邹　海　编译

最优化管理方法和案例

科学普及出版社

最优化管理方法和案例

邹　海　编译

科学普及出版社

最优化管理方法和案例

邹海　　编译

·

科学普及出版社 出版（北京海淀区白石桥路32号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
长春市八六〇四七部队印刷室印刷

·

开本：787×1092毫米1/16　印张：20字数：500千字
1987年9月第一版　　1987年9月第一次印刷
印　　数：17,000 册　　定价：4.20元
统一书号：4051.1009　　本社书号：1322

前　　言

当我们极目观赏万里长城、金字塔、摩天大楼、太阳城以及其它的世界奇迹，对人类创造的这些伟大业绩敬慕不止，我们有时会感到惊奇，究竟是怎样管理才能建成这些雄伟的杰作呢！

然而，当我们步入世界博览会时，又是一片壮观的景象。各种琳琅满目五色缤纷的新技术革命的产品应有尽有，人造卫星、航天飞机、登月舱、激光通信、机器人、综合信息处理系统等。

在这些新的科技成就中，都凝聚着人类最优化管理的宝贵思想，它隐藏在奇迹的创造之中，它是智慧的宝藏，需要人们去挖掘，去运用。

在人们的日常工作中，也同样有最优化管理的思想。例如，有多种工作需要安排，先作哪些工作，后作哪些工作？每种工作的人力、物力、技术如何使用？时间如何安排最好？

生产一种新产品，采用什么设计，价值最大，成本又最低？采用什么规格，什么工艺？生产多少为好？等等。

综合上述，不难看出在人们生产物质财富的过程中，有个最优管理的问题。所谓最优化管理，就是指在很多个可行的管理方案中，讨论什么样的管理方案最优？怎样找出最优管理方案？并应用在管理工作中以最少的代价取得最好的效果。

为了实现最优化管理，首先要确定一个最优化管理的标准，有了这个鉴别管理好坏的标准，就要在这个标准的衡量下，在物资、技术、能源条件允许的范围内，从众多的可行方案中，找出最优管理方案。

其次是把最优化方法用到管理中，以便更科学，更快的选出最优管理方案。这就是最优化管理所要研究和解决的内容。

本书重点介绍选择最优管理方案的几种方法。线性规划部分，编译自〔日〕平本　巖、长谷　彰著《线性规划理论》讲义部分；价值工程部分摘译自〔美〕斯垣利·戈德哈伯（Stanley Goldhaber）著《建筑工程管理与实践》（“Construction Management Principles and Practices”）部分内容；计划综合平衡方法、信息在最优化管理中的应用等部分均为笔者结合实际工作需要编写的。

由于笔者经验不足，水平有限，难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编译者

一九八五年十月于　北京

目　　录

第一章　线性规划的基础知识

1.1 线性规划问题

1.1.1 例　题

某公司计划生产P_1和P_2两种产品，生产1公斤的产品P_1，需要2公斤的原料M_1以及2公斤的原料M_2；生产1公斤的产品P_2，需要1公斤的原料M_1，5公斤的原料M_2以及4公斤的原料M_3。但是，对原料的使用量却有供应的限制，原料M_1只能供应60公斤，原料M_2只能供应100公斤，原料M_3也只能供应60公斤。由于经营状况，产品P_1、P_2，每公斤的利润分别为6万元、7万元。因此，要使利润最大，问应计划生产P_1和P_2各多少才是最优？

现在此例题用教学形式描述，设产品P_1的计划产量为x_1公斤，产品P_2的计划产量为x_2公斤，而最大利润函数x_0为

$$x_0 = 6x_1 + 7x_2$$

再考虑资源约束条件，此例题的数学模型如下：

$$\left.\begin{array}{l} \text{原料}M_1\text{的限制}\cdots\cdots 2x_1 + x_2 \leqslant 60 \\ \text{原料}M_2\text{的限制}\cdots\cdots 2x_1 + 5x_2 \leqslant 100 \\ \text{原料}M_3\text{的限制}\cdots\cdots 4x_2 \leqslant 60 \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

$$\text{生产量非负}\cdots\cdots\cdots\cdots x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \qquad (1.2)$$

$$\text{最大利润}\cdots\cdots\cdots\cdots x_0 = 6x_1 + 7x_2 \qquad (1.3)$$

在这里，引入3个新的非负变量x_3，x_4和x_5，把上面的联立一次不等式改写成联立一次方程式，就成为如下形式：

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 100 \\ 4x_2 + x_5 = 60 \end{array}\right\} \qquad (1.4)$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0 \qquad (1.5)$$

$$x_0 = 6x_1 + 7x_2 \rightarrow \text{最大化} \qquad (1.6)$$

把(1.6)式写成$x_0 - 6x_1 - 7x_2 = 0$的形式，同(1.4)式一起，看成变量x_0，x_1，x_2，x_3，x_4和x_5的联立一次方程式，它的系数可归纳成如下之表：

