纯粹数学与应用数学专著 第18号

微分几何

丘成桐 孙理察 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第18号

微　分　几　何

丘成桐　孙理察 著

科　学　出　版　社

1 9 8 8

内 容 简 介

本书是著名数学家丘成桐、孙理察关于现代微分几何系统专著的第一部．它以拓扑和代数几何为基础而以分析为主要工具，论述了几何中的线性和非线性问题．本书的主要内容是：比较定理及其应用、流形上的调和函数、流形的谱及其估计、热核方程、保角平坦流形与 Yamabe 问题等．

本书可供数学系高年级学生、研究生、几何和分析方面的教师及数学工作者阅读参考．

纯粹数学与应用数学专著　第 18 号

微　分　几　何

丘成桐　孙理察　著

责任编辑　杜小杨　张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1988 年 7 月第一版　开本：850×1168 1/32

1988 年 7 月第一次印刷　印张：13

印数：精 1— 950　插页：精 2

平 1—3,900　字数：339,000

ISBN 7-03-000476-0/O·130

定价：布面精装 5.50 元

平　装 4.00 元

科技新书目：168-平 076　精 077

《纯粹数学与应用数学专著》丛书

主　编　吴文俊

副主编　（以姓氏笔划为序）

王　元　丘成桐　杨　乐　肖荫堂

谷超豪　胡国定　程民德

序　言

我们知道，在数学的各个分支中，几何学自古以来一直被数学家们所重视。其原因在于：几何学研究的是自然现象的某种表现形式，而自然现象具有很真实的感觉，所以它们一直是数学家灵感的重要泉源。因此，几何学和数学的其他分支有着极为密切的关系；当然也由于自然科学的发展而得到推动。本世纪三十年代 Einstein 提出的广义相对论，近二十年来 Yang-Mills 提出的规范场论，等等，就是几何学和物理结合的最好例子。

几何学的主要部分是微分几何学。近代微分几何学研究流形上的解析结构和这种结构所蕴含的几何现象。这些可以说是由 Gauss 和 Riemann 等人所奠基的。自从 Riemann 提出 Riemann 几何以后，局部几何学就有了飞速的发展，产生了张量分析。同时，Klein 发表了著名的埃尔兰根纲领，由群论角度研究空间变换群的不变量，从而引进了各种不同的几何学。另外，复变函数的单值化理论促进了 Riemann 曲面的研究。这种种理论以及经典的曲面理论，构成了二十世纪微分几何发展的基础。

在二十世纪，微分几何的发展极其迅速，大致可分为四个不同方面。

第一方面，Cartan 和 Weyl 作了 Lie 群和 Riemann 对称空间的分类，Cartan 将联络的概念推广，将 Klein 的理论和 Riemann 几何融合，又引进了外微分，发展了 Cartan-Kähler 理论，因此，使局部微分几何大大地推进了一步；

第二方面，由于拓扑学和代数几何的蓬勃发展，de Rham, Hodge, Kodaira, Hopf, Lefschetz, Whitney, Weil, 陈省身（S. S. Chern）等人将它们和微分几何建立起密切的关系，从而发展了整体微分几何；

第三方面，由于古典几何学的影响，凸曲面几何学、综合几何学、积分几何学在 Alexandroff, Cohn-Vossen, Pogorelov, Busemann, Rauch, Santalo 等人的领导下，有了很大的进展；

第四方面，由于微分方程理论的逐渐成熟，几何学家开始应用分析方法来解决几何问题，反过来，微分几何理论又提供了大量有意义的微分方程，而研究这些方程，往往要提出新的观点和方法，所以分析学家也密切注意着几何学的发展，在这方面的领导人有 Hadamard, Morse Lewy, Morrey, Bochner, Nash, Moser, Nirenberg, Efimov. 他们的工作，奠定了近二十年来非线性偏微分方程在几何中的应用的基础.

本书将介绍上述的主要工作，读者可以发现，微分几何是一个整体的学问，上述四个方面实际上是很自然地融合在一起的，因此，第一册的目的在于研究 Riemann 流形上整体微分方程理论，并且导出曲率与拓扑之间的关系. 在第一册中，我们只讨论一个方程的情形. 在陆续出版的第二册和第三册中，我们会涉及方程组的问题，例如，我们将要涉及 Hodge 理论、极小子流形、调和映射、规范场、Kähler 流形、Monge-Amperé 方程，其中将讨论几何与拓扑、代数几何、广义相对论和高能物理之间的关系.

