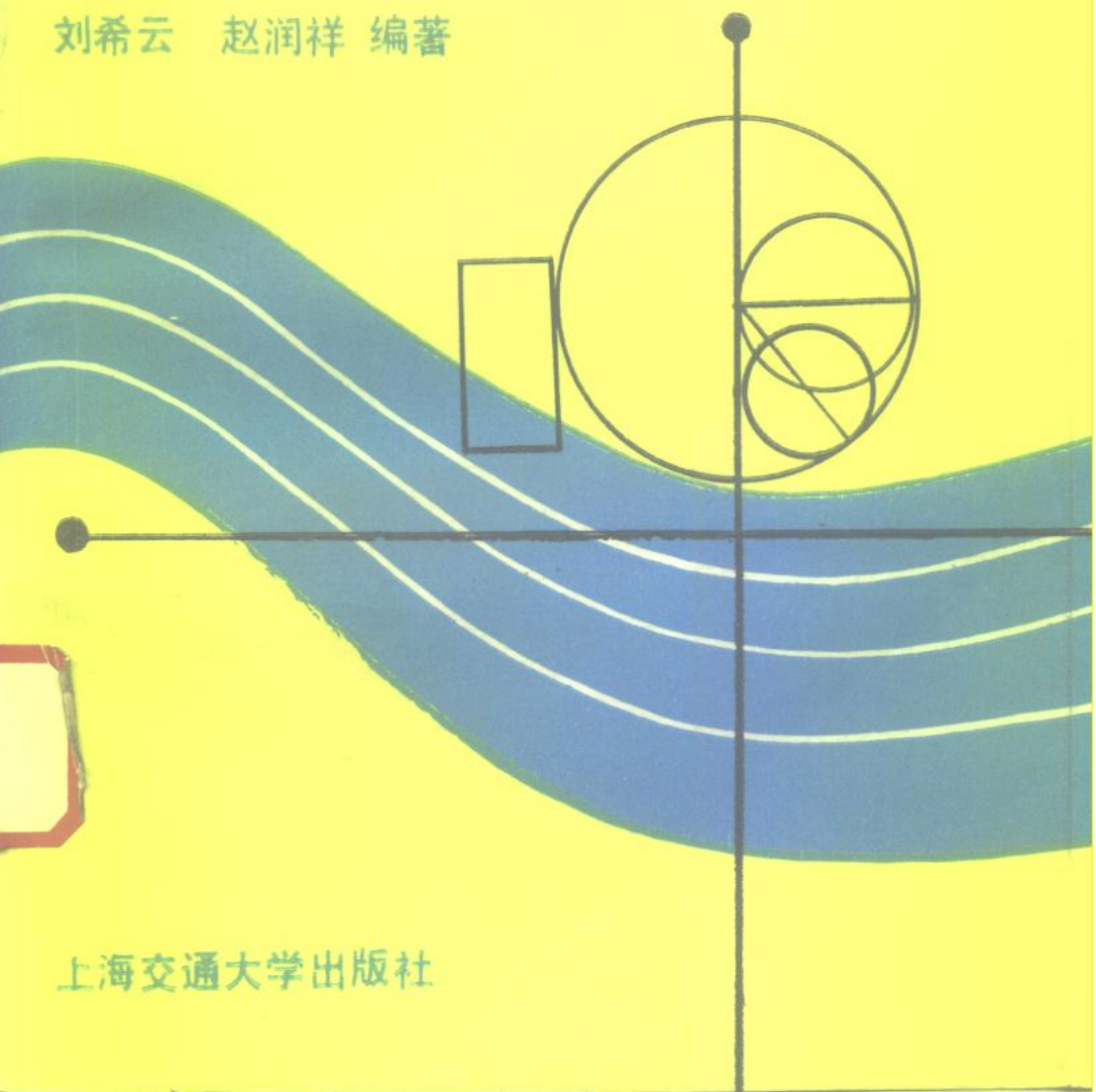


流体力学中的有限元 与边界元方法

刘希云 赵润祥 编著



上海交通大学出版社

035
L75

流体力学中的有限元与 **边界元方法**

刘希云 赵润祥 编著

上海交通大学出版社

D299/61
内 容 提 要

本书系统地介绍了有限元与边界元方法的基本理论以及在流体力学中的应用。全书共分八章。第一章为数学预备知识,介绍了本书必备的数学知识;第二章为有限元概念;第三章为插值函数,这两章是有限元基础理论。第四章为流体力学基本方程及为第五章、第六章和第八章提供所用的流体力学中的一些基本方程。第五章为不可压缩流有限元解法,第六章为可压缩流有限元解法,这两章主要介绍有限元方法在流体力学中的应用。第七章为边界元法基础。第八章为边界元方法在流体力学中的应用。这两章主要介绍边界元方法基础理论及在流体力学中的应用。

本书可作为流体力学专业高年级本科生和研究生的教科书,也可供科技人员参考书,其中基础部分也可作为其他力学专业人员的参考书。

(沪)新登字 205 号 流体力学中的有限元与边界元方法

出版: 上海交通大学出版

(上海市华山路1954号·200030)

字数: 331000

发行: 新华书店上海发行所

版次: 1993年2月 第1版

印刷: 常熟市文化印刷厂

印次: 1993年3月 第1次

开本: 850×1168(毫米)1/32

印数: 1—1480

印张: 12.875

科目: 294—273

ISBN 7-313-01174-1/O·35

定价: 4.00 元

前 言

随着电子计算机技术的迅速发展和广泛应用,数值计算已成为解决工程技术问题的有效方法。常用的数值方法是有限差分法、有限元法和边界元法。有限差分法应用最早,应用范围最广,因此,它也是很普及的。但它的不足之处是:由于网格划分必须是矩形,这样边界条件不能严格满足,因此误差较大;其二是为了保证精度要求,网格划分很密,这就导致解大型代数方程组,使得一些问题必须在大型计算机上才能运算。

有限元方法,起始于50年代,70年代开始在流体力学中应用,至今已较完善。国外已用来解亚音速,超音速、跨音速的欧拉方程,全速度位方程和N-S方程。并广泛的应用到航海、航空和航天领域。它的特点是:网格划分可以是任意形状的,而且比较大,因此,它弥补了有限差分法的不足之处。

