力学基础习题选解

北京师范大学物理系力学组

北京师范大学出版社

力学基础习题选解

北京师范大学物理系力学组　编

北京师范大学出版社

内容简介

本书是《力学基础》（漆安慎、杜婵英编，人民教育出版社1982年第一版）一书中较典型或难度较大的习题的解答．每题的解答，力求思路清晰、逻辑严密，以期给学习力学的学生以帮助。

力学基础习题选解

北京师范大学物理系
力学组编

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
天津黎明印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5.875 字数：123千
1985年6月第1版 1985年6月第1次印刷
印数：1—41,500
统一书号：13243·79 定价：1.10元

前　言

本书是《力学基础》（漆安慎、杜婵英编，人民教育出版社1982年第一版）一书中部分习题——较典型或难度较大的习题的解答（为方便读者，保持了原题序号）．这个解答按照我们的教学要求，力求作到思路清晰，逻辑严密，解答详细，以期给学习普通物理力学的大学生和自学青年以帮助，供使用《力学基础》一书的读者作参考．

本书由下列同志编写：第一、四章由胡静同志负责；第二章由孙志铭同志负责；第三、九、十章由焦梦周同志负责；第五、七、八章由管靖同志负责；第六章由左宏劭同志负责．全书由漆安慎副教授负责审订．

对本书的不妥和疏漏之处，恳请读者提出批评与指正。

编　者

一九八四年六月

目　　录

第一章　质点运动学

1.3.2　质点运动学方程为$\boldsymbol{r}=e^{-2t}\boldsymbol{i}+e^{2t}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.（1）求质点轨迹；（2）求自$t=-1$至$t=1$质点的位移.

解：（1）由运动学方程$\boldsymbol{r}=e^{-2t}\boldsymbol{i}+e^{2t}\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，得运动学方程：

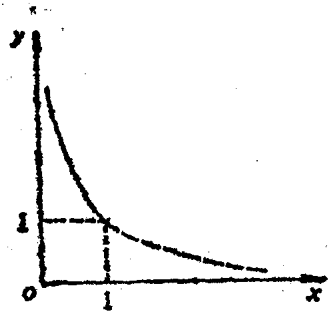

图 1.3.2

$$\begin{cases} x=e^{-2t} \\ y=e^{2t} \\ z=2 \end{cases}$$

$\because\quad xy=e^{-2t}\cdot e^{2t}=1$

$\therefore$ 质点的轨迹方程为$xy=1$。

轨迹是$z=2$的与oxy平面平行的平面上的一条双曲线.由于x、y均为正数，所以轨迹图象在第一象限.

又$\because t=0$时，$x=1$；$y=1$。

$t>0$时，$x<1$；$y>1$.

$\therefore$自计时起点始，质点的轨迹图象为1.3.2图中的实线。

（2）自$t=-1$至$t=1$质点的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}|_{t=1}-\boldsymbol{r}|_{t=-1}$$
$$=(e^{-2}-e^{2})\boldsymbol{i}+(e^{2}-e^{-2})\boldsymbol{j}$$
$$=-7.2537\boldsymbol{i}+7.2537\boldsymbol{j}$$

即　$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(-7.2537)^2+(7.2537)^2}=10.2583.$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \alpha = 135^\circ; \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, & \beta = 45^\circ; \\ \cos\gamma = 0, & \gamma = 90^\circ. \end{cases}$$

1.4.2 一小圆柱体沿抛物线轨道运动，抛物线轨道为 $y=x^2/200$（长度：毫米）。第一次观察到圆柱体在 $x=249\text{mm}$ 处，经过时间 2 ms后圆柱体移到 $x=234\text{mm}$ 处.求圆柱体瞬时速度的近似值。

