现代数学丛书

极限环论

叶彦谦等 著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

极限环论

叶彦谦 等著

上海科学技术出版社

现代数学丛书

极 限 环 论

叶彦谦 等著

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 14.25　字数 351,000
1965 年 9 月第 1 版
1984 年 2 月第 2 版　1984 年 2 月第 2 次印刷
印数 2,001—11,300

统一书号：13119·652　　定价：(科五)2.10 元

内 容 提 要

本书是现代数学丛书的一种。初版于1965年出版，现在是第二版，内容大为充实，补充了这二十年来国内的大量成果，也介绍了国外一些好的新成就。

全书共18节，大致可分为三部分。§1—8是第一部分，讨论一般的平面定常系统的极限环，包括其存在性，不存在性，稳定性，唯一性等。§9—17为第二部分，讨论二次系统的极限环和轨线的全局拓扑结构。第三部分是§18，其中收集了不能列入前面各节的重要结果和一些最近的新成果。本书可供高等学校数学系、物理系高年级学生、研究生以及科研人员参考。

Theory of Limit Cycles

Abstract

Limit cycles of plane autonomous differential systems appear in the very famous classical paper "Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle" of H. Poincaré (1881~1886). In the 1930's, van der Pol and A. A. Андронов showed that the closed orbit in the phase plane of a self-sustained oscillation occuring in a vacuum tube circuit is a limit cycle as considered by Poincaré. After this observation, the existence, non-existence, uniqueness and other properties of limit cycles have been studied extensively by mathematicians and physicists. Then, from the 1950's, very many mathematical models from physics, engineering, chemistry, biology, economics, etc., were displayed as plane autonomous systems with limit cycles. Also, due to the well-known paper of И. Г. Петровский and Е. М. Ландис, which concerned with the maximum number of limit cycles of all quadratic differential systems (the second part of Hilbert's 16-th problem), the problem of limit cycles has become more and more important and has attracted the attention of many pure and applied mathematicians.

The purpose of this book is to bring together in one place most of the main contributions in the theory of limit cycles. Aside from the introduction (a brief historical review), it divides into three parts. § § 1-8 are concerned with limit cycles of the general plane autonomous systems, § § 9-17 with limit cycles and the global topological structure of phase-portraits

of quadratic systems. At the end of every section, a large number of reference papers are listed. The last part § 18 has the character of an appendix, in which we mention briefly results that either can not be included under the title of the foregoing sections, or have appeared in periodicals very recently. We assume that the readers have a basic knowledge of the qualitative and stability theory of ODE.

Here are the main contents of each section in the first two parts. § 1 gives fundamental concepts and examples of limit cycles, and also some criteria for the existence and non-existence of limit cycles, including well-known ones as well as some new ones. § 2 gives criteria for the determination of the stability and multiplicity of limit cycles. Aside from the classical ones, we introduce also results of В. Ф. Ткачев and M. Urabe. § 3 deals with the theory of rotated vector fields due to G. F. D. Duff and also many of its extensions and applications by X. Y. Chen and Z. E. Ma. We will use this theory very often in the second part. § 4 is concerned with the variation of limit cycles with the varying of a parameter in the general case, the main contents are the classical formula of H. Poincaré and contributions of M. Urabe and X. Y. Chen. § 5 discusses the question of the existence of limit cycles. Aside from the well-known theorems of А. Ф. Филиппов and А. В. Драгилёв. we present here also contributions of K. Z. Hwang, Z. J. Wu and X. W. Zheng. This section is divided into six paragraphs according to the methods of proof. § 6 is concerned with the problem of uniqueness of limit cycles. It also divides into seven paragraphs, in which we introduce methods of point-transformation,

H. Poincaré, A. A. Андронов and E. A. Леонтович, and also results of G. Sansone, J. L. Massera, Z. F. Zhang, Л. А. Черкас and Г. С. Рычков. § 7 deals with the problem of the existence of any given number of limit cycles. The main results almost all belong to Chinese mathematicians, among which the contribution of Z. F. Zhang is most excellent, which solves completely the question of the number and position of limit cycles of the equation $\ddot{x}+\mu\sin\dot{x}+x=0$. § 8 is a short introduction to the well-known necessary and sufficient conditions for the structural stability of a plane autonomous system in a bounded domain, which we will use in the second part. It contains also some new results of G. T. dos Santos and D. J. Luo about polynomial systems. § 9 deals with classical results of H. Dulac and M. Frommer on the necessary and sufficient conditions for a quadratic differential system to have a center, and presents the corresponding phase-portraits due to Frommer. In this section we also give a detailed proof of an important result of H. H. Баутин concerning the maximum order of fineness of a focus of any quadratic system and the maximum number of limit cycles that can be generated from this focus. In § 10, we analyse the global topological structure of phase-portraits of three types of quadratic systems without limit cycle, namely, the homogeneous systems (results of Л. С. Лягина, L. Markus, etc.), the system $\dot{x}=x+h.\ o.\ t.$, $\dot{y}=y+h.\ o.\ t.$ (result of A. H. Берленский), and at last, the structurally stable quadratic systems without limit cycle (results of G. T. dos Santos and S. L. Zai). § 11 deals with general properties and possible relative positions of limit cycles of quadratic systems, among which results of Y. Q.