有限差分法和有限元法共同之处就是必须在全域内进行求解,因此,仍需解大型代数方程组。边界元法与有限元法和有限差分法相比,最大的优点是:只需在边界上求解,这样就可以将三维问题化为二维问题,二维问题化为一维问题,大大减少未知数的个数,使得一些问题可以在微机上运算。据统计,在保证同样精度情况下,解某些问题所用时间和有限元法相比为1:4到1:10。另外边界元方法从积分方程出发,而数值积分要比数值微分精确很多,稳定得多。边界元方法是70年代由英国Southampton大学C. A. Brebbia等人首创。目前还不普及,所解决问题的范围还有限,有待进一步发展和完善。

目前国内在流体力学领域中,有限元法和边界元法的应用还

不普及，特别是边界元方法。系统的介绍基本方法和理论的参考书也还很少。本书是根据作者近几年的教学实践和科研成果编著的，系统地介绍了有限元法和边界元法的基本原理及在流体力学中的应用。

本书可作为流体力学专业高年级本科生和研究生的教科书，也可作为从事流体力学专业工程技术人员的参考书。其中基础章节可作为其他力学人员的参考书。

由于作者水平有限，书中一定还有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

作者 一九九二年九月 于南京

目 录

第一章 数学预备知识	1
§ 1-1 场论	1
§ 1-2 矢量及指标表示法	18
§ 1-3 变分法	25
§ 1-4 泛函分析	36
§ 1-5 张量	50
第二章 有限元概念	58
§ 2-1 微分方程近似解	58
§ 2-2 一维有限元问题	66
§ 2-3 一维有限元方法解题过程	72
§ 2-4 二维有限元问题	75
§ 2-5 边界条件的嵌入	92
§ 2-6 非线性及非定常问题	95
第三章 插值函数	101
§ 3-1 一维插值函数	101
§ 3-2 二维插值函数	105
§ 3-3 三维插值函数	130
第四章 流体力学基本方程	140
§ 4-1 坐标系	140
§ 4-2 积分形式基本方程	145
§ 4-3 微分形式基本方程	148
§ 4-4 理想流体基本方程	150
§ 4-5 热力学方程	152