第一册包含六章内容，前四章讨论 Laplace 算子，它是微分几何中最重要的算子. 这是由于很多重要的非线性算子在线性化后，往往是某个 Riemann 度量的 Laplace 算子. 在具体讨论中，我们往往要用线性算子去逼近非线性算子，所以我们希望给出尽量不依赖于 Riemann 度量的各种估计，我们考虑的空间，可能是有界函数空间，也可能是平方可积函数空间. 我们知道，在经典调和分析中，主要是考虑 R^n 及其中的有界域上的调和函数，它们的推广应该是完备 Riemann 流形，其中有非负 Ricci 张量的流形对应于 Euclid 空间、有负曲率的流形对应于有界域. 原则上来说，经典调和分析中的主要定理在流形上都应该有相应的推广. 本书前二章，就是讨论其中比较重要的推广. 值得注意的是，我们往往要提出新的方法来进行这种推广. 同时，我们发现，很多几何问题

又都可以用这种分析方法来解决. 当 Laplace 算子作用在平方可积函数空间时,最重要的是研究此算子的谱分析. 当流形为紧时,谱是离散的,所以在第三章中,我们研究特征函数及谱的性质;在第四章中,我们研究热核,目的也在于研究谱的性质,也希望研究波动核的性质,其原因自然是由于它提供了谱和测地线之间的关系. 当流形非紧时,我们对谱的性质知道得仍然很少,特别是关于连续谱的情形. 这些希望以后能够涉及.

第五、六章主要考虑由于保角形变所导出的非线性偏微分方程. 这方面,从 Poincaré 起,就不断有工作,我们首先讨论了 Yamabe 问题. 当然,只限于紧流形的情形. 在非紧流形的情形,Yamabe 问题还没有完全解决,希望以后也能涉及. 在第六章考虑保角平坦 Riemann 流形的性质. 在那里,读者可以发现,在纯量曲率恒正的情形,对这种流形可以有一个比较清楚的了解;但是在负纯量曲率的情形,则仍然是一个困难的问题.

由于整体微分几何方面没有一本比较适合的教科书,特别是以拓扑、代数几何为基础,以分析为主要工具的系统教材,我们这本书可以说是这方面的一个尝试.

本书是作者的一系列演讲,其中前部分是 1983 年在 Princeton 讲的四章,由钟家庆整理讲稿,后部分是 1984 年及 1985 年在 San Diego 讲的两章,第五章由许以超和丁伟岳整理讲稿,第六章的主要结果是作者们在此期间获得的,此章由张恭庆整理讲稿. 整理讲稿的各位数学家都是学有专长,往往在整理期间加上他们极宝贵的意见,使本书生色不少. 另外,作者的学生田刚、曹怀东、李俊等人进行了修改,在此一并表示感谢. 由于水平有限,书中错误及不妥之处自属难免,还望读者多多提出宝贵意见.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
孙理察 (Richard Schoen)
1986 年 2 月 1 日于加州大学圣地亚哥分校

目　录

第一章　比较定理与梯度估计

§1. 比较定理

比较定理是流形上的分析的基本工具之一，其本质是通过对 Jacobi 场与流形曲率的联系，以及流形曲率的性质进行分析而获得关于流形的更一般的性质。另一方面，从 Jacobi 方程看，它又是微分方程在几何中的应用。例如，比较定理之一——Bonnet 定理，就是应用 Sturm-Liouville 理论的结果。在几何中，有各种形式的比较定理，例如 Rauch 定理等(见 Cheeger, Ebin 的书)，但是由于本书旨在研究流形曲率与调和函数的关系，在此我们只给出本书常用的比较定理——Hesse 形式的比较定理，以及相应的推论。

设 M 是 n 维完备的 Riemann 流形；其 Riemann 度量记为

$$ds^2=\sum g_{ij}dx^i dx^j,\quad x^i(i=1,2,\cdots,n)$$

是局部坐标，熟知 (M, ds^2) 上有一常用微分算子——Laplace-Bertrami 算子，其定义为

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}\ g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

其中，$g=\det(g_{ij})$，$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$.