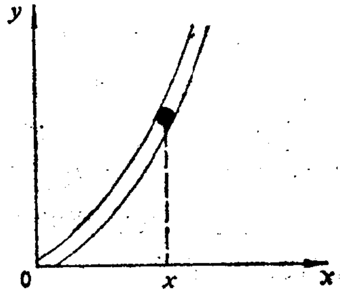

图 1.4.2

解：视圆柱体为质点，

设第一次观察到圆柱体的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j},$$

经过时间 2 ms，第二次观察到圆柱体的位置矢量为

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$$

则圆柱体在该时间内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} - (y_2 - y_1)\boldsymbol{j}$$

$$= \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$$

根据题意 $\Delta x = 234 - 249 = -15$

$$\Delta y = \frac{1}{200}(x_2{}^2 - x_1{}^2)$$

$$= \frac{1}{200}(234^2 - 249^2) \doteq -36.2$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v} \doteq \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}$$

$$= -7.5\boldsymbol{i} - 18.1\boldsymbol{j}$$

即 $$v \doteq \sqrt{(-7.5)^2 + (-18.1)^2}$$

$$\doteq 19.6(\mathrm{mm/ms})$$

$$\cos\alpha \doteq \frac{v_x}{v} = \frac{-7.5}{19.6} = -0.3826$$

$$\alpha \doteq -112.5^\circ$$

1.4.5 （1）$\boldsymbol{r} = R\cos t\boldsymbol{i} + R\sin t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$，$R$为正常数；求$t=0$，$\frac{\pi}{2}$时的速度和加速度。（2）$\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} - 4.5t^2\boldsymbol{j} + 6t^3\boldsymbol{k}$，求$t=0$，1时的速度和加速度（写出正交分解式）。

解：（1）∵ $\boldsymbol{r} = R\cos t\boldsymbol{i} + R\sin t\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$

$$\therefore \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -R\sin t\boldsymbol{i} + R\cos t\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -R\cos t\boldsymbol{i} - R\sin t\boldsymbol{j}$$

当$t=0$时，$\boldsymbol{v} = R\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$；

$$\boldsymbol{a} = -R\boldsymbol{i}.$$

当$t=\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{v} = -R\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}$；

$$\boldsymbol{a} = -R\boldsymbol{j}.$$

（2） ∵$\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} - 4.5t^2\boldsymbol{j} + 6t^3\boldsymbol{k}$

$$\therefore \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 9t\boldsymbol{j} + 18t^2\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{a} = -9\boldsymbol{j} + 36t\boldsymbol{k}$$

当$t=0$时，$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i}$；

$$\boldsymbol{a} = -9\boldsymbol{j}.$$

当$t=1$时，$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$；

$$\boldsymbol{a} = -9\boldsymbol{j} + 36\boldsymbol{k}.$$

1.5.1 图中a、b和c表示质点沿直线运动三种不同情况下的x-t图，试说明三种运动的特点（即速度，计时起点时质点的位置坐标，位于坐标原点的时刻）.

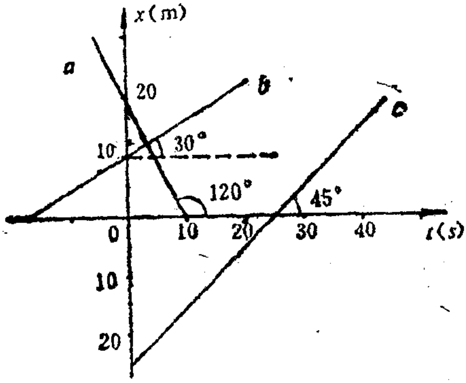

图 1.5.1

解：因为三种运动的x-t图均为直线，所以三种运动均为匀速直线运动.

对直线a：$v_{ax}=\text{tg}\,120°=-1.732$（m/s），说明质点以大小为1.732m/s的速度向x减小的方向运动.

$t=0$ 时，

$x_0=20$（m）

$x=0$ 时，$t=\dfrac{20}{\text{tg}60°}\doteq 11.5$（s）.

对直线b：$v_{bx}=\text{tg}30°=0.577$（m/s），说明质点以大小为0.577m/s的速度向x增加的方向运动.

$t=0$ 时，$x_0=10$（m）.

$x=0$ 时，$t=-\dfrac{10}{\text{tg}30°}=-17.32$(s)，负号说明在计时起点前17.32(s)，质点处在$x=0$的位置.

对直线c：$v_{cx}=\text{tg}45°=1$（m/s），说明质点以大小为 1 m/s的速度向x增加的方向运动.

$t=0$ 时，$x_0=-25$（m），

$x=0$ 时，$t=25$（s）.

