自然科学哲学问题论丛

**自然科学哲学问题论丛**

第 一 辑

中国社会科学院哲学研究所

自然辩证法研究室编

☆

广 西 人 民 出 版 社 出 版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

*

开本 850×1168　1/32　印张 11,75　字数 293,000

1981年8月第1版　1981年8月第1次印刷

印　数 1—4,000 册

书号：2113·12　　定价：1.16 元

# 编 者 前 言

收入这本论文集的文章都是由我室研究人员撰写的，其中大部分是一九七九年在北京市科学技术委员会、邮电科学院研究生院和辽宁社会科学院等处所作的演讲的讲稿。我们在修改这些文章时，曾经得到许多同志的帮助，吸取了他们的批评意见，在这里谨向他们表示谢意。这些文章属于我们对自然科学哲学问题所作的初步探索，观点不尽相同，错误缺点也在所难免，欢迎读者批评指正。

中国社会科学院哲学研究所
自然辩证法研究室

一九七九年十一月三十日

# 目　　录

# 试论马克思的微分思想

林 夏 水

马克思的《数学手稿》是用唯物辩证法研究数学问题的一部重要历史文献。它对微分学作出了一系列的哲学概括，为微积分提供了正确的哲学根据，对于我们理解微分运算的辩证本质以及清除微积分发展史上出现的唯心主义和形而上学具有重要意义。但是，因为《数学手稿》是马克思在研究微分学及其历史时所作的摘录、札记、评注和演算，他的许多重要思想都分散在这些材料之中，绝大部分是未经系统整理的，因此，在研究《数学手稿》时，要特别注意全面地、历史地理解马克思的微分思想，否则就会得出主观片面的结论。例如，在前几年的许多文章中都引用马克思的一句话："为了得出'导数'，就必须设 $x_1 = x$，因而是严格数学意义上的 $x_1 - x = 0$，无需任何只是无限趋近之类的糊涂话。"（《数学手稿》，中译本，第5页）根据马克思的这一句话，这些文章的作者们便认为：马克思的微分思想是 $\triangle x = x_1 - x = 0$，它为微积分奠定了理论基础。他们还根据这句话去否定柯西的极限理论，说什么极限理论是"形而上学的"，"是一种庸俗的进化论"，极限方法"导致数学中唯心主义的形式主义。"因此，"如何看待柯西的体系，……是关系到如何对待《手稿》的态度问题。"这一系列的结论给我们提出一个十分尖锐的问题：为什

么“马克思的观点”与微积分发展的历史这样格格不入呢？或者说，为什么微积分的历史不是按照“马克思的观点”发展呢？这就不能不使我们怀疑，那种认为微分是$\triangle x=0$的观点，是不是全面地反映了马克思的思想呢？或者说，马克思关于微分的真实思想是什么呢？

## 一

为了说明马克思的微分思想，我想有必要从微积分发展史的角度考察一下，数学中的无限小量是怎样产生的，以及人类对它是如何认识的；马克思又是怎样批判地继承人类的先进思想，从而提出自己的独立见解的。

人类对无限小量的认识，远在古代就开始了，并且把它引进了数学领域。古希腊的原子论者德谟克利特把物质原子的思想引进了几何学，出现了所谓数学原子的思想。当时人们就利用这一思想来计算物体的面积和体积。这种数学原子的思想已经包含着实在的无限小量的思想。还有，象我国魏晋时期刘徽提出“割圆术”（即“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆周合体而无所失矣”），用于求圆周率$\pi$。后来人们又用这一思想来求面积、圆周。在“割圆术”中孕育着潜在的无限小量的思想。总之，人类在很早以前就应用这样一些无限小量的思想，解决了生产实践中提出的求面积、体积、圆周、圆周率等计算问题。这些朴素的无限小量的计算方法，实际上蕴含着微积分的思想萌芽。但是，在古代由于生产力发展水平不高，实践还没有迫切要求从理论上论证无限小量的性质。

十七世纪，在欧洲出现了资本主义，生产得到迅速的发展。它推动着天文学、力学的发展。这些发展又向数学提出了新的研究课题。例如，求物体运动的瞬时速度、计算不规则图形的面积

