科学管理中的数学方法
——线性规划

赵凤治　于百令　著

国防工业出版社

科学管理中的数学方法
——线性规划

赵凤治　于百令　著

国防工業出版社

内容简介

本书以初等数学为基础，从实用出发介绍了科学管理中最常用的数学方法——线性规划及其特殊类型。给读者提供了方法，也提供了一种思考方式，更为管理现代化及电子计算机的使用提供了一个工具。书中有些很实用的材料是其他书中所没有的，如容量运输问题、多模型运输问题、机器配置问题等。

本书可供管理人员、设计人员、技术员、程序员、大专师生以及其他对线性规划有兴趣的人员参考。

科学管理中的数学方法
——线性规划
赵风治　于百令　著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
787×1092 1/32　印张 9　198千字
1987年11月第一版　1987年11月第一次印刷　印数：0,001—5,400册
统一书号：15034·3227　　定价：1.85元

前　言

线性规划在实际中有极为广泛的应用。如运输问题数学模型、机器配置问题数学模型，它们的应用不仅仅局限于运输问题和机器配置问题本身，而被用到很多其他领域的一些问题上。并且一旦把线性规划用于实际，便会收到显著的经济和技术效益。对此，国内外都有大量实例。因而国内外的学者、专家都很重视线性规划的应用和研究工作。可以预期线性规划在我国会得到进一步的推广。

这一形势诱使国内很多单位和个人想学习和应用线性规划。但是，目前有关参考书太少，而且为数甚少的这些参考书都以线性代数为基础知识。这就为推广线性规划造成了困难。许多从事于管理、技术工作的同志想学习线性规划，但苦于没有足够的线性代数知识。有些中等技术学校想教授线性规划，但找不到合适的教材。

在一些同志的热情鼓励下，笔者把几次讲课的讲稿整理成这个册子。这是一本不以线性代数为基础的线性规划读物，希望它能对大家学习、推广线性规划有帮助。

本书分六章。第一章属于模型论范畴，介绍线性规划数学模型的形成及特色。这么少的文字讲不清模型论的内容，所以本章只能作为一个引子。第二、三、四章论述运输问题数学模型及解法。介绍了常用的位势法、图论方法、解加数法及很有实用价值的不平衡运输问题、多模型运输问题、容量运输问题等。第五章论述机器配置问题。这是实际中大量

存在的问题。这里介绍了在电子计算机上和人工都很适用的计算方法。第六章论述一般线性规划问题。介绍最常用的单纯形解法、整数线性规划问题的解法及多目标线性规划的解法。

由于笔者水平有限，不足之处一定很多，欢迎批评指正。

作　者

目录

第一章 引 言

§1 科学的管理方法

"管理"一词大家并不陌生，国家的管理、事业的管理、单位的管理、家庭的管理、个人生活及活动的管理等，可以说管理存在于人类生活的各个角落。在某些方面你可能被别人管理，而在另外一些方面也许你正在管理别人。管理的艺术虽然并不神秘，但好坏之差有天壤之别。管理的好坏对于行为的后果起决定性作用，这一事实是人们所共知的。以前，一个好的管理人员，他的管理艺术多半是依赖于个人经验的积累和学习别人的好经验。事实上，经验是有局限性的，也不一定是可靠的。所以多少年以来人们一直努力追求把管理建立在科学基础之上。现在科学的管理已经不仅是科学家笔下的课题，而且也已广泛地用于实践之中。科学管理日益受到人们越来越多的重视。

什么是科学的管理方法？那就是找出管理对象各种因素之间的数量关系，把这种关系用数学语言精确地描述出来，这种数学描述称为"管理函数"。依据对于这个函数的研究来决定管理中可控制的参数，以期得到最优效果，这种管理方法就是科学的管理方法。管理中使用什么参数值决定着采用什么管理决策，这些决策会达到什么效果可由管理函数值得出。

