# 偏微分方程

陈祖墀 编著

中国科学技术大学出版社

# 偏微分方程

陈祖墀 编著



中国科学技术大学出版社

1993·合肥

（皖）新登字08号

# 偏 微 分 方 程

陈祖墀 编著

*

中国科学技术大学出版社出版

（安徽省合肥市金寨路96号，230026）

金寨县印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32 印张：9 字数：230 千

1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷

印数：1-3000册

ISBN7-312-00472-5/O·135 定价：5.20元

（凡购买中国科大版图书，如有白页、缺页、倒页者，由本社发行部负责调换）

## 内 容 简 介

本教材的主要内容包括：变分法，半线性方程的分类与标准化，高维空间中三个基本方程的定解问题，Sobolev 空间 $H^1$ 与 $H_0^1$ 及广义解，Hilbert 空间方法和算子理论，方程与方程组的特征理论，Cauchy-Kowalewski 定理，广义函数与基本解．本书不仅按照教学大纲的要求对偏微分方程的古典结果进行了严谨的介绍和论证，而且在内容、方法和概念诸方面注意了与现代偏微分方程知识的内在联系，并强调了其它数学分支知识在偏微分方程中的应用．内容丰富，论证严谨，方法多样，技巧性强，并配有丰富的例题与习题，难易兼顾，雅俗共赏．

本书可作为综合大学数学专业教材或教学参考书，也适用于理工科大学及高等师范院校本科生与研究生阅读，并可供一般的数学、物理工作者及工程技术人员参考．

# 前　言

作者多年来一直在中国科学技术大学数学系讲授偏微分方程课程，并编写了讲义。本书就是在讲义的基础上，经过多次修改与充实，并参考国内外现行同类教材和专著编写而成的。

众所周知，偏微分方程本来就是一个范围广阔、内容复杂的学科，而且近十余年来，一些新理论、新方法和新概念又迅速地发展并成熟。若在课堂上仍传统地讲授一些经典理论和方法，则学生学过之后与现代偏微分方程的水平相差甚大。但若在全新的基础上讲授这门课，既超越了教学大纲的要求，又难以使学生掌握。考虑到本课程在第四学年上学期(或第三学年下学期)开设时，学生几乎学完了所有其它的基础课，更新偏微分方程课的内容已成为可能。于是，作者大胆尝试着要写出一本既能严格地讲述古典理论，又能不失时机地引入现代偏微分方程某些概念、理论和方法的教材，以便学生学过之后能够较快地进入偏微方程的现代领域而不致于遇到太多的困难。按照这个原则，作者编写了一本偏微分方程讲义，该讲义曾于 1986 至 1992 年间，在中国科学技术大学数学系七届学生中试用，收到了良好的效果。

本书基本上是按照一学期 72 个学时的课程安排编写的。如果学时紧张，可根据学生的具体情况进行删减，例如，可删去第三章 §4，第五章 §4，第六章 §3 及第七章。但前六章的其它内容和第八章是基本内容，应重点讲授。

在本书的编写过程中，中国科学技术大学数学系的师生和中国科学院的一些专家以及沈尧天教授都曾提出过宝贵的意见，兹不一一列举，在此一并致谢。另外，编写中所参考的文献均列入书末的参考书目中，对这些教材和专著的编著者，作者亦表示谢

意。由于编者学识所限而导致的错误和不足在所难免，还望读者批评指正。

陈 祖 墀

1993年2月于合肥

# 目　次

# 第一章　绪　论

## §1　基本概念

### 1.1　定义与例子

一个**偏微分方程**就是一个形如

$$F\left(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2},\ \cdots\right)=0 \tag{1.1}$$

的关系式，其中，$F$ 是自变量 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ 和未知函数 $u$ 以及有限个偏微商的已知函数。有时，$F$ 不显含自变数及未知函数，但必须含有未知函数的偏微商。若未知函数不止一个，同时方程也不止一个，它们一起就构成一个**偏微分方程组**。除非另有说明，我们限制自变量 $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ 取实数值，并设函数 $u$ 及其各阶偏微商连续。