M 上有一个自然的函数，即关于一固定点的距离函数。任取固定点 $O\in M$，定义

$$\rho(x)=\mathrm{dist}(o,x),\ \forall x\in M.$$

显然，$\rho(x)$ 不仅是连续的，而且满足 Lipschitz 条件。由测度论可知，$\rho(x)$ 几乎处处可微.

对固定点 $O\in M$，考虑指数映射 $\exp_O\colon T_OM\to M$，其存在性是熟知的 Hopf-Rinow 定理以及 M 的完备性的直接推论. $\forall X\in T_OM$. 设 $\gamma(t)=\exp_O(tX)$，则 $\gamma\colon R\to M$ 是从 O 出发的

沿方向X的光滑测地线，当$|t|$很小时，γ是连结$\gamma(t)$与O的唯一极小测地线，且$d\exp_O|_{tX}:T_{tX}(T_OM)\to T_{\exp_O(tX)}M$是微分同胚。随着$|t|$值的增大，有两种情形可能发生：(i) $\gamma(t)$不再是连结O与$\gamma(t)$的极小测地线，(ii) $d\exp_O|_{tX}$不再是微分同胚，这时我们称$\gamma(t)$是相对于O的共轭点（conjugate point）。

令

$$t_0=\sup\{t|\gamma\ \text{是连结}\ \gamma(t)\ \text{和}\ O\ \text{的唯一极小测地线}\},$$

则$t_0\in\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$. 如果$t_0<+\infty$，我们称$\gamma(t_0)$为相对于$O$的沿$\gamma$的割点（cut point）。所有相对于$O$的割点构成割迹（cut locus）。从定义易知，如果x属于点O的割迹，则或者(i) x是沿γ的相对于O的第一个共轭点，或者(ii)至少存在两条长度相同的极小测地线连结O和x。我们记此割迹为cut(O)。

显然，对于任一$X\in T_OX$，$\|X\|=1$，在测地线$\exp_O(tX)$ $(t\geqslant 0)$上至多有一割点，因此cut(O)是S^{n-1}中一闭子集在指数映射$\exp_O$下的象，所以其n维测度为0。

进一步，记$\mu(X)=\operatorname{dist}(O,\gamma(t_0))$为沿$\gamma$至割点的距离，其中$X\in S^{n-1}\subset T_OM$.

定义.

$$E=\{tX|0\leqslant t<\mu(X),\ X\in S^{n-1}\subset T_OM\},$$

则$\exp_O:E\to\exp_O(E)$是微分同胚，因而诱导M的一个正规标架，显然，这是M以O为原点的可能的最大正规标架，且

$$M=\exp_O(E)\cup\operatorname{cut}(O).$$

从定义可看出，$\exp_O(E)$是以O为中心的星形区域（star domain），而前面定义的相对于O的距离函数$\rho(x)$，在$\exp_O(E)$中是光滑的。作为星形区域$\exp_O(E)$的边界，cut(O)中有些点可能为不同方向的割点的重合点(即可能$X_1\neq X_2$，但

$$\exp_O(\mu(X_1)X_1)=\exp_O(\mu(X_2)X_2).$$

在$\rho(x)$的可微点上，因为测地线以弧长为参数，故有

$$|\nabla\rho|=1,$$

即 $\sum g^{ij}\rho_i\rho_j=1$，其中 ρ_i 为 ρ 沿 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 方向的协变微分。（关于指数映射的上述性质见 Cheeger, Ebin 的书。）

熟知，在 M 中任意一点 p 处的 Ricci 曲率是一个双线性型

$$\mathrm{Ric}:\ T_pM\times T_pM\to\mathbf{R}.$$

在 p 点的切空间 T_pM 中取单位正交标架 $\{e_i\}$，$\langle e_i, e_j\rangle=\delta_{ij}$，如果 $e=\sum a^ie_i$，则

$$\mathrm{Ric}(e,e)=\sum R_{ij}a^ia^j,\quad R_{ij}=\mathrm{Ric}(e_i,e_j).$$

如果取 $e=e_n$，则

$$\mathrm{Ric}(e,e)=\sum_{i=1}^{n-1}K(e_i,e),$$

其中 $K(e_i,e)$ 是由 e，e_i 所张成的二维平面所对应的截面曲率。

设 $f\in C^2(M)$。f 的 Hesse 形式记作 $H(f)$，定义如下：设 X，Y 是过点 $x\in M$ 的两切向量。将 X，Y 扩充成在 x 的邻域内可微的向量场 $\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}$，定义

$$H(f)(X,Y)=(\widetilde{X}\widetilde{Y}f)(x)-(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}f)(x). \tag{1.1.1}$$

