

现代数学丛书

陈翰馥 朱允民 著

随机逼近

STOCHASTIC
APPROXIMATION

CHEN HANFU
ZHU YUNMIN

上海科学技术出版社

0341-5
c4

391998

·现代数学丛书·

随 机 逼 近

陈翰馥 朱允民 著

上海科学技术出版社

•现代数学丛书•

随 机 逼 近

陈翰馥 朱允民 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 18.5 插页 4 字数 230,000

1996 年 10 月第 1 版 1996 年 10 月第 1 次印刷

印数 1—1,200

ISBN 7-5323-3906-8/O·191

定价: 26.00 元

内 容 提 要

寻找带误差地量测到的未知回归函数的零点或极值,是系统辨识、适应控制、模式识别、适应滤波和神经网络等领域中都要遇到的问题。随机逼近提供了解决这一问题的递推方法。本书在一些准备材料之后,在第2章中叙述了分析随机逼近算法常用的三种基本方法,侧重解释这些方法本身,而不在于为收敛性所加条件的强弱。第3章介绍随机变界截尾的随机逼近方法,这是一种修改了的 Robbins-Monro 算法,后者只适用较窄的一类回归函数和量测噪声。这一章还分析了算法的收敛性、收敛速度及稳健性。第4章叙述了算法的渐近正态性,算法中用慢衰减增益时平均估计的渐近有效性。第5章讨论连续时间算法及相应的性质。最后三章涉及随机逼近的应用。第6章应用随机逼近收敛性定理解决动态系统中各种参数估计问题。第7章讨论信号处理中的适应滤波问题,表明这类问题可以用随机逼近来解决。最后一章,用随机逼近的结果和处理方法来研究随机并行处理及多传感器数据融合问题。

本书适用于从事随机优化、系统与控制、数理统计及信号处理等领域的学生及科研人员,对从事实际优化问题的人员,本书也是一本有价值的参考书。

DY69/04

Modern Mathematics Series

STOCHASTIC APPROXIMATION

Chen Hanfu Zhu Yunmin

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Stochastic Approximation

Abstract

The problem of searching for zeros or extrema of a unknown regression function observed with noise is often met in various fields including system parameter identification, adaptive control, pattern recognition, adaptive filtering and neural networks. Stochastic approximation provides a recursive way to solve this problem. Following some preparatory material the book describes three basic methods in Chapter 2 which are commonly used for analyzing approximation algorithms with emphasis on explanation of the methods themselves rather than on conditions required for convergence. Chapter 3 presents the stochastic approximation algorithm truncated at randomly varying bounds, a modification to the classical Robbins-Monro algorithm, which is applicable for a rather restrictive class of regression functions and observation noises. Convergence, convergence rates and robustness of the algorithm proposed are also analyzed in this chapter. Chapter 4 demonstrates the asymptotic normality of the algorithm and asymptotic efficiency of the averaged estimate when a slowly decreasing gain is applied. Continuous-time algorithms and their corresponding properties are presented in Chapter 5. The last three chapters are of application oriented. Convergence theorems of stochastic approximation are applied to various parameter estimation problems in dynamic systems. This is done in Chapter 6. Adaptive filtering in signal processing is dealt with in Chapter 7. It is shown that the problem in question can be solved by stochastic approxi-

mation. In the last chapter the parallel processing and multi-sensor data fusion are considered with the help of results and techniques developed for stochastic approximation.

The book is designed for students and researchers in stochastic optimization, system and control, mathematical statistics and signal processing. Those who work in practical optimization problems will also find the book a valuable resource.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua	Chen Hanfu
Chen Xiru	Cheng Minde
Ding Xiaqi	Feng Keqin
Hu Hesheng	Jiang Boju
Li Tatsien	Liang Youdong
Liu Yingming	Shi Zhongci
Wang Zikun	Wu Fang
Yan Zhida	Yang Le
Ye Yanqian	Zhang Gongqing

出版说明

从60年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著已在国外出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价。原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋3位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念。由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿。

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作,充实编委会的力量。考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于1990年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨。

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18位著名数学家任委员。编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作。