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	常　数
1	−6	−7	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	60
0	2	5	0	1	0	100
0	0	4	0	0	1	60

此表是单纯形表的一部分，应用它，对于用手工计算线性规划问题的解来说，是很方便的。

1.1.2 典型形式

线性规划问题的典型形式，可以写成下面的形式：

求一组变量x_1，$x_2\cdots$，x_n的值，使其满足联立一次不等式(1.7)和非负条件(1.8)，而且使一次式(1.9)取最大值。

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 \tag{1.8}$$

$$x_0=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.9}$$

这里，若引入m个新的非负变量x_{n+1}，x_{n+2}，$\cdots$，x_{n+m}，把联立一次不等式(1.7)改写成联立一次方程式，则成为如下形式：

$$\left.\begin{array}{llllll} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & =b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & =b_2 \\ \vdots \qquad \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n & & & +x_{n+m} & =b_m \end{array}\right\} \tag{1.10}$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0,x_{n+1}\geqslant 0,x_{n+2}\geqslant 0,\cdots,\ x_{n+m}\geqslant 0 \tag{1.11}$$

$$x_0=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{1.12}$$

与原来的变量x_1，x_2，$\cdots$，x_n相对应，为了把不等式改写成等式而引入的变量x_{n+1}，x_{n+2}，$\cdots$，x_{n+m}，称为松弛变量。

1.1.3 矩阵表示

下面，用矩阵来表示1.1.2中所述形式的线性规化问题。

以(1.7)式左边的系数a_{ij}($i=1$，$\cdots$，m；$j=1,2$，$\cdots$，n)为元素的矩阵，称为系数矩阵，用A表示：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

以(1.7)式右边的系数b_i($i=1$、$2,\cdots m$)为元素的列矢量，称为右边矢数，用b表示：

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

以(1.9)式的系数c_j($j=1$，2，$\cdots$，n)为元素的行矢量，称为增益系数矢量，用c'表示：

$$c'=(c_1,\ \cdots,\ c_n)$$

以变量x_1，$\cdots$，x_n为元素的列矢量，称为变量矢量，用x表示：

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

这样，（1.7）～（1.9）式就可写成如下的简单形式：

$$Ax \leqslant b \tag{1.13}$$

$$x \geqslant 0 \tag{1.14}$$

$$x_0 = c'x \rightarrow \text{最大化} \tag{1.15}$$

描述1.1.1例题的公式（1.1）～（1.3）用矩阵表示如下：

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

以（1.10）式左边的系数构成系数矩阵A：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & 1\cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} & 0\cdots 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = [\,6,\ 7\,]\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{最大化}$$

现在，再用矩阵来表示式（1.10）～（1.12）。设以原来的变量$x_1,\cdots,x_n$，以及松弛变量x_{n+1}，…，x_{n+m}为元素的变量矢量为x，右边矢量b和前面一样：

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

因为与松弛变量相对应的系数是0，所以，增益系数矢量c′如下所示：

$$c' = [\,c_1,\ \cdots,\ c_n,\ 0,\ \cdots,\ 0\,]$$

因此，（1.10）～（1.12）式用矩阵来表示，就成为：

$$Ax = b \tag{1.16}$$

$$x \geqslant 0 \tag{1.17}$$

$$x_0 = c'x \rightarrow \text{最大化} \tag{1.18}$$

看一看例题就可以知道，对于添加了松弛变量的关系式（1.4）～（1.6），其系数矩阵A，右边矢量b，增益系数矢量c′，以及变量矢量x分别为：

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\2&5&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}60\\100\\60\end{pmatrix}$$

$$c'=[6,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0],\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}$$

下面，是用（1.16）～（1.18）的形式来求解线性规划问题。

我们称（1.16）式为约束条件，（1.17）式为非负条件，以及（1.18）式为目标函数。此外，称满足约束条件的变量矢量x（即满足（1.10）式的变量值组）为解，而且，把满足非负条件的解叫做可行解，把使目标函数成为最大（即最大值）的可行解叫做最优解。