譬如对于国民经济的发展，钢、铁、粮、棉、煤、石油、电力等等应按什么比例投资才能使国民生产总值最大？

对此，一方面要研究它们各自的发展规律，它们的原有水平，它们对于生产总值的影响，另一方面必须考虑它们彼此之间的相互关系和相互影响，从而确定出国民经济发展的函数模型。这个模型精确地描述出国民生产总值与各种生产部门投资之间的比例关系及各生产部门之间的平衡关系。对于这一被称为国民经济平衡模型的函数模型有了充分详细的分析，找出最优的决策就会使国民经济健康而高速地发展。

又如家庭生活，衣、食、住、行都有很多不同的方案可供选择。如果追求的是总支出最少，就要研究衣、食、住、行各因素对于支出的影响。显然，对于衣、食、住、行应有量低的要求。衣、食、住、行各种因素与支出之间的数学关系是研究总支出所必须的，称为目标函数；各种因素与最低要求之间的数学关系是为了保证正常生活的，称为约束条件函数，给出这些函数是为建立数学模型。有了模型之后，用数学方法便可确定在一定生活水平限制下使总支出最少的衣、食、住、行方案。

管理不同的对象，或者说不同的管理过程，管理函数一般是不同的。因为建立这些函数往往并不容易，对这些函数进行必要的理论分析和必不可少的数值计算常常出现这样或那样的困难，所以科学的管理是要付出艰苦劳动和一定代价的。但是，从实现科学管理的显著效果来看，进行科学管理的研究工作是值得的。

对于不同的管理过程一般应有不同的管理函数，这并不是说管理科学就没有一个共同的基础了。事实上，在管理科学中有很多共性的东西值得讨论，如讨论如何建立模型的“模型论”；研究各种典型模型的“运筹学”的有关分支；研究模型计算的理论和算法的“最优化计算方法”等。对于上

述问题不做讨论，这里只想强调科学管理的重要性及研究科学管理的必要性。对此有了认识，计算方法的重要性也就可以理解了。

在本书中，主要讨论科学管理中最常用的几种数学方法。前些年我们用这些方法解决了一些实际问题，其经济和技术效果很好。这些方法都可以在电子计算机上实现，所以这本书也是普及微型电子计算机应用的一本工具书。

但是应该指出，管理科学工作中，有一些工作不一定非用计算机不可。计算机只是一种工具，是否用上计算机并不是科学管理的最终目的，而是提高管理水平，取得显著经济和技术效益的手段。电子计算机的问世推动了管理科学的发展，但这不妨碍没有计算机的单位实现科学管理。事实上，我们这本书介绍的方法在有些情况下可以人工实现。

§2 运输问题

用运输问题的数学模型所描述的问题不仅是运输问题本身。为讲述方便起见，本书针对运输问题进行讨论。

运输在国民经济和日常生活中是绝对不可缺少的。大批的物资日日夜夜在铁路、公路、空中、水上不停的流动着，人们赖以得到正常的生活。对于这一复杂的运输过程有很多具体事项要人们去安排。安排得好可以在人力、物力、时间上得到节约；安排得不好，就要造成浪费，甚至使工作遭到巨大损失。在简单的情况下不要做过多的考虑便可得到最好的安排，但在较为复杂的情况下得出最好的安排就不那么容易了。但是，不管如何复杂的运输问题都可以借助于数学方法得到它的最优安排。

为了介绍计算方法并进行有关的数学讨论，首先应讲述

数学模型。

设有某一种物资，它有 3 个产地，如为 A_1，A_2，A_3，它们的产量分别为 a_1，a_2，a_3；有 5 个销地，如为 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，它们的销量分别为 b_1，b_2，b_3，b_4，b_5。要安排一个运输方案，将该物资从 3 个产地运到 5 个销地去。实际上通常考虑所谓平衡的运输问题，数学上表示为