此处 ∇ 表示M的 Riemann 联络。容易验证，$H(f)(X,Y)$ 不依赖于扩充向量场 $\widetilde{X}$，$\widetilde{Y}$ 的选择。

固定 $p\in M$，对任何 p 的割迹之内的点 x，记连结 p 和 x 的极小测地线为 σ，使 $\sigma(0)=p$，$\sigma(r)=x$。任取 $X\in T_xM$，$\langle X, \partial/\partial r\rangle(x)=0$，因为 x 不是 p 的共轭点，我们可以将 X 扩充成沿 σ 的一个 Jacobi 场 $\widetilde{X}$，满足 $\widetilde{X}(\sigma(0))=0$，$\widetilde{X}(\sigma(r))=X$，$\left[\widetilde{X},\dfrac{\partial}{\partial t}\right]=0$ $(0\leqslant t\leqslant r)$（参见 Cheeger 的工作）。这样，有

$$\begin{aligned}H(r)(X,X)&=\widetilde{X}\widetilde{X}r-(\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X})r\\&=X\left\langle\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle-\left\langle\nabla_{\widetilde{X}}\widetilde{X},\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&=\left\langle\widetilde{X},\nabla_{\widetilde{X}}\frac{\partial}{\partial r}\right\rangle\\&=\langle\widetilde{X},\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\widetilde{X}\rangle.\end{aligned}$$

最后一步是由于 $\left[\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial r}\right]=0$. 因此,在 x 点上,有

$$H(r)(X, X)=\int_0^r \frac{d}{dt}\langle\widetilde{X}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle dt$$

$$=\int_0^r (|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2+\langle\widetilde{X},\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}\rangle)dt.$$

但由于 $\widetilde{X}$ 是 Jacobi 场,即

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}+R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}=0,$$

所以

$$H(r)(X, X)=\int_0^r\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\widetilde{X}|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \widetilde{X}\right\rangle\right)dt. \tag{1.1.2}$$

注: 在 Jacobi 场的理论中,上述表达式正是向量场 $\widetilde{X}$ 沿 σ 的"指数式" (index form) $I_0^r(\widetilde{X})$. (可参见 Cheeger, Ebin 的书.)

比较定理. 设 M_1 和 M_2 是两个 n 维完备 Riemann 流形, $\gamma_i:[0, a]\to M_i$, $(i=1, 2)$ 是两条以弧长为参数的测地线. 记 M_i 上以 $\gamma_i(0)$ 为起点的距离为 ρ_i. 设 $\gamma_i(a)$ 在 $\gamma_i(0)$ 的割迹之内,假定 $\forall t(0\leqslant t\leqslant a)$, 有

$$\text{截面曲率 } K_1\left(X, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\geqslant\text{截面曲率 } K_2\left(Y, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right),$$

其中 X 和 Y 分别是 $T_{\gamma_1(t)}M_1$ 和 $T_{\gamma_2(t)}M_2$ 中与切向量 $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}$ 正交的单位向量,则

$$H(\rho_1)(X_1, X_1)\leqslant H(\rho_2)(X_2, X_2), \tag{1.1.3}$$

此处 X_i 是 $T_{\gamma_i(a)}M_i$ 中的单位向量,且 $\left\langle X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle(\gamma_i(a))=0$.