出现在方程中未知函数的最高阶微商的阶叫做该方程的**阶**。而偏微分方程组的阶就是其中阶数最高的那个方程的阶。如果方程(组)对所有偏微商及未知函数都是线性的，就称它是**线性偏微分方程(组)**，否则，称为**非线性偏微分方程(组)**。在非线性方程(组)中，如果对未知函数的最高阶微商是线性的，则称它是**拟线性偏微分方程(组)**。进而，如果最高阶微商的系数仅是自变量的函数，则称这样的拟线性方程(组)是**半线性的**。对线性方程(组)，若出现在方程(组)中的未知函数及各阶微商的系数都是常数，则称它是**常系数方程(组)**，否则称**变系数方程**。下面给出几个例子。

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), \qquad (1.2)$$

其中，$a_{ij}=a_{ji}$，且至少有一个 $a_{ij}\neq 0$。

$$\triangle_n u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=0, \qquad (1.3)$$

这里，$\triangle_n$ 叫做拉普拉斯算子。今后，在对自变量的个数不会引起混淆的情况下，我们记$\triangle_n$ 为 $\triangle$。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\triangle u, \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\triangle u, \qquad (1.5)$$

以上，$a$ 是正的常数。

$$u_t+cuu_x+u_{xxx}=0,\ c\text{ 为常数}, \qquad (1.6)$$

$$u_x^2+u_y^2=u, \qquad (1.7)$$

$$\begin{cases} u_t-v_x=0, \\ v_t+a(u)u_x=0, \end{cases} \qquad (1.8)$$

其中，$u$，$v$ 都是自变量 $t$ 和 $x$ 的未知函数。

以上诸方程(组)中，(1.2)是二阶线性方程，它是二阶线性偏微分方程的一般形式，其中，若 $f(x)\equiv 0$，则方程为**齐次的**，否则称**非齐次的**。(1.3)，(1.4) 和 (1.5) 都是二阶线性常系数方程，分别叫做调和方程、热传导方程和波动方程，是本书重点讨论的对象。(1.6) 是三阶拟线性方程，它就是有名的 Korteweg-de Vries 方程，简称 KdV 方程。(1.7)是一阶非线性方程，但不是拟线性的。(1.8)是一阶拟线性方程组。

若有一个函数 $u$ (在方程组情形是一组函数)在指定的自变量的变化区域中连续，并具有方程(组)中所出现的一切连续微商，将它(们)代入有关的方程(组)后使其成为恒等式，则称函数 $u$ (在方程组情形是一组函数)是该方程(组)的**解**或称**古典解**。除了古典解，我们在本书中还将讨论**广义解**，它是古典解概念的推广。

## 1.2 迭加原理

许多物理现象具有迭加性：几种不同因素同时出现时所产生的效果等于各个因素单独出现时所产生效果的总和(迭加)。这种具有迭加性质的物理现象反映到方程中来就是线性微分方程。我们以二阶线性方程(1.2)为例来说明方程的解的迭加性质。首先，引入线性偏微分算子

$$L=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x)。\tag{1.9}$$

于是，(1.2)可表示为

$$Lu=f。\tag{1.2$'$}$$

常常把迭加原理叙述为以下三种形式：

i) 设 $u_i$ 满足 $Lu_i=f_i(i=1,2,\cdots,m)$，则它们的线性组合 $u=\sum\limits_{i=1}^{m}c_iu_i$ 必满足方程 $Lu=\sum\limits_{i=1}^{n}c_if_i$。

ii) 设 $u_i$ 满足方程 $Lu_i=f_i(i=1,2,\cdots)$，并且级数 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_iu_i$ 收敛，且满足算子中所出现的求偏微商与求和交换次序所需要的条件，则 $u$ 满足方程 $Lu=\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_if_i$。