和体积等问题。这些问题都是初等数学所无法解决的。因此，需要数学工作者寻找新的数学工具。牛顿、莱布尼茨在总结前人成果的基础上，各自独立地发明了统一的微积分计算法。在这种新的计算法中，牛顿、莱布尼茨都用到了无限小的概念。例如牛顿在开始运算时，假设“$0$”是一个不等于零的无限小量；但在演算的最后，又把“$0$”当作零，而从结果中消去。实践证明，这样处理以后所得到的结果是正确的。但是，从形式逻辑的观点看来，这种推理是不允许的，它违反了同一律。因此，微积分计算法也就受到了一些正统派数学家的批评和反对。法国科学院院士罗尔说什么：微积分破坏了数学的“严密性的特征”，“带进了某些不正确的或者不可靠的命题”，“应该把它们从这门科学中驱逐出去。”①因此，为微积分计算法寻找理论根据，或者说，从理论上论证无限小量为什么具有零与非零的性质，这是数学家们所迫切需要解决的问题，它关系到微积分是否能在数学中立足的大问题。

为此，微积分的创立者提出过各种理由进行解释。牛顿在他的《曲线求积法》一文中说：“如果点与点之间由于一个区间相隔，那末尽管间隔很小，割线仍将与切线相隔一个小区间。为要使它与切线相重合，从而找到最终比，两个点就必须结合并重合在一起。在数学中，无论怎样小的误差也是决不能被忽略掉的。”②这就是说，无限小量应该等于零。但他在同一篇文章中又说，“量$0$无限地减少”，它不等于零。他在《运用无穷多项方程的分析学》一文中也说：量$0$“无限地变小，并且消失，或者变成零。”③这就是说，“$0$”是消失为零的量。莱布尼茨则把无限

---

① 引自舒立：《用马克思主义占领数学阵地》，《自然科学争鸣》，1975年第1期。

② 牛顿：《曲线求积法》，舒雪之译，《复旦学报》(自然科学版)，1975年，第2期。

③ The Mathematics Works of Issac Newton, vol.1, edit. by D.T. Whiteside, Johnson Reprint Company, 1964, p.23.

小量解释为“相对的零”。他说：“我并不把无限小设想为单纯的绝对的零，而是作为相对的零（正如您充分注意的那样），这就是说，把它作为保留着正在消逝的量的特征的一个消逝量。”① 此外，莱布尼茨还有一种略为不同的说法，这就是所谓“忽略高阶无穷小原理。”他说：“当我们谈到有不同层次的无穷大和无穷小的时候，就象对恒星而言，把地球看作一个点，对地球半径而言，把普通的球看作一个点，这样，恒星的距离对于普通球的半径而言是无穷地无穷大，或者无穷倍的无穷大，因为我们也可以不用无穷大或无穷小，而用充分大和充分小的量，使得误差小于给定的误差限度。”②如此种种的解释，说明了微积分的创立者对无限小量的认识是动摇的，他们不能为新计算法提供理论说明，这就使得微积分带上神秘性。虽然牛顿的消失为零的“*0*”和莱布尼茨的“相对的零”都包含着辩证法的思想，但是，由于受到形而上学思想的束缚，他们不能把不自觉意识到的朴素的辩证法思想坚持下去。例如，莱布尼茨最后对无限小量就采取一种虚无主义的态度。他说：“我决不相信有真实的无限大，也不相信有真实的无限小，这些东西仅仅是一些虚构，但是为了简化以及一般用语，这种虚构是有用的。”③

由于微积分创立者受到历史条件的限制，对于无限小量还没有形成明确的概念，因而不能为新计算法提供令人满意的理论说明。因此，为微积分寻找立论根据的问题，也就吸引着以后几代的数学家。他们从不同方面进行探索和解释，从微积分发展史来看，影响比较大的有三派人物，三种观点：即强调无限小量达到零的方面、强调无限小量的非零方面以及回避无限小量。

---

① 引自C.B.Boyer:The History of the Calculus and its conceptual Development, Dover Publications, 1959, P. 218—219.

② 引自A.Robinson:Non-standard Analysis, North—Holland Publishing Company, 1974, p.261—262.

③ 同②，第263页.