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j \tag{1.1}$$

其中“Σ”是求和号。如 $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$ 等。

所谓求运输方案，就是要回答下述两个问题：一、各个产地的物资应该运到哪一个销地去？二、应该运多少？如果从某一产地到某一销地不运该物资则运量为 0，那么前面两个问题就只剩一个问题了。把第 i 个产地 A_i 运到第 j 个销地 B_j 的运量记为 x_{ij}。考虑第 1 个产地的产量 a_1 全部运出，应有数学式子，即

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = a_1$$

类似地，对 A_2 有

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} = a_2$$

对 A_3 有

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} = a_3$$

把上面 3 个式子统一写成

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij}=a_i, \quad i=1, 2, 3 \tag{1.2}$$

现在考虑第 1 个销地 B_1 的销量，若使从 3 个产地运来的物资总和为 b_1，则应有

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1}=b_1$$

类似地，对第 2 个销地 B_2 有

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2}=b_2$$

对 B_3，B_4，B_5 依次有

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3}=b_3$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4}=b_4$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i5}=b_5$$

把这 5 个公式统一地写成

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij}=b_j, \quad j=1, 2, 3, 4, 5 \tag{1.3}$$

还应该有一个很自然的要求，就是从任意一个产地 A_i 到任意一个销地 B_j 的运量 x_{ij} 均不应是负值，即

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, 2, 3; \quad j=1, 2, 3, 4, 5 \tag{1.4}$$

在后面的讨论中可以看到满足公式(1.1)，(1.2)，(1.3)，(1.4)的 x_{ij} 是不难求的，但要找一个最优方案就不容易了。

既然提出找最优方案，那么首先就要给出判别方案优劣的一个标准。这种标准可以是运费的多少，可以是吨·公里数的大小，也可以是别的要求。为了一致起见，后面讨论以吨·公里数的大小作为区分一个运输方案好坏的标准。

假定物资单位为吨，产地 A_1 到销地 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5 的距离公里数依次为 c_{11}，c_{12}，c_{13}，c_{14}，c_{15}，类似地对于 A_2 有 c_{21}，c_{22}，c_{23}，c_{24}，c_{25}，对 A_3 有 c_{31}，c_{32}，c_{33}，c_{34}，c_{35}。从产地 A_1 运出的物资运输的吨·公里数为 $\sum_{j=1}^{5} c_{1j}x_{1j}$。从 A_2，A_3 两个产地运出的物资运输吨·公里数依次为 $\sum_{j=1}^{5} c_{2j}x_{2j}$，$\sum_{j=1}^{5} c_{3j}x_{3j}$。把它们加起来便得到了运输的总吨·公里数 s，即

$$s = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} \tag{1.5}$$

于是上面的运输问题的数学模型写成求 x_{ij} 的形式，并使

$$\min \quad s = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

其中符号“min”表示求极小。

对于一般的运输问题，叙述如下：某种物资有m个产地，如为A_1，A_2，A_3，…，A_m，产量依次为a_1，a_2，a_3，…，a_m；n个销地为B_1，B_2，B_3，…，B_n，销量依次为b_1，b_2，b_3，…，b_n。产地A_i到销地B_j之间距离c_{ij}公里，自产地A_i运往销地B_j物资记为x_{ij}吨。于是运输问题的数学模型可以描述成：求x_{ij}使

$$\min \quad s=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

满足

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\cdots,\ m;\quad j=1,2,3,\cdots,n$$

前一个式子称为目标函数，后三个式子称为约束条件。记号“min”表示求极小。

运输问题可以以表 1-1 形式给出，即

表 1-1

	B_1	B_2	B_3	$\cdots$ B_n	a_i
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	C_{m3}	C_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	b_3	b_n	