就例题而言，约束条件、非负条件以及目标函数，分别写为(1.19)、(1.20)和(1.21)：

约束条件

$$\begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\2&5&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\100\\60\end{pmatrix} \tag{1.19}$$

非负条件

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\geqslant\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{1.20}$$

目标函数

$$x_0=[6,\ 7,\ 0,\ 0,\ 0]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}\rightarrow\text{最大化} \tag{1.21}$$

因此，如果令

$$x_1=\begin{pmatrix}0\\15\\45\\25\\0\end{pmatrix},\quad x_2=\begin{pmatrix}0\\20\\40\\0\\-20\end{pmatrix},\quad x_3=\begin{pmatrix}25\\10\\0\\0\\20\end{pmatrix}$$

则x_1是可行解，x_2是非可行解，而最优解是x_3。

一个可行解也不存在时，原来的线性规划问题就是不可解的。而存在使目标函数值任意增大的可行解时，原问题就是无界的。

1.1.4 图解法

对于例题，若用图来表示可行解的范围，就是图1.1中网格表示的部份。在同一图上，

我们标出目标函数增加的方向。为此，用虚线画出$x_0=84$时目标函数的方程式 $6x_1+7x_2=84$ 和 $x_0=126$ 时目标函数的方程式 $6x_1+7x_2=126$之图象。

于是，目标函数的增加方向就是图中箭头所示之方向。沿此方向继续增加目标函数x_0之值，在图中坐标为（25，10）的黑点上，x_0之值是220，再增加x_0之值，就超出了可行解的范围。由此可知，x_0的最大值为20，最优解为$x_1=25$，$x_2=10$，$x_3=0$，$x_4=0$，$x_5=0$。

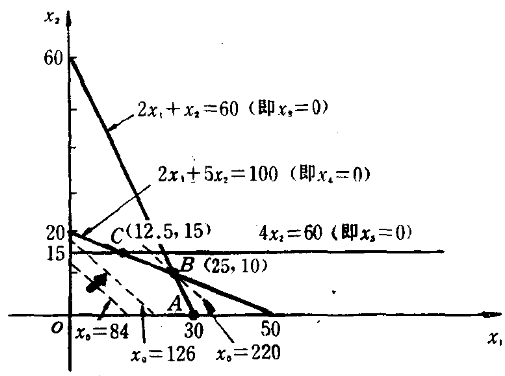

图 1.1

1.2 单纯形法

1.2.1 基本解

在例题的约束条件（1.4）式或（1.19）式中，若$x_1=0$，$x_2=0$，则

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 60\\
x_4 &= 100\\
x_5 &= 60\\
x_0 &= 6\times0+7\times0=0
\end{aligned}
$$

若用图来表示此可行解，则成为图1.2中的黑点。

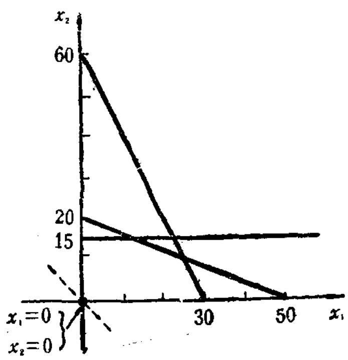

图1.2

若$x_1=0$，$x_5=0$，则约束条件成为：

$$
\begin{aligned}
x_2+x_3 \quad\quad &= 60\\
5x_2 \quad\quad +x_4 &= 100\\
4x_2 \quad\quad\quad &= 60
\end{aligned}
$$

由于$x_2=15$,$x_3=45$,$x_4=25$,因此,就可得到$x_0=6\times0+7\times15=105$。用图表示此可行解,就是图1.3中所示之黑点。

因此，如果在例题的约束条件（1.4）式或(1.19）式中，把2个变量的值指定为0，则其余3个变量之值就唯一确定。

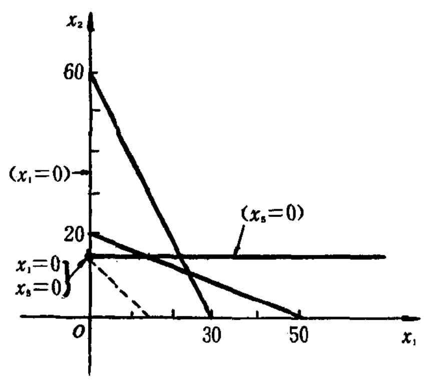

图 1.3

一般来说,在约束条件(1.10)或(1.16）式中，从 $n+m$个变量里适当地选择 n个变量,并任意指定这些变量的值,则其余m个变量的值就唯一确定了。此时,我们把最初选择的n个变量叫做独立变量，而其余的m个变量叫做从属变量。在线性规划中,称从属变量为基本变量，而称独立变量为非基本变量。