1.5.5 在水平桌面上放置A、B两物体，用一根不可伸长的绳索按图示的装置把它们联结起来．C点与桌面固定．已知物体A的加速度$a_A=0.5g$．求物体B的加速度．

解：以C为原点，建立一维坐标系C-x，如1.5.5图所示。

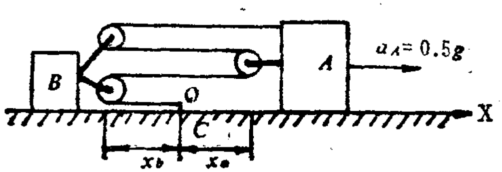

图 1.5.5

$\because \quad 3x_A-4x_B=l=$常量

将上式左右两端对时间求二阶导数，得

$$3a_{Ax}-4a_{Bx}=0$$

a_{Ax}为物体A的加速度在x轴上的投影，a_{Bx}为物体B的加速度在x轴上的投影．

根据题意，$a_{Ax}=a_A=0.5g$

$\therefore \quad a_{Bx}=\dfrac{3}{4}a_A=\dfrac{3}{8}g$

又$\because \quad a_B=a_{Bx}$

$\therefore$物体B的加速度为

$$a_B=\frac{3}{8}g\boldsymbol{i}$$

即大小为$\dfrac{3}{8}g$，方向沿ox轴的正方向．

1.6.1 质点沿直线的运动学方程是 $x=10t+3t^2$．

（1）将坐标原点沿ox轴正方向移动2米，运动学方程如何？初速度有无变化？

（2）将计时起点前移1秒，运动学方程如何？初始坐标和初速度都发生怎样的变化？加速度变不变？

解：（1）将坐标原点沿ox轴正方向移动2米，即

$$x' = x - 2$$

$$x = x' + 2$$

则运动学方程为 $$x' + 2 = 10t + 3t^2$$

即 $$x' = 3t^2 + 10t - 2$$

$$\because \quad \frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

∴初速度不变.

（2 将计时起点前移1秒，即

$$t' = t + 1$$

$$t = t' - 1$$

则运动学方程为 $$x = 10(t' - 1) + 3(t' - 1)^2$$

即 $$x = 3t'^2 + 4t' - 7$$

$$v_x = 6t' + 4, \quad a_x = 6$$

由上两式可知，将计时起点前移1秒，初始坐标由$x_0 = 0$变为$x_0 = -7$ m，初速度由$v_0 = 10$m/s变为$v_0 = 4$ m/s；加速度不变.

1.6.2 质点由坐标原点出发时开始计时，沿x轴运动，其加速度$a_x = 2t$(cm/s²)．求在下列情况下质点的运动学方程、出发后6(s)时质点的位置、在此期间所走过的位移及路程：

（1）初速度$v_0 = 0$；

（2）初速度v_0的大小为 9 cm/s，方向与加速度 方 向相反。

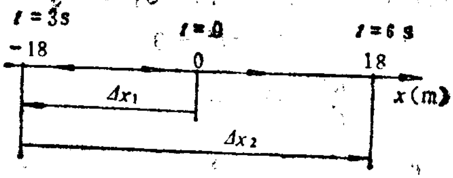

图 1.6.2

解：（1）∵ $$a_x=\frac{dv_x}{dt}=2t$$

又知初速度 $$v_0=0$$

由 $$\int_{v_0=0}^{v_x}dv_x=\int_0^t 2tdt$$

得 $$v_x=t^2,\qquad 即\frac{dx}{dt}=t^2.$$

又知$t=0$时，$x=0$．由 $$\int_0^x dx=\int_0^t t^2dt,$$

得到质点的运动学方程 $$x=\frac{t^3}{3}.$$

由运动学方程得出：

质点出发后 6 (s)时的位置为 $x=\frac{6^3}{3}=72$(cm)；在此期间质点的位移$\Delta x=x|_{t=6}-x|_{t=0}=72$(cm)；质点走过的路程$\Delta l=72$(cm)．

（2）∵ $$a_x=\frac{dv_x}{dt}=2t$$

$$\therefore \quad v_x = \int 2t\,dt = t^2 + C_1$$

又∵ $t = 0$ 时，$v_0 = -9$ $\quad\therefore\quad C_1 = -9$

得 $$v_x = t^2 - 9$$

即 $$\frac{dx}{dt} = t^2 - 9$$

$$x = \int (t^2 - 9)\,dt = \frac{t^3}{3} - 9t + C_2$$

又∵ $t = 0$ 时，$x = 0$，$\quad\therefore\quad C_2 = 0$.