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流。

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整

1 2 3 1 2 6512

研究成果的现代数学学术专著。

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

序 言

在许多理论课题或实际应用中,经常要求一个函数的零点或极值,如果函数有已知的解析表达式,那么在理论上解决这个问题并不困难;如果虽不知函数的表达式,但它在任一点的取值可以无误差地量测到,那么有不少行之有效的数值方法可供选用;当既不知函数的表达式,又不能无误差地量测到函数值时,如何求函数的零点或极值,正是随机逼近要解决的问题。

不同领域的许多实际问题:例如信号处理领域中的适应波束形成,适应控制中极小化性能指标问题,模式识别统计方法中建立分割超平面问题,参数估计中的递推方法等都可归结为随机逼近问题。它在适应控制、参数辨识、随机优化等领域中起到重要作用,并在智能控制、学习系统、模式识别、神经网络等领域中也正在显示出它的重要意义。

随机逼近创始于50年代初,Robbins-Monro^[78]首先提出了求未知函数 $f(\cdot)$ 零点 x^0 的一个递推算法。若在 n 时刻对 x^0 的估计为 x_n ,在下一时刻 $n+1$,在 x_n 处对 $f(x_n)$ 进行量测,但量测量 $y_{n+1}=f(x_n)+e_{n+1}$ 带有误差 e_{n+1} 。在文献[78]中建议用 $a_n y_{n+1}$ 来修正 x_n ,得到下一步时刻对 x^0 的估计值 x_{n+1} 。 a_n 叫增益系数。当 $n \rightarrow \infty$ 时,它一方面要趋于0,以逐步排除量测误差对估计的影响;另一方面, a_n 趋于0的速度也不能太快,否则可能会使估计值凝聚在某一点,而达不到 x^0 。

在Robbins-Monro的奠基性工作后,随机逼近取得蓬勃发展。主要的研究目标是考察各种相关的量测噪声^[82]及拓广可适用的回归函数范围^[80],而收敛类型,除了最初的均方收敛,更多地研究概率1收敛以及弱收敛。从研究方法讲,文献[74]是用鞅收

敛方法研究随机逼近算法概率 1 收敛的有代表性的专著, 基本特点是讨论独立噪声, 它对 70 年代以前工作做了一个很好的总结。之后, 文献 [65] 把递推算法的收敛性和微分方程的稳定性建立了联系, 从而使所考察的量测误差的范围有实质性扩大。这种思想在专著^[49]中得到清晰的阐明。但这种方法要事先假定算法给出的估计值有界。

人们自然希望, 既把所讨论的噪声和回归函数的范围扩大, 但又不用事先假定算法有界。另外, 微分方程方法虽然富有启发性, 但毕竟要从离散算法内插成连续时间的方程, 然后再回到离散时间, 总有绕圈子之嫌, 这就是作者撰写本书的出发点之一。我们将着重研究稍作修改的 Robbins-Monro 算法, 实质性地放弃对回归函数及量测噪声的要求, 同时也不必事先假定算法有界。此外, 我们将利用 Lyapunov 函数的性质, 直接在离散时间上解决收敛性问题, 而不再到连续时间里去“转”一圈。

本书第 1 章介绍了要用到的概率及一些准备知识, 有一定专业基础的读者, 可以跳过这一章。第 2 章介绍研究随机逼近的各种方法, 重在方法本身, 而不拘泥于具体结果。第 3、4、5 章研究随机变界截尾的 Robbins-Monro 算法, 讨论它的收敛性、稳健性、收敛速度、渐近正态性及渐近有效性, 不仅讨论离散时间, 也研究连续时间算法。求大范围极值的随机逼近, 虽然很吸引人, 但目前已有结果^[49], 是把问题转化为连续时间的模拟退火来解决, 超出了本书范围。第 6 章讨论用随机逼近的办法来估计动态系统所含的未知参数。第 7 章转向讨论在信号处理和通讯中有广泛应用背景的适应性滤波算法, 我们将给出它的收敛性、收敛速度、稳健性、渐近正态性和渐近有效性结果。随机并行处理和多传感器数据融合是 80 年代后期才逐渐引起国际上广泛注意的新研究方向, 在第 8 章中我们将针对 Robbins-Monro 算法和适应性滤波算法给出一些有关上述研究方向的新结果。