现在，假设$x_{i(1)}$，…，$x_{i(m)}$，是基本变量*，左边留下基本变量，将非基本变量

---

* $i_{(1)}$，…，$i_{(m)}$表示从1，2，…,$n+m$中选择出来的不同数字组。当$m=3$,$n=2$时，比如，若$i_{(1)}=3$，$i_{(2)}=4$,$i_{(3)}=5$,则 $\{x_{i(1)},x_{i(2)},x_{i(3)}\}$ 变成 $\{x_3, x_4, x_5\}$；若$i_{(1)}=2$，$i_{(2)}=3$，$i_{(3)}=4$，则 $\{x_{i(1)},x_{i(2)},x_{i(3)}\}$ 变成 $\{x_2, x_3, x_4\}$。

$x_{i(m+1)},\cdots,x_{i(m+n)}$ 全部右移，于是，约束条件（1.16）式就可写成：

$$x_{i(1)}\alpha_{i(1)}+\cdots+x_{i(m)}\alpha_{i(m)}=b-(x_{i(m+1)}a_{i(m+1)}+\cdots+x_{i(m+n)}a_{i(m+n)}) \quad (1.22)$$

这里，列矢量a_j表示系数矩阵A的第j列：

$$A=[a_1,\ \cdots,\ a\ ,\ a_{n+1},\ \cdots,\ a_{n+m}]$$

例如，与图1.2相对应的方程式

$$x_3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+x_5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60\\100\\60\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}1\\5\\4\end{pmatrix}$$

可以写成

$$\left\{\begin{aligned}\underbrace{x_3=60}_{\text{基本变量}}&-2x_1-x_2\\x_4=100&-2x_1-5x_2\\x_5=60&\quad\underbrace{\quad\ -x_2}_{\text{非基本变量}}\end{aligned}\right.$$

在（1.22)式中，任意指定非基本变量$x_{i(m+1)},\cdots,x_{i(m+n)}$ 的值时，右边就成为m维常数矢量。此m维矢量与m个m维矢量$a_{i(1)}$，…，$a_{i(m)}$的线性组合所构成的方程组有唯一解的充要条件是：$a_{i(1)}$，…，$a_{i(m)}$是线性无关的。在线性代数学的m维矢量空间中，把这m个线性无关的矢量的集合叫做基(底)。换句话说，线性规划法中的基本变量，是与从构成系数矩阵A的n_+m个列矢量a_1，…，a_{n+m} 中选择出来的m个线性无关矢量相对应的变量。上述例子如下所示：

$$\begin{array}{cc} & \qquad\qquad\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\text{3 个线性无关列矢值}} \\ A= & \begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\2&5&0&1&0\\0&4&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

对应的变量… x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

在线性规划中，特别是把满足约束条件（此约束条件是通过把所有的非基本变量之值都假定是0而得到的。）的解叫做基本解而引人注目。图1.2和图1.3中用黑点表示的都是基本解。

但是，选择基（底）的取法最多不会超过从n+m个列矢量中取m个列矢量的取法数（$\binom{m+n}{m}$）。因此，基本解的个数最多为（$\binom{n+m}{m}$）。然而，这些基本解不一定都是可行的。也就是说，存在不满足非负条件的基本解。例如，图1.4 中用黑点表示的点虽是基本解，但它是不可行的（非基本变量$x_1=0$，$x_4=0$时）。