故质点的运动学方程为 $\quad x = \dfrac{t^3}{3} - 9t$.

由上可知，质点出发后 6 (s)时的位置

$$x\big|_{t=6} = \frac{6^3}{3} - 9 \times 6 = 18(\text{cm})$$

在 6 (s)内质点的位移$\Delta x = x\big|_{t=6} - x\big|_{t=0} = 18(\text{cm})$.

在 6 (s)内质点所走过的路程计算如下：

由$v_x = t^2 - 9$ 可知：在$0 < t < 3$ (s)期间，$v_x < 0$，质点沿x轴的负方向运动，当$t = 3$ (s)时，$v_x = 0$；在3 (s)$< t \leqslant 6$ (s) 期间，$v_x > 0$，质点沿x轴的正方向运动.（见1.6.2图）

根据质点的运动学方程，前3秒内质点位移$\Delta x_1 = -18$ (cm)，所走过的路程为18 (cm).后3秒内质点的位移$\Delta x_2 = x\big|_{t=6} - x\big|_{t=3} = 36(\text{cm})$，所走过的路程为36(cm).由此求得质点在6(s)内走过的路程$\Delta l = 18 + 36 = 54(\text{cm})$.

1.7.1 在195(m)长的坡道上，一质点以18(km/h)的速度和-20 (cm/s^2)的加速度上坡，另一质点同时以5.4 (km/h)的初速度和0.2(m/s^2)的加速度下坡.问：(1)经过多长时间两质点相遇；(2)两质点相遇时，各走过多少

路程.

解:设上坡的质点为质点1,下坡的质点为质点2.

建立一维坐标系O-x,原点为质点1的起始位置,x轴正方向沿坡道向上.计时起点为两质点运动的起始时刻.

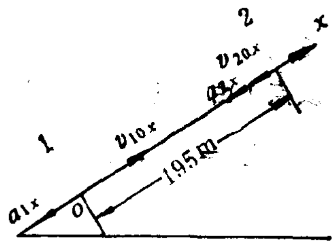

图 1.7.1

已知两质点运动的初始条件:

对质点1: $v_{10x}=18(\mathrm{km/h})=5(\mathrm{m/s})$; $x_{10}=0$.

对质点2: $v_{20x}=-5.4(\mathrm{km/h})=-1.5(\mathrm{m/s})$,

$x_{20}=195(\mathrm{m})$.

(1)假设经过时间t两质点相遇.相遇时,必定$x_1=x_2$,即

$$v_{10x}t+\frac{1}{2}a_{1x}t^2=x_{20}+v_{20x}t+\frac{1}{2}a_{2x}t^2$$

已知 $a_{1x}=-0.2(\mathrm{m/s^2})$, $a_{2x}=-0.2(\mathrm{m/s^2})$,

$$\therefore \qquad t=\frac{x_{20}}{v_{10x}-v_{20x}}=\frac{195}{5+1.5}=30(\mathrm{s}).$$

即经过30秒,两质点相遇.

(2)先求出质点1从出发到与质点2相遇期间走过的路程.

质点1到达最高点时,速度为零,即$\frac{dx_1}{dt}=0$.根据公式

$$\frac{dx_1}{dt}=v_{10x}+a_{1x}t$$

可以得到质点1到达最高点的时间是

$$t=-\frac{v_{10x}}{a_{1x}}=-\frac{5}{-0.2}=25(\mathrm{s})$$

可见此时还未与质点 2 相遇，质点 1 需在返回的第 5 秒末与质点 2 相遇.

质点 1 由原点至最高点所走过的路程为

$$l_1' = v_{10x}t + \frac{1}{2}a_{1x}t^2 = 5\times 25 - \frac{1}{2}\times 0.2\times 25^2$$
$$= 62.5(\mathrm{m}).$$

质点 1 由最高点到相遇点所走过的路程为

$$l_1'' = x_1|_{t=25} - x_1|_{t=30}$$
$$= l_1' - \left(v_{10x}t + \frac{1}{2}a_{1x}t^2\right)$$
$$= 62.5 - \left(5\times 30 - \frac{1}{2}\times 0.2\times 30^2\right)$$
$$= 62.5 - 60 = 2.5(\mathrm{m})$$