强调无限小量达到零的方面，有裘林、泰勒、欧拉等人。他们认为无限小量不仅趋向于零，而且消失为零。例如，欧拉在一七七五年发表的《微分学》一书中写道："一个无限小量是真实的零。"他还直截了当地把dx、dy写为零。强调无限小量的非零方面的有罗宾斯、达兰贝尔等人。他们认为无限小量只能无限地趋向于零，但永远不等于零，更不允许无限小量既是零又不是零。例如，达兰贝尔说："逼近量永远不能与极限重合或者相等，但是前者越来越接近于后者，使得其间之差要怎么小就怎么小。"① 他还说："一个量是某些东西，或者什么都不是；如果是某些东西，它还没有消失；如果它什么都不是，依字面讲，它已消失。有一种中间状态介于这两者之间的假设是幻想。"②这就是说，无限小量既不等于零，也不具有零与非零的性质。除了强调无限小量性质的不同侧面以外，还有一些人对无限小量的概念和方法采取回避的态度。例如，拉格朗日对无限小方法抱着怀疑态度，对极限概念也不感兴趣。他认为，欧拉的微分等于零的说法以及对$\frac{0}{0}$的看法缺乏清楚而明确的认识。在拉格朗日看来，这些问题都牵涉到无限小或者$\frac{0}{0}$的哲学困难。因此，他竭力避免上述方法，而努力寻找新的出路。一七九七年，他给自己写的《解析函数》一书，加了一个副标题："包含微分学原理、不用无限小或消逝量，极限或流数的任何考虑，以及化为有限量的代数分析。"这一标题说明了他对先前一些方法的态度和对自己方法的自信。拉格朗日的所谓代数分析的方法是什么呢？它是利用泰勒展开式，把任意函数展开成泰勒级数：

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\frac{h^3}{3!}+\cdots\cdots。$$

---

① 引自A. Robinson: Non-standard Analysis, North-Holland Publishing Company, 1974, p.267—268.

② 引自C.B.Boyer:The History of the Calculus and its conceptual Development, Dover Publications, 1959, p.248.

然后根据h的不同次幂的系数的物理意义来定义一阶、二阶、直到n阶的导数。拉格朗日以为这样做既可以避免极限和无限小量方法，又真正解决了微分学的理论基础问题。但是，微积分发展的历史说明，拉格朗日回避无限小量只是一种表面现象，他也没有真正为微积分建立理论基础。在避免无限小量或极限方法的人当中，还有英国数学家兰登。他发明一种所谓“代数方法”，这种方法是，首先让自变量$x$变到$x_1$，然后求出函数的改变量与自变量的改变量的商，最后，让$x_1$再变回到$x$，而求得导数。例如，求函数$y=x^2$的导数是这样进行的：

首先，让$x$变到$x_1$，相应地，$y$变为$y_1=x_1{}^2$。然后求差商：

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{x_1{}^2-x^2}{x_1-x}=x_1+x,$$

令$x_1=x$，得

$$\frac{dy}{dx}=2x。$$

兰登的这种方法，由于在遇到复杂的函数时需要运用特殊的技巧，所以当时就很少人应用它。现在，从实数理论的观点看来，$\triangle x=0$也只是在极其个别的场合下才能应用。因此，也就没有留传下来。

以上是十七、十八世纪数学家们对无限小量的一些观点。由于受到历史的局限，他们对无限小量的解释只能求助于几何或物理的直观，不能从理论上进行论证，因而也就不能更深刻地理解无限小量的辩证本质，消除微积分的神秘性。但是，他们的工作又为十九世纪微积分理论基础的建立提供了材料，作了思想准备。同时，在他们的推理和解释中虽然存在着矛盾，但是，也包含着朴素的辩证法思想，它冲击着十七、十八世纪的形而上学思想。这种冲击正如恩格斯所说的：“到上一世纪末，甚至到一八三〇年，自然科学家和旧的形而上学还相处得相当不错，因为真正的科学当时还没有超出力学——地球上的和宇宙的力学的范

围。虽然如此，高等数学已经引起了混乱，因为高等数学把初等数学的永恒真理看作已经被克服的观点，常常作出相反的判断，提出一些在初等数学家看来完全是胡说八道的命题。固定的范畴在这里消失了；数学走到了这样一个领域，在那里即使很简单的关系，如单纯的抽象的量之间的关系、恶无限性，都采取了完全辩证的形式，迫使数学家们既不自愿又不自觉地成为辩证的数学家。”（《马克思恩格斯选集》第8卷，第531页。）数学思想的这种变革为马克思和恩格斯确立唯物辩证法提供了一种科学依据。

## 二

马克思为了研究微分学的历史演变，从而进行哲学概括，他对牛顿、莱布尼茨、达兰贝尔、拉格朗日等人的微分法及其思想作了详细的摘录，进行分析、比较，批判地继承人类的先进思想，从而提出了自己的独立见解。