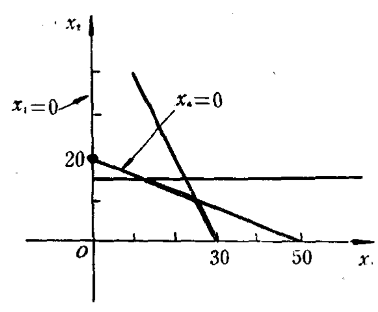

图 1.4

在后面即将介绍的单纯形法中，最重要的是可行

基本解。其理由是，如图1.1所示，若存在有界的最优解，最优解中必有一个是可行的基本解〔注1〕*。

1.2.2基本解的更新

从系数矩阵A的列矢量中，选择构成基(即线性无关)的m个列矢量，并将它们横向排列起来而构成的m维方阵叫做基本矩阵，用B表示之。例如，图1.3 中黑点所表示的基本解，是通过$x_1=0$（即x_2轴）与$x_5=0$（即直线$4x_2=60$）的交点来确定，($x_2=15$，$x_3=45$，$x_4=25$)，因此，非基本变量是x_1和x_5，基本变量是x_2，x_3和x_4。故基本矩阵B为：

$$B=[a_2,\ a_3,\ a_4]=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

此时，若计算基本矩阵的逆矩阵B^{-1}〔注2〕，则有。

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0.25\\ 1 & 0 & -0.25\\ 0 & 1 & -1.25\end{pmatrix} \tag{1.23}$$

这里，要注意基本变量的顺序。在此例题中，基本变量$x_{i(1)}$，$x_{i(2)}$，$x_{i(3)}$是x_2，x_3，x_4。也就是，$i(1)=2$，$i(2)=3$，$i(4)=4$。但是，从基本变量的定义来看，以$i(1)=3$，$i(2)=4$，$i(3)=2$，也就是，x_3，x_4，x_2的顺序选择基本变量也是可以的。此时，基本矩阵及其逆矩阵分别为：

$$B=[a_3,\ a_4,\ a_2]=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -0.25\\ 0 & 1 & -1.25\\ 0 & 0 & 0.25\end{pmatrix} \tag{1.24}$$

由于基本变量的顺序不同，基本矩阵及其逆矩阵的形状也不同；但是，在约束条件中，把非基本变量的值都取做0而得到的基本变量之值，即基本解，是相同的。

一般来说，$a_{i(1)}$，…，$a_{i(m)}$构成基时，也就是，与之对应的变量$x_{i(1)}$，…，$x_{i(m)}$是基本变量时，基本矩阵为

$$B=[a_{i(1)},\ \cdots,\ a_{i(m)}]=\begin{pmatrix}a_{1i(1)}\cdots a_{1i(m)}\\ \vdots \qquad \vdots\\ a_{ni(1)}\cdots a_{ni(m)}\end{pmatrix} \tag{1.25}$$

这里，由于$a_{i(1)}$，…，$a_{i(m)}$是线性无关的，因此，对矩阵B来说，存在着逆矩阵B^{-1}。此矩阵称为基本逆矩阵。正如下面所述，基本逆矩阵在单纯形法中起着非常重要的作用。

如果用基本矩阵来表示把非基本变量均取作0而得到约束条件，则可写为

$$Bx\ \ =b \tag{1.26}$$

其中

$$x_B=\begin{pmatrix}x_{i(1)}\\ \vdots\\ x_{i(m)}\end{pmatrix}$$

※ 把〔注〕都归並在各节的最后，下同。

因此，由

$$x_B = B^{-1}b \tag{1.27}$$

就可得到基本解。

例如，用（1.27）式表示图1.3的基本解，利用基本逆矩阵（1.23)式或（1.24）式，则有如下结果：

$$x_B = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25 \\ 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & -1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 25 \end{pmatrix}$$

或者

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

现在，让我们来看一看选择非基本变量中的一个x_5，其它非基本变量之值均取为0，只让x_5的值增加 θ（$\theta > 0$）的情况（关于单纯形法中的 x_5的选取方法，在1.2.3节中加以说明）。

此时，x_5的值必须满足$Bx_B + \theta a_s = b$[注3]。

因此

$$x_B = B^{-1}b - \theta B^{-1}a_s \tag{1.28}$$

若令

$$\beta = B^{-1}b,\ \alpha_s = B^{-1}a_s \tag{1.29}$$

则（1.28）式可写为

$$x_B = \beta - \theta\alpha^s \tag{1.30}$$

或者

$$\begin{pmatrix} x_{i(1)} \\ \vdots \\ x_{i(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} \alpha_{1s} \\ \vdots \\ \alpha_{ms} \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

若用分量来表示（1.31）式，则写为：

$$x_{i(e)} = \beta_e - \theta\alpha_{es} \qquad (e = 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

大家知道，α_{ls}（$l = 1,\ \cdots,\ m$）表示的是：随着非基本变量 x_s之值的增加（即增加θ），基本变量$x_{i(e)}$（$l = 1,\ \cdots,\ m$）之值的减少率。