∴质点 1 从出发至相遇走过路程为

$$l_1 = l_1' + l'' = 62.5 + 2.5 = 65(\mathrm{m}).$$

则质点2从出发至相遇走过的路程为

$$l_2 = x_2|_{t=0} - x_1|_{t=30}$$
$$= 195 - 60 = 135(\mathrm{m})$$

1.7.2 站台上送行的人，在火车开动时站在第一节车厢的最前面. 火车开动后经过$\Delta t = 24\mathrm{s}$，第一节车厢的末尾从此人的面前通过，问第七节车厢驶过他面前需要多长时间？火车做匀加速运动.每节车厢长度相等.

解：建立一维坐标系O-x，原点设在火车开动时第一节车厢的前面，x 轴正方向与火车行驶方向一致.以火车开动的时刻为计时起点.

已知初始条件为：$t = 0$ 时，$x_0 = 0$；$v_{0x} = 0$.

设每节车厢的长度为l.

根据题意，第一节车厢驶过送行人的时间为24s，火车做匀加速直线运动，所以

$$l=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\cdot 24^2$$

火车的加速度为 $a=\dfrac{l}{288}$.

当第六节车厢的尾部驶至送行人的面前时，

$$6l=\frac{1}{2}at_1{}^2$$

所需时间 $t_1=\sqrt{\dfrac{12l}{a}}=\sqrt{\dfrac{12l\times 288}{l}}\doteq 58.79(\mathrm{s})$

当第七节车厢的尾部驶至送行人的面前时，

$$7l=\frac{1}{2}at_2{}^2$$

所需时间 $t_2=\sqrt{\dfrac{14l}{a}}=\sqrt{\dfrac{4l\times 288}{l}}\doteq 63.50(\mathrm{s})$

∴ 第七节车厢驶过送行的人面前所需要的时间

$$\Delta t=t_2-t_1\doteq 4.71(\mathrm{s}).$$

1.7.5 电梯以1.0m/s的匀速率下降，小孩在电梯中跳离地板0.50m高，问当小孩再次落到地板上时，电梯下降了多长距离？（本题涉及相对运动，亦可在学过§1.11后作）

解：〔一法〕 选择电梯为参照系，建立坐标系$O'-x'$，原点固结于电梯地板，x'轴竖直向上（如1.7.5（1）图）．以小孩开始下落时为计时起点，并视小孩为质点．

设小孩跳离地板的高度为l，再次落至地板的时间为t，则

$$-l=-\frac{1}{2}gt^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2l}{g}}=\sqrt{\frac{2\times0.5}{9.8}}\doteq0.32(\mathrm{s})$$

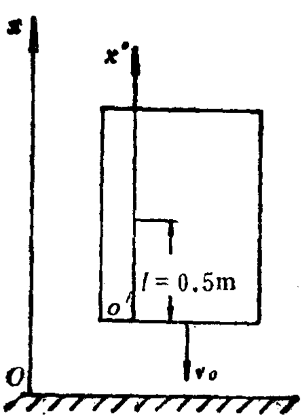

图 1.7.5(1)

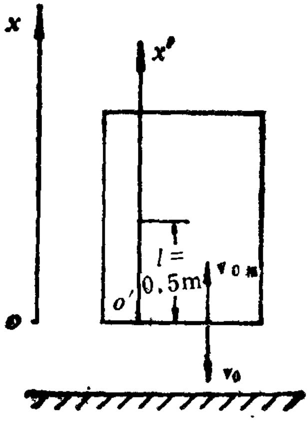

图 1.7.5(2)

因为小孩相对电梯地板上升的高度与下降的高度相等，所以小孩在空中的时间为0.64s.

选择地面为参照系，则电梯在0.64s内相对地面下降的距离为

$$h=v_0t=1.0\times0.64=0.64(\mathrm{m}).$$

即当小孩再次落到地板上时，电梯下降了0.64m.

〔二法〕 选择地面为基本参照系，建立坐标系$O\text{-}x$，原点o固结于地面并与小孩起跳点在同一高度上，x轴方向竖直向上.

选择电梯为运动参照系，建立坐标系$O'\text{-}x'$，原点o'固结于电梯地板，x'轴竖直向上.（见1.7.5(2)图）

相对基本参照系：