目 录

序言

第1章 准备知识	1
§ 1.1 概率论的一些概念	1
§ 1.2 停时、鞅和鞅差序列	5
§ 1.3 随机微分方程	9
§ 1.4 阵的伪逆与微分	14
第2章 随机逼近算法的分析方法	21
§ 2.1 随机逼近算法	21
§ 2.2 鞅方法	24
§ 2.3 常微分方程方法	28
§ 2.4 Lyapunov 函数方法	34
第3章 随机变界截尾算法	40
§ 3.1 随机变界截尾算法的收敛性分析	40
§ 3.2 收敛速度	48
§ 3.3 一些数值模拟例子	54
§ 3.4 算法收敛性对量测误差的一个充分必要条件	56
§ 3.5 算法的稳健性分析	60
第4章 随机逼近算法的渐近性质	75
§ 4.1 线性递推估计的渐近正态性	76
§ 4.2 变界截尾 RM 算法的渐近正态性	87
§ 4.3 渐近有效性	92
第5章 连续时间的随机逼近	107
§ 5.1 连续时间的 RM 算法	107
§ 5.2 变界截尾随机逼近算法	111

§ 5.3 收敛速度	119
§ 5.4 渐近正态性	124
§ 5.5 渐近有效性	128
第6章 系统参数估计	144
§ 6.1 连续时间动力系统参数估计	144
§ 6.2 再访 ODE 方法	150
§ 6.3 一个适应控制问题	163
§ 6.4 连续时间系统的参数估计	167
§ 6.5 非线性系统的参数估计	175
第7章 适应性滤波算法	188
§ 7.1 最小方差线性滤波	189
§ 7.2 适应性滤波算法的强收敛性	192
§ 7.3 一类步长因子下强收敛性的充要条件及稳健性	203
§ 7.4 均方收敛与渐近正态性	214
§ 7.5 渐近有效性	224
第8章 随机并行处理及多传感器数据融合	230
§ 8.1 异步并行分布式随机逼近算法	231
§ 8.2 多处理器序贯异步并行时滞随机逼近算法	238
§ 8.3 有关凸组合优化的矩阵函数极值定理	242
§ 8.4 多观测器的最优凸组合随机逼近算法	246
§ 8.5 多传感器的最优凸组合适应性滤波算法	254
参考文献	262
后记	269
后记文献	273

CONTENTS

Preface

Chapter 1 Preliminaries1

- § 1.1 Concepts of Probability Theory1
- § 1.2 Stopping Times, Martingales and Martingale Difference
Sequences5
- § 1.3 Stochastic Differential Equations9
- § 1.4 Pseudo-Inverse and Differentiation of Matrices14

Chapter 2 Analysis Methods for Stochastic

Approximation Algorithms21

- § 2.1 Stochastic Approximation Algorithms21
- § 2.2 Martingale Method24
- § 2.3 Ordinary Differential Equation Method28
- § 2.4 Lyapunov Function Method34

Chapter 3 Algorithms with Randomly Varying

Truncations40

- § 3.1 Convergence Analysis for Algorithms with Randomly
Varying Truncations40
- § 3.2 Convergence Rates48
- § 3.3 Examples of Numerical Simulation54
- § 3.4 A Necessary and Sufficient Condition on the Measurement

Noise for Convergence of Algorithms	56
§ 3.5 Robustness Analysis for Algorithms.....	60
Chapter 4 Asymptotic properties of Stochastic	
Approximation Algorithms	75
§ 4.1 Asymptotic Normality of Linear Recursive Estimates	76
§ 4.2 Asymptotic Normality of RM Algorithm with Randomly Varying Truncations	87
§ 4.3 Asymptotic Efficiency	92
Chapter 5 Continuous-Time Stochastic	
Approximation	107
§ 5.1 Continuous-Time RM Algorithm	107
§ 5.2 Stochastic Approximation Algorithm with Randomly Varying Truncations	111
§ 5.3 Convergence Rates	119
§ 5.4 Asymptotic Normality	124
§ 5.5 Asymptotic Efficiency	128
Chapter 6 System Parameter Estimation.....	144
§ 6.1 Parameter Estimation in Continuous-Time Dynamic Systems	144
§ 6.2 ODE Method Revisited	150
§ 6.3 An Adaptive Control Problem	163
§ 6.4 Parameter Estimation for Continuous-Time Systems	167
§ 6.5 Parameter Estimation for Nonlinear Systems	175
Chapter 7 Adaptive Filtering Algorithms	188
§ 7.1 Minimum Variance Linear Filtering	189
§ 7.2 Strong Consistency of Adaptive Filtering Algorithms	192