iii) 设 $u(M,M_0)$满足 $Lu=f(M,M_0)$，其中 $M$ 是自变量(可以是多维的)，$M_0$ 表示参数(可以是多维参数)，又设积分

$$U(M)=\int_\Omega u(M,M_0)\mathrm{d}M_0$$

收敛且满足 $L$ 中出现的求偏微商与求和运算交换次序所需要的条件，则 $U(M)$满足方程

$$LU(M)=\int_\Omega f(M,M_0)\mathrm{d}M_0。$$

由算子 $L$ 的线性易知，这几个迭加性质成立。

以后将经常利用迭加原理把一个较复杂的问题的求解化为几个简单问题的求解，从而使问题得以解决。

下面给出一个例子。

**例 1.1** 求 Poisson 方程 $\triangle u=x^2+3xy+y^2$ 的一般解。

**解** 先求出方程的一个特解 $u_1$。由于方程右端是一个二元二次齐次多项式。故设 $u_1$ 具有形式

$$u_1=ax^4+bx^3y+cy^4,$$

其中，$a,b,c$ 为待定常数。把它代入方程，得

$$\triangle u_1=12ax^2+6bxy+12cy^2=x^2+3xy+y^2,$$

比较两边系数得：$a=\frac{1}{12},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{12}$，于是

$$u_1=\frac{1}{12}(x^4+6x^3y+y^4).$$

再令 $u=u_1+v$，代入方程得

$$v_{xx}+v_{yy}=0,$$

作变换：$\xi=x$，$\eta=iy(i=\sqrt{-1})$，得

$$v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}=0,$$

再作变换：$s=\xi+\eta$，$t=\xi-\eta$，方程进而化为

$$v_{st}=0,$$

解得

$$v=g(s)+f(t)=g(\xi+\eta)+f(\xi-\eta)=g(x+iy)+f(x-iy),$$

其中，$f,g$ 为任意两次连续可微函数。于是根据迭加原理，Poisson 方程的一般解为

$$u=f(x-iy)+g(x+iy)+\frac{1}{12}(x^4+6x^3y+y^4).$$

## §2 定解问题及其适定性概念

### 2.1 定解条件与定解问题

一般把单独一个方程称为**泛定方程**。由上面例 1.1 可见，

一个泛定方程通常有无穷多个解。为了从中挑取所需要的解，必须对方程附加所谓**定解条件**。泛定方程(组)和定解条件一起就构成一个**定解问题**。

定解条件中最常见的是初始条件与边界条件两类。下面以偏微分方程中三个最基本的方程为例，说明定解条件的提法。

**1．调和方程**(又称 Laplace **方程**)(1.3) 的**边值问题**

设 $\Omega\subset R^n$，以 $\partial\Omega$ 记 $\Omega$ 的边界。这类问题的提法是：求函数 $u\in C^2(\Omega)\cap C^0(\overline{\Omega})$ 在 $\Omega$ 内满足方程(1.3)，在边界 $\partial\Omega$ 上满足下列三个条件之一：

1) $u|_{\partial\Omega}=\varphi(x)$，这里及下文，$x$ 均表示与 $\Omega$ 所在空间同维数的变量，届时不再赘述。其中 $\varphi(x)$ 是 $\partial\Omega$ 上已知函数。这个条件叫 Dirichlet **条件**或**第一类边界条件**。相应的问题叫Dirichlet**问题**或**第一类边值问题**。

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=\varphi(x)$，$\nu$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向，$\varphi(x)$ 是已知函数。这个条件叫 Neumann **条件**或**第二类边界条件**，相应的问题叫Neumann **问题**或**第二类边值问题**。

3) $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=\varphi(x)$，$\sigma=\sigma(x)>0$。此条件称为 Robin **条件**或**第三类边界条件**，相应的问题叫 Robin **问题**或**第三类边值问题**。

若边界数据或初始数据为零，则相应的条件分别称为齐次边界条件或齐次初始条件。

当然，还有其它边值问题，如混合边值问题：在边界的一部分上给出一类边界条件，而在其余部分给出另一类边界条件。本书主要讨论以上三类主要的边值问题。

**2．热传导方程(1.4)的定解问题**

分两类：

1) Cauchy 问题，又称**初值问题**。求函数 $u(x, t)$ 在全空间