牛顿的流数法是借助于物理的直观来建立的，他把变量x看作流动量，把导数（牛顿称之为流数）$\dot{x}$看作流动量的增长速度，把无限小的时间增量记为$0$，这样，$0\dot{x}$就表示在无限小的时间内的流量。作了这样一些理解之后，牛顿就按照下列过程来求流数，设 函数

$$y = x^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

当x随着时间的流动变为$x+0\dot{x}$时，相应的函数y也变为$y+0\dot{x}$。用$x+0\dot{x}$和$y+0\dot{x}$代入（1）中，得

$$y + 0\dot{x} = (x + 0\cdot\dot{x})^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由（2）减（1）得到

$$0\cdot\dot{x} = 2x\cdot 0\cdot\dot{x} + (0\cdot\dot{x})^2,$$

两边除以0，得出

$$\dot{x} = 2x\cdot\dot{x} + 0\cdot\dot{x}\dot{x},$$

至此，牛顿以"$0$无限地减少"为理由，忽略了含有$0$的项。最后得到所求的导数

$$\dot{x}=2x。$$

莱布尼茨的微分法与牛顿所不同的是，他是借助于几何直观来建立的，所以不象牛顿那样突出速度和导数的概念，而是采用切线和微分的概念。在运算的表达上，牛顿把变量$x$、$y$的瞬间增量记为$0\cdot\dot{x}$、$0\cdot\dot{y}$，而莱布尼茨则用$dx$、$dy$来表示$x$、$y$的"瞬时差"。

牛顿的流数法和莱布尼茨的微分法在直观意义上是清楚的，它们作为一种计算方法，在运算上有其可取之处，即可以应用二项式展开定理。所以，马克思说："一般说来，通过先验地（a priori）假定$dx$,$dy$等等或$\dot{x}$,$\dot{y}$等等作为$x$和$y$的独立的孤立的增量，我得到标志微分学的巨大的好处，它从一开始就把变量的所有函数表示成微分形式。在我用这种方法处理了基本的函数，如$ax$，$ax\pm b$，$xy$，$\frac{x}{y}$，$x^n$，$a^x$，$\log x$，以及初等的圆函数之后，在求$dy$，$\frac{dy}{dx}$时，我就能够完全象在算术中用九九表一样来利用它们。"（《数学手稿》第99—100页）另一方面，从数学推理的严密性来看，无论是牛顿的流数法还是莱布尼茨的微分法都具有其不严格的地方。因为它们需要"用暴力镇压"掉一些项，而且导数"并不是用任何一种数学方法推导出来的。"（《数学手稿》第98页）所以，马克思把牛顿、莱布尼茨时期的微分学叫做"神秘的微分学"。

为了消除微分学的神秘性，达兰贝尔对牛顿、莱布尼茨的微分法作了一些修正，把$x+0\cdot\dot{x}$改为$x+h$（其中$h$是一个有限增量）。相应地，达兰贝尔求导数也就变为下面的一种过程。设函数

$$y=x^3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

假设$x_1=x+h$，相应地有$y_1=f(x+h)=(x+h)^3$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{x_1 - x}$$
$$= 3x^2 + 3xh + h^2,$$

令$h = 0$，即得

$$\frac{0}{0}\text{或}\frac{dy}{dx} = 3x^2。$$

从这个推理过程中，我们看到达兰贝尔为了得出导数，他采取令$h = 0$，从而推导出所要的结果。他不象微积分发明者那样，采用“魔术”变掉一些挡路的项才得到这个结果。对此，马克思给予很高的评价，他说：“达兰贝尔脱下了微分学的神秘外衣，取得了很大的进步。”（《数学手稿》第91页）并且还把达兰贝尔的微分法叫做“理性的微分学”。另一方面，在达兰贝尔的微分法中，因为导数是在$f(x+h)$的展开式的“第二项中作为$h$的一次幂的系数出现”的，“所以，这个推导实质上与在莱布尼茨和牛顿那里的相同。但是这个完全现成的导数$3x^2$是用严格的代数法从它的其他联系中解脱出来的。这不是发展，仅仅是把$f'(x)$，即这里的$3x^2$，从它的因子$h$以及从与它并列的其他各项中解脱出来而已。而真正发展了的，是左边，符号的一边，……。”（《数学手稿》第90—91页）达兰贝尔虽然在微分法中令$h = 0$，但是，当他对无限小量进行理论说明的时候，又只承认无限小量是越来越接近于零，而不可能达到零。马克思针对这一思想，进行了尖锐的批评，他说：“一些进行理性推断的数学家所坚持的聊以自慰的说法是，$\frac{dy}{dx}$在量上其实只是无限小〈的比〉，仅仅接近于$\frac{0}{0}$。这是奇想。”（《数学手稿》第8页）“为了得出‘导数’，就必须设$x_1 = x$，因而是严格数学意义上的$x_1 - x = 0$，无需任何只是无限趋近之类的糊涂话。”（《数学手稿》第5页）联系到马克思在《数学手稿》中采用的是兰登的代数微分法，有人以为，马克思只是肯定无限小量达到零的方面。但我们认为，这是马克思在不同地方强调微分运算的不同侧面。