Ye, C. C. Tung, Y. S. Chin, M. S. Wang and S. L. Shi are presented. § 12 introduces the classification of quadratic systems due to Y. Q. Ye, and proves a theorem on the existence, non-existence and uniqueness of limit cycles of systems of Type I, due to Y. Q. Ye, Y. H. Deng, D. J. Luo, L. S. Chen and X. A. Yang. § 13 investigates the global topological structure of phase-portraits of a special system of Type II, which contains two parameters a and m and has no limit cycle. We obtain global bifurcation curves in the (a, m) projective plane. § 14 is concerned with the relative position (especially coexistence), uniqueness and the number of limit cycles of systems of Type II containing only two second degree terms in the first equation. These results are due mainly to M. S. Wang, K. T. Lee, S. X. Yu, N. D. Zhu, K. C. Chen, Л. И. Жилевич and Л. А. Черкас. § 15 discusses various interesting global properties of systems of Type III; especially, we give the detailed proof of a theorem (concerning system $\mathrm{III}_{a=0}$) similar to that in § 12, which was conjectured and partly proved by N. D. Zhu, and later completely proved by Л. А. Черкас, Л. И. Жилевич and Г. С. Рычков. § 16 discusses the Dulac function method used frequently by Chinese mathematicians in their research works on the qualitative investigation of quadratic systems, and use this method to prove an interesting theorem of L. S. Chen and M. S. Wang, concerning the nesting of limit cycles surrounding just one focus. § 17 introduces X. A. Yang's results on the uniqueness or non-existence of limit cycles of bounded quadratic systems. These systems were first studied by R. J. Dickson and L. M. Perko, but the limit cycle problem remained open in their papers.

再版序言

本书初版完成于1964年上半年,距今已整整十八年了. 在这十八年中不论是国内还是国外,关于极限环理论,特别是二次微分系统的极限环理论,已经有了很大的发展,新的成果不断涌现. 有的过去认为是对的,现在发现是错了;有的过去认为是重要的成果,现在发现似乎没有什么发展前途. 尤其值得一提的是:由于生物,化学等学科的推动,使我们感到研究极限环,特别是多项式系统的极限环理论的重要性正在与日俱增. 就国内来说,二十多年来在这方面做出较好的成果的中青年同志少说也有十人以上. 就国外来说,除了苏联数学家对这方面有传统的兴趣和许多好的贡献以外,现在美法等国对二次系统的极限环理论发生兴趣的人也愈来愈多了. 基于以上这些原因,本书的彻底修改和再版发行就成为刻不容缓的了.

由于作者本人时间较紧,同时也希望集思广益,使再版能写得比较好一些,这一次除将第一版§7,§9和§10的后半部删去,并由我对新版作全面安排,集中修改和统一符号以外;对于其他章节,则除了我自己以外,另外又委托一些同志协助我做修改补充工作. 按新版的目次来说,其他八位同志具体分工如下:汪儿年补充§1与§6各一部分,马知恩补充§3,黄克成补充§5,加写§7,罗定军改写§8及补充§9前半部,蔡燧林加写§10,王明淑补充§11,加写§15,杨信安补充§12,加写§17,陈兰荪补充§14后面三分之二,加写§16.

虽然在最后定稿时对他们的初稿有的改动得少些,有的改动得多些,但他们都各就自己所擅长的方面,花了时间和心血,使本

书再版能对极限环理论的现状反映得比较完备，这显然是我一个人的能力所无法做到的，故在此对以上八位同志表示衷心的谢意.

当然，由于我们的时间和能力的限制，新版仍可能会出现错误或重要的遗漏，请读者不吝指教为感.