§ 4-6	粘性流方程	158
§ 4-7	速度位方程及小扰动理论	164
§ 4-8	流函数方程	168
§ 4-9	势函数及流函数的解	170
§ 4-10	旋涡运动	177
§ 4-11	复变函数解二维不可压流	186
第五章	不可压缩流有限元解法	197
§ 5-1	二维不可压绕翼型流动	197
§ 5-2	二维不可压轴对称流动	200
§ 5-3	不可压粘性流	210
§ 5-4	热对流问题	216
§ 5-5	算子分裂技术	224
§ 5-6	共轭梯度法	228
§ 5-7	海潮运动	236
§ 5-8	浅水波运动	240
§ 5-9	有旋流动	246
第六章	可压缩流有限元解法	250
§ 6-1	二维可压缩小扰动方程	250
§ 6-2	二维跨音速流	256
§ 6-3	速度位方程	259
§ 6-4	欧拉方程	268
§ 6-5	最优控制有限元解法	276
§ 6-6	可压缩粘性流	283
§ 6-7	可压缩粘性流最优控制有限元解法	288
第七章	边界元法基础	296
§ 7-1	微分方程近似解	296
§ 7-2	逆变换	301
§ 7-3	位势问题基本解	304
§ 7-4	积分方程离散——边界元方法	310

§ 7-5	间接边界元法	314
§ 7-6	非定常及非线性问题	320
§ 7-7	一般线性算子边界元方法	324
第八章	边界元法在流体力学中应用	329
§ 8-1	二维圆柱绕流	329
§ 8-2	二维不可压流	333
§ 8-3	可压缩流	338
§ 8-4	泊松类型方程边界元法	347
§ 8-5	斯托克斯方程的解	352
§ 8-6	广义斯托克斯方程的解	357
§ 8-7	不可压粘性流	363
附录 A	绕圆柱流动有限元法计算程序	369
附录 B	绕圆柱流动边界元法计算程序	380
附录 C	常用积分公式	392
附录 D	高斯求积公式	394
参考文献		400
主要符号表		402

第一章 数学预备知识

§ 1-1 场 论

如果在全部空间或部分空间里的每一点, 都对应着某个物理量的一个确定的值, 那么称这空间里确定了该物理量的一个场。如果这个物理量是标量, 就称这个场为标量场; 如果这个物理量是矢量, 就称这个场为矢量场。例如: 温度场、密度场等为标量场, 而力场、速度场等为矢量场。

如果场中物理量在各点处不随时间而变化, 则该场为定常场, 否则为非定常场。

一、标量场的方向导数和梯度

1. 方向导数

场中的物理量是随空间位置而变化的, 为了研究标量在场中某点处的邻域内沿某方向的变化情况, 因而引进方向导数的概念。即设 M_0 为标量场 u 中的点, 从 M_0 点引出一条射线 l , 在 l 上 M_0 点的邻近取一点 M , 如图 1-1 所示。那么标量 u 在 M_0 点沿 l 方向的方向导数为

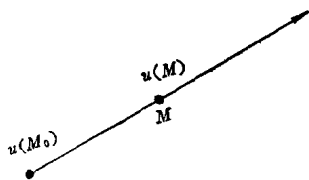


图 1-1 方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{M_0} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M}. \quad (1-1)$$

如果物理量 u 在点 M_0 处可微; l 方向的方向余弦为 $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ 。那么式(1-1)可写成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (1-2)$$