对于马克思的微分思想，我们还可以从另一些地方看到，马克思又认为无限小量是不等于零的。例如，当马克思应恩格斯的要求而介绍微分学的实质时，他又十分明确地指出："y的微分（y无限小地增长时所取的表达式）。"（《数学手稿》第21页）这就是说，微分是无限小，而且是不等于零的。此外，马克思还在评述布沙拉的《微积分初步》一书时指出：由微分dx和dy构成的微分三角形"比点还小，所以在这种情况下要敢于把弦等同于弧，或者反过来把弧等同于弦。"（《数学手稿》第24页）显然，马克思在这里所说的微分dx、dy，也是一种不等于零的无限小量，否则是不能用它们来构成微分三角形的；同时，也无所谓敢不敢把弧等同于弦的问题。所以，我们从这些地方又看到马克思强调微分是不等于零的无限小量。

如上所述，马克思确实在不同地方强调无限小量的性质的不同侧面，或者说，强调了微分特性的不同侧面。所以，那种只看到马克思说$x_1 - x = 0$，而不顾马克思在另一些地方又认为微分是不等于零的无限小量的事实，就断定马克思的微分思想是$\triangle x = 0$，这是片面的。那末，又怎样才能全面地掌握马克思的微分思想呢？我们认为，这就要看马克思对整个微分过程是怎样论述和概括的。

马克思在《论导函数概念》这篇较完整的论文中，把微分过程概括为否定之否定的过程。他说："首先取差，然后再把它扬弃，这样在字面上就导致无。理解微分运算时的全部困难（正象理解否定的否定本身时那样），恰恰在于要看到微分运算是怎样区别于这样的简单手续并因此导出实际结果的。"（《数学手稿》第2页）他还说：$\triangle x$和$\triangle y$是"作为被扬弃了的或消失了的差"。（《数学手稿》第3页）马克思把完成微分过程时的$\triangle x$(即dx)概括为"扬弃了的差"，这是什么意思呢？马克思说"扬弃"$\triangle x$，"在字面上导致无"，这就是说，$\triangle x$等于零只是表面上的，实际

上还有东西，并不是纯粹的无。马克思主义哲学认为，“在辩证法中，否定不是简单地说不，或宣布某一事物不存在，或用任何一种方法把它消灭。”（《马克思恩格斯选集》第3卷，第181页）那种认为把大麦粒磨碎，把昆虫踩死也叫做否定的观点，被恩格斯斥之为形而上学的观点。因此，我们只要用唯物辩证法的观点来理解马克思的微分思想，就可以知道马克思所说的微分——“扬弃了的差”是一种既是零又不是零的无限小量。

从马克思与恩格斯的通信中，我们看到马克思在研究微分学中，有什么见解就告诉恩格斯；同样的，恩格斯对数学有什么看法也告诉马克思，共同探讨一些问题。这正如恩格斯所说的：“在各种专业上互相帮助，这早就成了我们的习惯。”（《马克思恩格斯选集》第3卷，第49页）就是《反杜林论》这部对数学有着许多重要概括的著作，在付印之前，恩格斯也是把“全部原稿”念给马克思听。所以，恩格斯对数学的许多重要论述，实质上是反映了他们的共同观点。因此，让我们看看恩格斯对微分的论述，这对于我们准确地理解马克思的微分思想是会有帮助的。

马克思讲到$\triangle x$必须在严格数学意义上等于零的那篇论文——《论导函数概念》，于一八八一年寄给恩格斯，同年八月十八日恩格斯在给马克思的复信中，对$\triangle x=0$作了解释，他说：“当函数完成由$x$到$x'$的过程，并带着该过程的全部后果之后，可以放心地把$x'$重新取做$x$；这已不是原来的$x$，只是按照名称来说还是变量$x$，它已经过了真正的变化，……。”（《马克思恩格斯全集》第35卷，第22页）恩格斯的这一重要思想又在一八八二年十一月二十一日给马克思的信中加以强调，他说：“你的方法和老方法的根本差别在于：你把$x$变为$x'$，也就是使之真正起变化，而其他人则是从$x+h$出发，这终归是两个量的和，而不表示一个量在变化。因此，你的$x$纵然通过$x'$再变回到原来的$x$，毕竟和原先的已不是一回事；而如果先把$h$加到$x$上，然后再把它减去，$x$是