证明: 沿 γ_i 作正交的平行向量场 $E_1^{(i)}, \cdots, E_n^{(i)}$, 使

$$E_n^i=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\quad(i=1, 2).$$

由 (1.1.2)，有

$$H(\rho_i)(X_i, X_i) = \int_0^a \left(\left|\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\widetilde{X}_i\right|^2\right.$$

$$\left. - \left\langle R\left(\widetilde{X}_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_i}, \widetilde{X}_i\right\rangle\right)d\gamma_i,$$

其中 $\widetilde{X}_i$ 是沿 γ_i 的 Jacobi 场，$\widetilde{X}_i(\gamma_i(0)) = 0$，$\widetilde{X}_i(\gamma_i(a)) = X_i$。因为 $\left\langle X_i, \frac{\partial}{\partial\gamma_i}\right\rangle = 0$，所以 $\widetilde{X}_i$ 在 γ_i 的各点都和 $E_n^{(i)}$ 正交。记

$$\widetilde{X}_2 = \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(2)}.$$

根据 $E_i^{(1)}(a)$ 的取法的任意性，自然可假定

$$X_1 = \widetilde{X}_1(a) = \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(a)E_j^{(1)}.$$

沿测地线 γ_1 定义向量场 Z：

$$Z = \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j(t)E_j^{(1)},$$

则 Z 和 $\widetilde{X}_1$ 有相同的始值和终值，并且 $|\widetilde{X}_2| = |Z|$ 及

$$|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2| = |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(2)}|$$

$$= |\sum\lambda_j'(t)E_j^{(1)}| = |\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|.$$

根据 Jacobi 场理论中的基本事实（见 Cheeger，Ebin 的书）：沿一条无共轭点的测地线在具相同始终值的所有向量场的"指数式"中以 Jacobi 场的指数式为最小，由此即得

$$H(\rho_1)(X_1, X_1) = I_0^a(\widetilde{X}_1) \leqslant I_0^a(Z)$$

$$= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_1}}Z|^2 - \left\langle R\left(Z, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1}, Z\right\rangle\right)d\gamma_1$$

$$= \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2 - \left\langle R\left(Z, \frac{\partial}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_1}, Z\right\rangle\right)d\gamma_1$$

$$\leqslant \int_0^a\left(|\nabla_{\frac{\partial}{\partial\gamma_2}}\widetilde{X}_2|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}_2, \frac{\partial}{\partial\gamma_2}\right)\frac{\partial}{\partial\gamma_2}, \widetilde{X}_2\right\rangle\right)d\gamma_i$$

$$= I_0^\rho(\widetilde{X}_2) = H(\rho_2)(X_2, X_2).$$

最后的不等号是由于定理的假设．定理至此证毕．

在讨论流形上的分析问题时，以下形式的 Laplace 算子比较定理非常有用，它的证明是上述定理的直接推论．

系 1.1.1. (Laplace 算子比较定理)．设 n 维完备 Riemann 流形 M，其 Ric $(M) \geqslant -(n-1)k^2 (k \geqslant 0)$．再设 N 为 n 维单连通的以 $(-k^2)$ 为常曲率的空间，称为空间形式 (space form)．以 ρ_M 和 ρ_N 分别记 M 和 N 上相对固定点的距离．如果 $x \in M$，$y \in N$，使 $\rho_M(x) = \rho_N(y)$，则当 x 是 ρ_M 的可微点时，有

$$\Delta\rho_M(x) \leqslant \Delta\rho_N(y). \tag{1.1.4}$$

为了得出更便于应用的形式，我们需要计算常曲率 $(-k^2)$ 空间中的 $\Delta\rho$．根据 (1.1.2)，

$$H(\rho)(X, X) = \int_0^\rho \left(\left| \frac{\partial}{\partial\gamma} \widetilde{X} \right|^2 - \left\langle R\left(\widetilde{X}, \frac{\partial}{\partial\gamma}\right) \frac{\partial}{\partial\gamma}, \widetilde{X} \right\rangle \right) d\gamma,$$

其中 $\widetilde{X}$ 是沿极小测地线 γ 的 Jacobi 场，满足 $\widetilde{X}(0) = 0$,

$$\widetilde{X}(\gamma(\rho)) = X.$$

因此计算 $\Delta\rho$ 化为求沿极小测地线的 Jacobi 场的问题．

在以 $-k^2$ 为常曲率的空间形式中，沿任何正则测地线 γ 的 Jacobi 场可以这样求得：设 $p = \gamma(0)$，$q = \gamma(\rho)$，$X \perp \dot\gamma(\rho)$，将 X 沿 γ 平行移动得到的向量场仍记为 $X(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \rho)$，那么沿 γ 的 Jacobi 场 $Y(t)$，如果满足 $Y(0) = 0$，$Y(\rho) = X$，则具有以下形式：

$$Y(t) = f(t)X(t),$$

其中函数 $f(t)$ 满足经典的 Jacobi 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} f(t) - k^2 f(t) = 0, \\ f(0) = 0, f(\rho) = 1. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