表中 A_i, B_j, a_i, b_j, c_{ij} 的意义如前所述。

也可用图表示运输问题（图 1.1）。

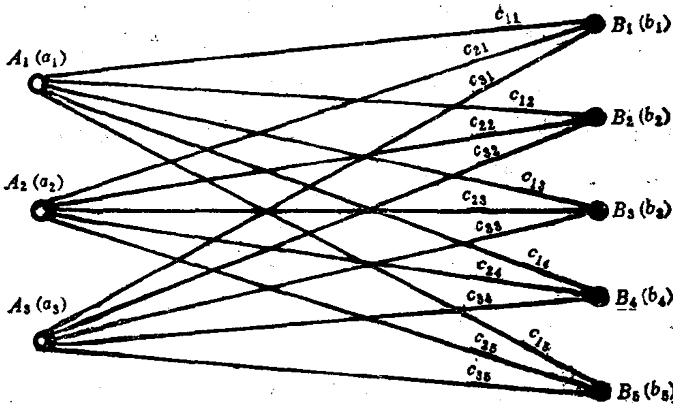

图 1.1

图 1.1 中 $A_1(a_1)$ 表示发货地 A_1 发货量为 a_1 吨，类似地有 $A_2(a_2)$，$A_3(a_3)$。$B_1(b_1)$ 表示收货地 B_1 收货量为 b_1，同样有 $B_2(b_2)$，$B_3(b_3)$，$B_4(b_4)$，$B_5(b_5)$。标在每条线上的 c_{ij} 表示第 i 个发货地到第 j 个收货地的距离公里数。

下面讨论几种变形的运输问题，我们称它们为特殊的运输问题。

假定有 5 个铁矿，它们的年产量分别不能超过 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 吨。所产矿石供给 4 个铁厂炼铁。4 个铁厂的生产能力（以每年所用矿石吨数计算）依次为 b_1，b_2，b_3，b_4 吨。设第 i 个铁矿的矿石由第 j 个铁厂冶炼，每吨矿石产值为 c_{ij} 元。问怎样生产使总产值最高。

第 i 个铁矿由第 j 个铁厂冶炼的吨数记为 x_{ij}。类似前面的讨论得到数学模型

$$\max \quad s=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij} \tag{1.6}$$

x_{ij} 满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{1.7}$$

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\leqslant a_i,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \tag{1.8}$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{1.9}$$

记号"max"表示求极大。为使问题有解，应有

$$\sum_{i=1}^{5}a_i\geqslant\sum_{j=1}^{4}b_j$$

这是不平衡运输问题。

再进一步，假定有 5 个铁矿，每生产 1 吨矿石支出各自为 e_1，e_2，e_3，e_4，e_5 元；有 4 个铁厂每炼 1 吨矿石各自支出 d_1，d_2，d_3，d_4 元；第 i 个铁矿每运 1 吨矿石到第 j 个铁厂运价为 f_{ij} 元。前面的数学模型扩大成

$$\max \quad s=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}-\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}f_{ij}x_{ij}-\sum_{j=1}^{4}d_j\sum_{i=1}^{5}x_{ij}-\sum_{i=1}^{5}e_i\sum_{j=1}^{4}x_{ij} \tag{1.10}$$

x_{ij} 满足约束条件

$$\sum_{i=1}^{5}x_{ij}=b_j,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \tag{1.12}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5; \quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{1.13}$$

以及

$$\sum_{i=1}^{5} a_i \geqslant \sum_{j=1}^{4} b_j \tag{1.14}$$

下面再举一个多模型运输问题的例子。

有 6 个毛竹产地，各产毛竹 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6 吨。毛竹运往 5 个销地，销量各为 b_1，b_2，b_3，b_4，b_5 吨。通过铁路和公路运输。先经公路把毛竹自产地运到 3 个铁路货运站，记货运站为 D_1，D_2，D_3。再经火车运到销地。产地仍记为 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6；销地记为 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5。

为了形成数学模型必须统一用一个标准衡量运输方案的优劣。用运费支出作为标准。首先用 c_{ik} 元表示产地 A_i 到货运站 D_k，经公路运 1 吨毛竹的运费。它们的关系可以表1-2的形式给出。

表 1-2

	D_1	D_2	D_3
A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}
A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}
A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}
A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}
A_5	C_{51}	C_{52}	C_{53}
A_6	C_{61}	C_{62}	C_{63}