始终保持不变的。”（《马克思恩格斯全集》第35卷，第109页）从这两封信中，我们看到恩格斯在把$\triangle x=0$理解为$x'$变回到x时，都强调了它和原先的x已经不是一回事。这种强调说明，$x'$虽然变回到x的位置，但是，它们之间还是有差异的，不是象有的同志那样把$\triangle x=0$简单地理解为绝对的等同。

对于恩格斯所阐发的这一光辉的辩证法思想，用今天的非标准分析的观点来看，完全是可以理解的，也是为微积分理论的新发展所证实的。在非标准分析中，如果x是一个标准数（即普通的实数），那末，与x相差一个无限小量的所有非标准数x便构成一个单子。当$x'$完成微分过程（即$x'$进入x的单子）时，从实数域来看，$x'$和x的标准数都是x，所以，它们之间的差是零，即$\triangle x=x'-x$确实有等于零的一面。但是，从超实数域来看，$x'$虽然进入x的单子，可是它们之间仍然相差一个无限小量，所以，$\triangle x=x'-x$又有不等于零的一面，这也就是恩格斯所说的“你的x纵然通过$x'$再变回到原来的x，毕竟和原先的已不是一回事”这一重要思想的数学表达。

此外，我们还可以看一下恩格斯在《反杜林论》这部重要著作中，对微分及其运算过程是怎样概括的。他说：“在高等分析中，即在杜林先生自己称为数学的最高运算而在普通人的语言中称为微积分的‘求无限小总和的运算’中，否定的否定表现得更加明显。这些计算方式是怎样实现的呢？例如，我在某一课题中有两个变数x和y，两者之中有一个变化，另一个也按照条件所规定的关系同时变化。我把x和y加以微分，就是说，我把x和y当作无限小，使得它们同任何一个无论怎样小的实数比起来都趋于消失，使得x和y除了它们那种没有任何所谓物质基础的相互关系，即除了没有任何数量的数量关系，就什么也没有剩下。所以$\frac{dy}{dx}$，即x和y的两个微分之间的关系$=\frac{0}{0}$，可是这$\frac{0}{0}$是$\frac{y}{x}$的表现。

我只附带指出，两个已经消失的数的这种关系，它们消失的确定的时刻，本身就是一种矛盾；但是这种矛盾不可能妨碍我们，正象它差不多二百年来根本没有妨碍过数学一样。那末我不是除了否定x和y之外就什么也没有做吗？但是，我不是象形而上学者否定它们那样，否定了他们，就不再顾及它们了，而是根据适合于条件的方式否定了它们。这样，我在我面前的公式或方程式中得到的不是x和y，而是x和y的否定，即dx和dy。现在我继续运算这些公式，把dx和dy当作实数——虽然是服从某些特殊规律的数，……”（《马克思恩格斯选集》第3卷，第177页）从恩格斯对微分运算的辩证法的分析中，使我们清楚地看到恩格斯关于微分的两个重要思想，即微分dx是无限小量，它是一种“没有任何数量的数量”；微分dx象实数一样也是一种数量，但是它是“服从某些特殊规律的数”。从这里我们看到，恩格斯并没有把x的微分理解为一种纯粹的无，而是某种特定的无。总之，根据恩格斯的上述观点，我们认为，恩格斯关于微分的思想也是一种既是零又不是零的无限小量的思想。

综合以上几个方面的分析和考察，使我们清楚地看到，马克思关于微分的真实思想是一种既是零又不是零的无限小量思想，而那种认为马克思的微分思想是$\triangle x=0$的观点是表面的、片面的。

马克思的毕生精力主要是放在领导无产阶级革命运动和《资本论》的创作等工作上面，使得他没有更多的时间从事于数学的研究，而只能在“工作之余”“搞搞微分学$\frac{dx}{dy}$”，因此未能接触十九世纪微积分理论的一些重大发展。但是，由于马克思创立了唯物辩证法这一锐利的思想武器，并且把它具体地运用于数学的研究中，所以他在研究十七、十八世纪微积分的历史演变时，就能对微分学作出正确的哲学概括。正如我们上面所看到的，他把微分概括为“扬弃了的差”，这一思想的正确性已为十九世纪微