熟知(1.1.5)的解为

$$f(t)=\frac{1}{R}\operatorname{sh}kt. \tag{1.1.6}$$

将(1.1.6)代入(1.1.2)，即得

$$\Delta\rho=(n-1)k\coth k\rho. \tag{1.1.7}$$

系 1.1.2. 如果 n 维完备 Riemann 流形的 Ricci 曲率 $\geqslant -(n-1)k^2$，则在 ρ 的可微点上有

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}(1+k\rho). \tag{1.1.8}$$

证明：根据 Laplace 算子比较定理及(1.1.7)，我们有

$$\begin{aligned}\Delta\rho&\leqslant(n-1)k\coth k\rho\\&=\frac{n-1}{\rho}k\rho\coth k\rho.\end{aligned}$$

易知

$$k\rho\coth k\rho\leqslant(1+k\rho),$$

所以

$$\Delta\rho\leqslant\frac{n-1}{\rho}(1+k\rho).$$

系 1.1.3. 以 r 表示对固定点而言的距离，如果流形的 Ricci 曲率满足 $\operatorname{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)\geqslant -c(r)$，则在固定点的割迹之内，有

$$\Delta r\leqslant\frac{n-1}{r}+\frac{1}{r^2}\int_0^r c(t)t^2dt. \tag{1.1.9}$$

证明：由(1.1.2)，知道

$$\begin{aligned}H(r)(X,X)=\int_0^r\Big(&|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\tilde{X}|^2\\&-\left\langle R\left(\tilde{X},\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\tilde{X}\right\rangle\Big)dt,\end{aligned}$$

其中 $\tilde{X}$ 是 X 沿极小测地线 γ 扩充而成的 Jacobi 场。现将 X 沿 γ 平行移动得到向量场 E，则向量场 $\left(\frac{t}{r}\right)E$ 在 $\gamma(0)$ 为零而在 $\gamma(t)$

处为 X. 同样，根据“指数式”的极小性，有

$$H(r)(X,X)=I_0^r(\widetilde{X})\leqslant I_0^r\left(\frac{t}{r}E\right)$$

$$=\int_0^r\left(\left|\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{t}{r}E\right|^2-\left\langle R\left(\frac{t}{r}E,\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial t},\ \frac{t}{r}E\right\rangle\right)dt$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\int_0^r t^2K\left(E,\frac{\partial}{\partial t}\right)dt. \tag{1.1.10}$$

现在，我们取 $\frac{\partial}{\partial r}$ 的正交补向量 $\{X_1,\cdots,X_{n-1}\}$，将 X_i 沿 γ 平行移动得正交向量场 $E_i(i=1,2,\cdots,n-1)$，在(1.1.5)中以 X_i 代其中的 X，再将所得到的 $n-1$ 个不等式相加，并注意 $H(r)\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)=0$ 的事实，就有

$$\Delta r=\sum_{i=1}^{n-1}H(r)(X_i,X_i)$$

$$\leqslant\frac{n-1}{r}-\frac{1}{r^2}\int_0^r t^2\sum_{i=1}^{n-1}K\left(E_i,\frac{\partial}{\partial r}\right)dt$$

$$=\frac{n-1}{r}-\frac{1}{r^2}\int_0^r t^2\,\mathrm{Ric}\left(\frac{\partial}{\partial r},\frac{\partial}{\partial r}\right)dt$$

$$\leqslant\frac{n-1}{r}+\frac{1}{r^2}\int_0^r t^2c(t)dt.$$

最后一步是根据假设. 此系得证.

根据(1.1.9)，当流形的 Ricci 曲率非负时，在 r 的可微点上总有

$$\Delta r\leqslant\frac{n-1}{r}. \tag{1.1.11}$$

不幸的是，上式在割点处失去意义. 然而，在研究流形整体性态时，由于 $M=\exp_O(E)\cup\mathrm{cut}(O)$，且 $\exp_O(E)$ 是星形区域，所以 M 的拓扑性质表现于 $\mathrm{cut}(O)$ 附近，致使我们希望在 $\mathrm{cut}(O)$