2. 梯度

方向导数描述了标量场在给定点沿某方向的变化率。然而对于给定点,有无穷多个方向,那么是否存在某一个方向,使函数沿这个方向的变化率最大呢?如果存在,又如何确定这个方向呢?为此,引进梯度的概念。

设

$$\mathbf{G} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1-3)$$

$\mathbf{l}^0$ 的单位矢量为

$$\mathbf{l}^0 = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k},$$

那么,式(1-2)可写成

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{l}^0 = |\mathbf{G}| \cos(\mathbf{G}, \mathbf{l}^0). \quad (1-4)$$

从式(1-4)可看到,如果 $\mathbf{l}^0$ 方向和 $\mathbf{G}$ 方向相同时, $\frac{\partial u}{\partial l}$ 值最大。也就是说,沿 $\mathbf{G}$ 方向函数 u 的变化率最大。这里定义矢量函数 $\mathbf{G}$ 为标量函数 u 的梯度。记作

$$\text{grad} u = \mathbf{G} = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1-5)$$

二、矢量函数的通量和散度

设有矢量场 $\mathbf{A}$, 沿某给定曲面 S 上的积分称为矢量场 $\mathbf{A}$ 穿过该曲面的通量。即

$$Q = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1-6)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为微元面积 dS 上的单位外法向矢量。

如果对于给定点 M , 取微封闭曲面 ΔS 包围 M 点, 设该封闭曲面 ΔS 所包围的体积为 ΔV , 如果通过该曲面的通量与体积 ΔV 之比的极限存在, 称此极限为矢量场 $\mathbf{A}$ 在 M 点的散度, 记作

$$\text{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta V}.$$

利用高斯定理,可以证明

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}, \quad (1-7)$$

其中 A_1, A_2, A_3 为矢量 $\mathbf{A}$ 在直角坐标系中的 3 个分量。

三、矢量场的环量及旋度

设有矢量 $\mathbf{A}$, 沿某一封闭曲线的曲线积分, 称为矢量场 $\mathbf{A}$ 沿该曲线的环量, 即

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl, \quad (1-8)$$

其中 $\mathbf{t}$ 为微元曲线 dl 的单位切向矢量。

设矢量 $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$,

$$\mathbf{t} = \frac{dx}{dl} \mathbf{i} + \frac{dy}{dl} \mathbf{j} + \frac{dz}{dl} \mathbf{k},$$

那么就有

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \oint_L (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz). \quad (1-9)$$

设 M 为矢量场 $\mathbf{A}$ 中的一点, 在 M 点处取定一个方向 $\mathbf{n}$, 过 M 点以 $\mathbf{n}$ 为法向作微元曲面 ΔS , 设微元曲面的周线为 Δl , 并 $\mathbf{n}$ 方向和 Δl 的切线方向成右手螺旋关系, 那么定义矢量 $\mathbf{A}$ 沿 Δl 的环量与 ΔS 之比的极限称为矢量 $\mathbf{A}$ 在 M 点处沿 $\mathbf{n}$ 方向的环量密度, 即

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl}{\Delta S}.$$

由斯托克斯定理

$$\begin{aligned} \Delta \Gamma &= \oint_{\Delta l} \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} dl = \oint_{\Delta l} (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \\ &= \oiint_{\Delta S} \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) dy dz \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) dx dy \right] = \end{aligned}$$

$$= \oint_{\Delta S} \left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right] dS,$$

再由中值定理可得

$$\begin{aligned} \mu_n = & \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos(n, x) \\ & + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos(n, y) \\ & + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos(n, z). \end{aligned} \quad (1-10)$$

如果取 n 方向与矢量

$$\begin{aligned} \omega = & \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_2}{\partial x} \right) j \\ & + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) k \end{aligned} \quad (1-11)$$