叶彦谦

南京大学数学系

一九八二年八月

目　　录

绪 论

在微分方程定性理论中，关于极限环的研究是一个既有趣而又困难的部分. 自从 H. Poincaré 在他的论文《微分方程所定义的积分曲线》(1881—1886) [1] 中发现极限环以后，它立刻就受到这位著名数学家的特别重视. 为了决定一个已给的方程是否存在极限环，以及研究极限环的性质，他首先提出了地形系法，后继函数法，小参数法(最先见于《天体力学中的新方法》一书)和环域定理等重要的理论，并且人为地造出许多例子来检验这些方法的效果. 与此同时他也已经注意到研究极限环与解决微分方程积分曲线族的全局结构问题之间的密切关系了. 1901 年瑞典数学家 I. Bendixson 亦以与前同样的题目发表了一篇重要的论文[2]，在这篇文章里他把环域定理的证明严格化，并且加以推广，成为大家所熟知的、关于平面有界区域中动力系统的轨线的极限集的 Poincaré-Bendixson 理论. 此外，他又首先应用 Green 公式，在平面向量场的闭轨线与发散量之间建立了联系，得到一个确定闭轨线不存在的定理. 这种联系后来被人们不断地发展和加深，得到发散量沿闭轨线积分一周的数值与其稳定性之间的关系，发散量在鞍点的值与过鞍点的奇闭轨线的内侧稳定性之间的关系，等等.

与 Bendixson 论文发表的同一年，著名数学家 D. Hilbert 在国际数学会上提出了一系列的数学难题[3]，其中第十六个问题的后面一半是：方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q_n(x,\ y)}{P_n(x,\ y)} \tag{1}$$

(P_n 与 Q_n 是次数不高于 n 的实系数多项式，x, y 是实变量) 最多

有几个极限环？它们的相对位置如何？说也奇怪，数学家们对 Hilbert 的其他问题兴趣都很大，钻研的人很多，但是对这个问题问津的人却不多[1]. 据我们所知，在二十世纪的前三十年中，研究此问题较有成绩的只有法国数学家 H. Dulac.他在 1923 年发表了一篇长达 140 页的论文[4]，证明方程(1)的极限环的个数是有限的. 此外，他还研究了当 $n=2$ 时方程(1)存在中心点的充要条件([5])，看来他已感到这两个问题之间是有密切联系的了. Dulac 在极限环理论方面还有一些其他的基本结果，读者在§1就可看到. 稍后，德国数学家 M. Frommer 于 1934 年亦以方程(1)的中心点的充要条件($n=2$)为题发表了一篇论文[6]，并画出有中心点时方程的轨线全图；同时他还指出，方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+(1+\varepsilon)x^2+2xy-y^2}{-y+2xy-y^2} \tag{2}$$

当 $\varepsilon>0$ 足够小时存在极限环. 实际上，以后读者可以看到，对于非线性方程而言，极限环不但是它所特有的，并且也是极为常见的一种轨线.

数学理论的发展方向常是以生产实际中的问题为引导的，对于微分方程这个学科来说，情况尤其是如此. 实际问题给予研究极限环理论的推动力远远胜过大数学家的号召. 事情是这样：自从二十世纪以来，应用无线电子学有了迅速的发展；物理学家发明了可以产生稳定的自激等幅振荡的三极电子管，从而使声音与图象的无线电传播有了可能. 但是要描写这种振荡现象却不是线性微分方程所能办到的. 1926 年 van der Pol[7] 首先得到了以他的名字命名的、描写三极电子管中等幅振荡的方程：

$$\ddot{x}+\mu(x^2-1)\dot{x}+x=0 \quad (\mu\neq 0). \tag{3}$$

在化为相平面上的等价方程组以后，他用图解法证明了孤立闭轨线的存在性，并且又用当时在理论上还没有严格数学基础的平均

1) 五十年代以后情况有所改变，近年来有兴趣的人更多了。

法(van der Pol 方法)得到当$|\mu|$很小时闭轨线的近似方程. 显然,他是不熟悉 Poincaré 与 Dulac 等关于极限环的工作的. 三年以后,苏联理论物理学家 A. A. Андронов 发表了一篇简短的论文[8],阐明 van der Pol 方程的孤立闭轨线就是 Poincaré 所早已研究过的极限环. 这样一来,他就把纯粹数学理论和无线电技术密切联系起来了. 自此以后,苏联的莫斯科学派和高尔基城学派就开始对无线电技术与极限环理论开展了大量的研究工作. 就数学理论方面来说,他们主要是研究极限环的存在性,唯一性,稳定性以及如何产生,如何消失的问题. 他们大部分较重要而基本的工作可以在 A. A. Андронов, A. A. Витт 和 C. Э. Хайкин 合著的《振动理论》一书中找到. 尽管非线性振动方程除了不显含时间变数的定常系统(或自治系统)以外,还有含时间变数的非定常系统,但是 Андронов 等的著作所研究的方程则全部属于定常系统. 因此我们可以说,这是一本专门研究极限环的数学理论及其在物理学上的应用的书,自然,它的重点是在应用方面.

