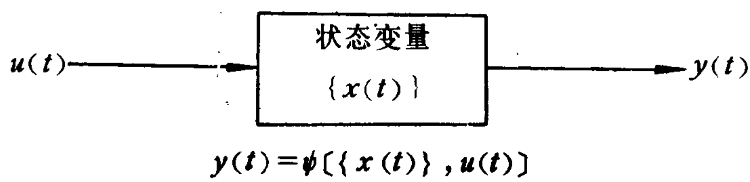


图1.2　系统状态变量表示法

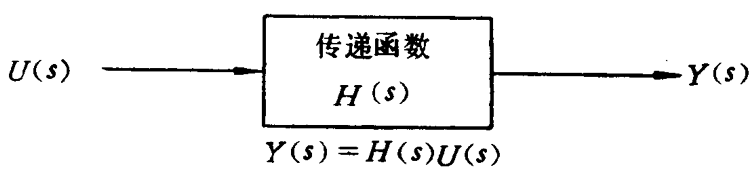
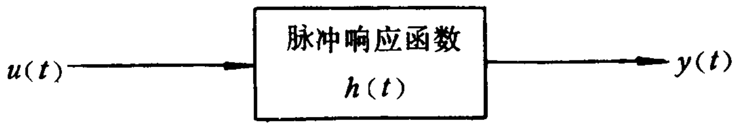


图1.3　系统传递函数表示法



$$y(t)=\int_0^t h(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

图1.4　系统脉冲响应函数表示法

1.1.2 电网络系统的状态变量

为了加深对系统状态和状态变量这一概念的理解，我们再从电网络系统的角度作进一步的讨论。众所周知，网络中的无源元件按照其能否储存能量可以分为两大类：储能元件，如电容和电感；非储能元件，如电阻和电导。非储能元件的特点是，在任何时刻的输出（电压或电流）都是由该时刻的输入（电流或电压）所决定。例如，线性电阻或电导的电压和电流之间的关系服从欧姆定律，即

$$e(t)=Ri(t),\quad i(t)=Ge(t)$$

对于非储能元件，若以 $u(t)$ 代表输入，$y(t)$ 代表输出，则两者的函数关系可表示为如下的一般形式

$$y(t)=h(u(t)) \tag{1.11}$$

由若干个非储能元件构成的网络特性也可以用式（1.11）表示。

储能元件与非储能元件不同，它在某一时刻的输出不仅决定于该时刻的输入，而且还和输入的全部历史情况有关。例如，电容器的电荷（输出）与电流（输入）的关系是

$$q_c(t)=\int_{t_0}^t i_c(\tau)d\tau \qquad t\geqslant t_0\geqslant-\infty \tag{1.12}$$

t_0 是输入开始作用的时间。在此以前，电容器内应无电荷储存，即当 $t\leqslant t_0$ 时，$q_C=0$。故储能元件的输入和输出之间的函数关系

可表示为

$$y(t)=H(u(t_0,t)) \tag{1.13}$$

上式说明，为了确定某一时刻 t 的输出值，需要知道在区间 (t_0,t) 的全部输入值 $u(t_0,t)$ 。因此，储能元件又可称为记忆元件，非储能元件又可称为无记忆元件。

显然，要用式（1.13）表达有记忆元件的网络特性是困难的，因为 t_0 可以有无限多个值，而且往往不能确切知道网络受到输入作用的起始时刻。为克服这一困难，可以将网络划分为有记忆和无记忆两部分，並使得有记忆部分的输出在任何时刻的值都能够完全确定网络在该时刻以后的输入－输出特性。具有上述特性的有记忆部分的输出量可作为网络的状态变量，如此构成的模型称为网络的状态模型（图1.5）。

图 1.5 所示框图是网络状态模型的一般形式。其中 u 是输入量，y 是输出量，x 是状态变量，而 m 称为状态修正量。无记忆部分各量之间的函数关系是

$$m=h(u,x) \tag{1.14}$$

$$y=g(u,x) \tag{1.15}$$

有记忆部分的函数关系是

$$x(t)=H(m(t_0,t)) \tag{1.16}$$

而且它必须满足下式

$$x(t_0)=x_0$$

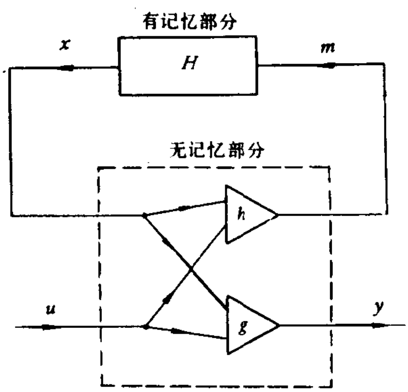


图1.5 状态模型框图

x_0 称为网络的初始状态，简称初态。

上列诸式中：

h 表示状态修正量，m 是输入 u 和状态变量 x 的函数；

g 表示输出 y 是输入 u 和状态变量 x 的函数；

H 与 h 和 g 不同，它表示状态变量 $x(t)$ 是初始状态 x_0 和状态修正量 $m(t_0,t)$ 的泛函，$(t>t_0)$ 。

由于H具有以上性质，就可以根据在$t=t_0$的初态和在区间(t_0,t)内的输入$u(t_0,t)$来决定在$t\geqslant t_0$时的输出$y(t)$。

网络中的变量，包括输入量、输出量、状态变量和状态修正量，都可以不止一个。在一般情况下，每一状态变量与一记忆元件有关，状态修正量的数目和状态变量的数目相等。图1.6表示一个具有m个输入、k个输出、n个状态变量和n个状态修正量的多变量网络的状态模型。在建立状态模型时，应使状态变量的数目为最小。因此，网络的状态变量就是这样一组数目为最小的量的集合：只要知道在某一时刻t_0的状态量$x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)$，和在$t\geqslant t_0$区间网络的输入量$u_1(t),u_2(t),\cdots,u_m(t)$,就可以完全确定在$t\geqslant t_0$区间网络的状态变量$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$,和其它所要求的输出量$y_1(t),y_2(t),\cdots,y_k(t)$。换句话说，状态变量概括了为预测网络未来的特性而必须知道的有关网络过去状态的信息。

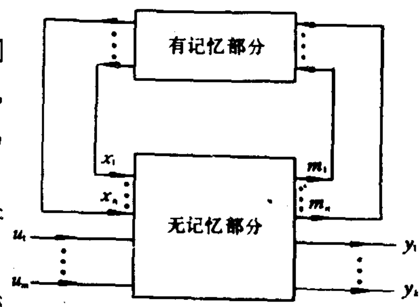


图1.6　多变量网络的状态模型

纯无记忆网络，也就是无储能元件的网络不能用状态变量描述。对于有记忆网络通常选电容电压或电荷、电感电流或磁通链作为状态变量。一般说来，状态变量的数目就等于网络中电感和电容数目之和。但这样说并不完全确切（见2.1.1节）。

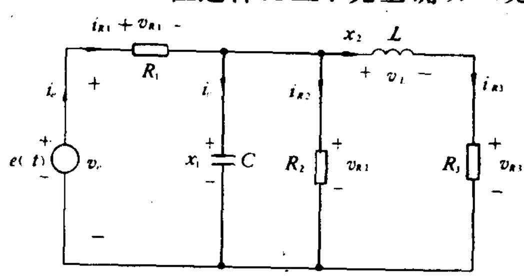


图1.7 电网络