的方向一致, 那么环量密度 μ_n 最大, 即

$$\mu_n = |\omega|, \quad (1-12)$$

那么我们定义矢量 ω 为矢量场 A 的旋度, 记作,

$$\operatorname{rot} A = \omega, \quad (1-13)$$

可以写作

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

四、几种重要矢量场

1. 有势场

式 (1-5), 对于给定的标量场 u , 定义该标量场的梯度 $G = \operatorname{grad} u$ 。反过来, 如果给定一个矢量场 A , 是否存在一个单值函数

u , 使得 $\text{grad}u = \mathbf{A}$? 如果这个函数存在, 那么我们称矢量场 $\mathbf{A}$ 为有势场; 令 $v = -u$, 称 v 为矢量场 $\mathbf{A}$ 的势函数, 即

$$\mathbf{A} = -\text{grad}v. \quad (1-14)$$

从上式可以看到, 如果 $\mathbf{A}$ 是有势场, 则有势场是一个梯度场, 且有无穷多个势函数, 这些势函数仅差一个常数 c 。并由梯度运算法则

$$-\text{grad}(v+c) = -\text{grad}v = \mathbf{A}.$$

由式(1-14)得

$$\mathbf{A} = -\frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial v}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{k}.$$

又由式(1-13)式可知, $\text{rot} \mathbf{A} = 0$, 即有势场的旋度必然为零。又因场所在的区域是单连的, 则由斯托克斯公式可知, 矢量 $\mathbf{A}$ 对于场中一条封闭曲线上环量有

$$\begin{aligned} \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_L (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \\ &= \oiint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \end{aligned}$$

即在场中任何封闭曲线上的环量为零。且其线积分与路径无关。取曲线 $A(0, 0, 0) \rightarrow B(x, 0, 0) \rightarrow C(x, y, 0) \rightarrow D(x, y, z)$, 并进行积分

$$\begin{aligned} u &= \int_{ABCD} (A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz) \\ &= \int_{ABCD} A_1 dx + \int_{ABCD} A_2 dy + \int_{ABCD} A_3 dz \\ &= \int_0^x A_1(x, 0, 0) dx + \int_0^y A_2(x, y, 0) dy \\ &\quad + \int_0^z A_3(x, y, z) dz. \end{aligned} \quad (1-15)$$

令 $v = -u$, 则 v 就是 $\mathbf{A}$ 的一个势函数。由此可见, 有势场无旋, 或者说无旋场就是有势场。其线积分与路径无关, 它是一个保守场。

2. 管形场

设有矢量场 ω , 若存在矢函数 A , 并满足 $\text{rot} A = \omega$, 那么矢量 ω 的散度为

$$\text{div} \omega = \text{div}(\text{rot} A) = 0.$$

我们称矢量场 ω 是一个管形场。即管形场的散度为零。反过来, 如果一个矢量场的散度为零, 即

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} = 0.$$

令

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3} \int \omega_2(x, y, z) dz - \frac{1}{3} \int \omega_3(x, y, z) dy \\ A_2 &= \frac{1}{3} \int \omega_3(x, y, z) dx - \frac{1}{3} \int \omega_1(x, y, z) dz \\ A_3 &= \frac{1}{3} \int \omega_1(x, y, z) dy - \frac{1}{3} \int \omega_2(x, y, z) dx \end{aligned} \right\}, \quad (1-16)$$

有

$$\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dz - \frac{1}{3} \omega_3, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{1}{3} \omega_2 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dy,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{1}{3} \omega_3 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dz, \quad \frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dx - \frac{1}{3} \omega_1,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dy - \frac{1}{3} \omega_2, \quad \frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{1}{3} \omega_1 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dx,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{1}{3} \omega_3 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dz - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dz + \frac{1}{3} \omega_3$$

$$= \frac{2}{3} \omega_3 - \frac{1}{3} \int \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \omega_2}{\partial y} \right) dz$$

$$= \frac{2}{3} \omega_3 + \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dz = \omega_3,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = \frac{1}{3} \omega_2 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dy - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dy + \frac{1}{3} \omega_2$$

$$= \frac{2}{3} \omega_2 + \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dy = \omega_2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} &= \frac{1}{3} \omega_1 - \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dx \\
&- \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dx + \frac{1}{3} \omega_1 = \frac{2}{3} \omega_1 - \frac{1}{3} \int \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_3}{\partial z} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} \omega_1 + \frac{1}{3} \int \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dx = \frac{2}{3} \omega_1 + \frac{1}{3} \omega_1 = \omega_1.
\end{aligned}$$