至于其他国家,在 van der Pol 以后对于极限环理论的研究,除了法国工程师 A. Liénard, 几何学家 É. Cartan 与 H. Cartan 的少数工作出现得较早以外[9,10],一般都在 1940 年以后. 其中工作较有成绩的如 N. Levinson, G. F. D. Duff, S. P. Diliberto, G. Sansone, R. Conti, M. Urabe, 等等.

就我国来说,我们自 1957 年开始(见 [11, 12], [13], [14], [15], [16], [17], [18])已对于右方为二次多项式的方程的极限环问题进行了深入而有系统的研究(在这以前的数年里,国内学者对于极限环的存在性,稳定性,唯一性等方面已有了一些工作). 研究的主要问题大致有三个:

1. 方程(1)当 $n=2$ 时的极限环的相对位置.
2. 方程(1)当 $n=2$, 3 时的二次代数曲线环.
3. 研究已给的方程(1) ($n=2$)的极限环的个数与轨线的全局

结构.

前两个问题原来认为已经彻底解决，但由于Петровский与Ландис的猜想已被证明是错误的[19,20]，从而第一个问题距离彻底解决还相差很远．后一问题尚在继续进行中．至于在国外，除了Н. Н. Баутин 1952年的著名的工作[21]以外，我们发现自从1960年以后苏联白俄罗斯国立大学有一个讨论班也在对上述第三个问题进行研究，迄今已发表论文数十篇.

纵观国际上现有一切关于极限环的研究成果和学术动向，我们的看法是：虽然在微分方程定性理论中极限环问题具有头等的重要性，但微分方程工作者对它的重视程度还是不够的．这表现在：迄今为止还未有过一本关于极限环的纯数学理论的专著，甚至以此为主题的综合性报告在国外文献中也未见到过，在国内也只有作者1962年写过一篇[22]．另一方面，工程学界和物理学界对此问题虽然仍颇感兴趣，但却未得到数学家的大力支持(近年的情况有所改善)．已有的结果也嫌零碎而少系统.

本书的目的就是要想总结过去数十年来国内外有关极限环理论的重要成果，把它介绍给初学的人，同时亦兼顾这一理论与定性理论其他方面的联系.

本书除在正文中详细讲述较重要而基本的东西以外，还在每一节最后附带简要地介绍一些较次要或较深入的结果；并且配备适量的习题，以便初学者能更好地掌握该节的内容和方法.

§1. 基本概念，具体例子，判别极限环存在与不存在的若干准则

已给微分方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y),\tag{1·1}$$

其中 $x,\ y,\ t$ 为实变量，P, Q 为 $x,\ y$ 的连续单值实函数，且能保证解的唯一性.

定义 1·1 若方程(1·1)的解 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 是 t 的非常数的周期函数，则称此解在$(x,\ y)$相平面上的轨迹为(1·1)的闭轨线. 由若干奇点以及两端进入奇点的轨线所构成的单闭曲线称为方程(1·1)的奇闭轨线.

定义 1·2 如果在方程(1·1)的闭轨线 Γ 的任意小的外(内)邻域中都存在非闭轨线，则称 Γ 为外侧(内侧)极限环.

定义 1·3 如果 Γ 是(1·1)的闭轨线，且存在 Γ 的一个外(内)邻域，它全部由闭轨线所充满，则称 Γ 为外(内)侧周期环.

注意：奇闭轨线也可能满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求，但不称为极限环或周期环. 在 §3 中将要遇到的分界线环就是一种奇闭轨线，它的内侧可以满足定义 1·2 或定义 1·3 的要求.

根据 Poincaré-Beudixson 理论知道成立下面几条定理（定理 1·1～1·6)，证明从略.

定理 1·1 若 Γ 是(1·1)的闭轨线，则存在 Γ 的足够小的邻域 U，使得

1° U 中不含奇点；

2° 过 Γ 上任何一点 P 的法线段，其位于 U 内部且包含点 P