因此就有

$$\text{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}.$$

从式(1-16)可以看到,对于给定 $\boldsymbol{\omega}$, 如果它的散度为零, 就存在无穷多个矢函数 $\mathbf{A}$, 并满足

$$\text{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}.$$

在式(1-16)的不定积分中, A_1 可加任意函数 $f_1(x)$, A_2 可加任意函数 $f_2(y)$, A_3 可加任意函数 $f_3(z)$ 。

如果一个矢量场散度为零, 在场中任取一个矢量管, 设 S_1 和 S_2 为矢量管任意两横截面, S_3 为侧面, 如图 1-2 所示。因为散度

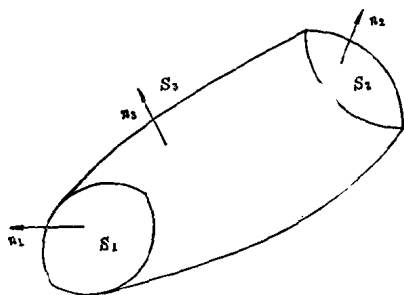


图 1-2 管形场

为零, 所以通过任意曲面的通量为零。又因为此曲面是矢量管, 那么通过 S_3 的通量为零。因此, 通过 S_1 的通量等于通过 S_2 的通量。所以, 散度为零的场称为管形场。

3. 调和场

如果矢量场 $\mathbf{A}$ 的散度和旋度都为零, 则称矢量场 $\mathbf{A}$ 为调和场。

根据 $\text{rot} \mathbf{A} = 0$, 必然存在势函数 u , 并有

$$\mathbf{A} = -\text{grad} u,$$

又因为 $\mathbf{A}$ 的散度为零, 则有

$$\text{div} \mathbf{A} = \text{div}(-\text{grad} u) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0.$$

上式可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

这是一个二阶偏微分方程, 称作拉普拉斯(laplace)方程。所以调和场的势函数满足拉普拉斯方程。称势函数 u 为调和函数, 无旋不可压流场是调和场。因此散度和旋度均为零的场为调和场。

对于二维问题

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j},$$

如果 $\mathbf{A}$ 是一个无源, 无旋的矢量场, 即

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{A} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \mathbf{k} = 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0, \quad (1-17)$$

由

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0, \\ \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (1-18)$$

由(1-17)式

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y}.$$

由(1-18)式

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial x \partial y} = 0,$$

所以有

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (1-19)$$

由(1-18)式, $\mathbf{A}$ 的散度为零, 必有势函数 v , 且

$$\mathbf{A} = -\operatorname{grad} v,$$

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{\partial v}{\partial x}, \\ A_2 = -\frac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \quad (1-20)$$

如果我们引入矢量场

$$\mathbf{B} = B_1 \mathbf{i} + B_2 \mathbf{j} = -A_2 \mathbf{i} + A_1 \mathbf{j},$$

那么

$$\frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} = 0.$$

所以 $\mathbf{B}$ 也是无旋场, 因此存在势函数 u 使

$$\mathbf{B} = -\text{grad} u.$$

于是便有

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -A_2 = -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ B_2 &= A_1 = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1-21)$$

由(1-20)式和(1-21)式可得

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \\ A_2 &= -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{aligned} \right\}, \quad (1-22)$$

由(1-22)式可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \end{cases}$$

从上式可以看出 u 和 v 均满足二维拉普拉斯方程, 且因为它们是由(1-22)式联系起来, 因此称 u 和 v 为共轭调和函数。

在流体力学中取 $\phi = -u$, $\psi = -v$, 则称 ϕ 为速度势或速度位, ψ 称为流函数。