但是，如果（1.27）式表示的基本解是可行的，则有

$$\beta_l \geqslant 0 \qquad (l = 1,\ \cdots,\ m) \tag{1.32}$$

因此，若α_{ls}（$l = 1,\ \cdots,\ m$）都小于或等于0，则在可行解范围之内，允许的非基本变量x_s的最大增加量θ^*，就由下式给出：

$$\theta^* = \min_{\alpha_{ls} > 0} \frac{\beta_l}{\alpha_{ls}} \tag{1.33}$$

此时，需要注意：对于满足

$$\theta^* = \frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} \tag{1.34}$$

的r来说，$x_s = \theta^*$时，$x_{i(r)} = 0$。一般情况下，这个r不只一个。

下面，以图1.3之黑点所表示的基本解为例来加以说明。

现在，选择基本逆矩阵(1.24)，设$s=1$。也就是，只让非基本变量x_1之值增加θ。

根据(1.29)式，β和α_1分别为：

$$\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.25 \\ 0 & 1 & -1.25 \\ 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此，根据(1.30)式，有

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45-2\theta \\ 25-2\theta \\ 15 \end{pmatrix}$$

为了在可行的范围之内增加θ，上式中右侧的分量必须都是非负的，因此，其界限用(1.32)式来计算。也就是，由于$\alpha_{11}>0$，$\alpha_{21}>0$，所以，有

$$\theta^* = \min_{\alpha_{e1}>0} \frac{\beta_e}{\alpha_{e1}} = \min\left\{\frac{45}{2}, \frac{25}{2}, -\right\} = 12.5$$

从$\theta^*=12.5$，可知$r=2$。这里，若$\theta=\theta^*$，则有

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \leftarrow r=2$$

也就是，$x_{i(2)}=x_4=0$，$x_s=x_1=\theta^*=12.5$（请参阅图1.5和图1.6）。

若α_{ls}（$l=1, \cdots, m$）中不存在正的，则无论怎样增加x_s，也是不可行的。此时，是非有界的。

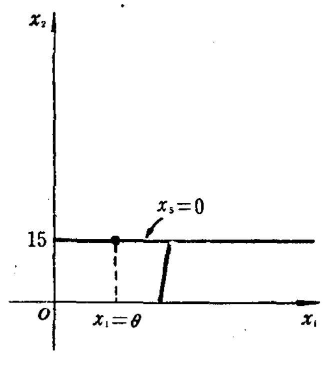

图 1.5

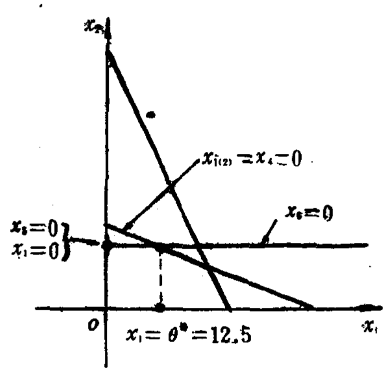

图 1.6

从满足(1.34)式的r中选取任意一个，把与此r相对应的列矢量$a_{i(r)}$从基本矩阵中删去，而代之以a_s，所得之矩阵

$$\bar{B} = [a_{i(1)}, \cdots, a_{i(r-1)}, a_s, a_{i(r+1)}, \cdots a_{i(m)}] \tag{1.35}$$

仍是基本矩阵[注4]。因此

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_{i(1)} \\ \vdots \\ x_{i(r-1)} \\ x_s \\ x_{i(r+1)} \\ \vdots \\ x_{i(m)} \end{pmatrix} \qquad (1.36)$$

是新的基本变量矢量，而新的基本解可写为

$$\bar{x}_B = \beta - \theta^* \alpha_s + \theta^* e_r \qquad (1.37)$$

这里，e_r表示只有第r个分量是1的单位矢量。

在前面的例子中，有

$$\bar{x}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 25 \\ 15 \end{pmatrix} - 12.5 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 12.5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12.5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

1.2.3最佳基本解的条件

下面，介绍在得到一个可行基本解时，判断是否存在比它更好的可行基本解的步骤。为使目标函数的值增加更大，故选择1.2.2中说明过的x_s。

在可行的范围之内，当一个非基本变量 x_s的值增加时， 目标函数的增加率是判断的目标。

把（1.30）式代入目标函数（1.18）式，得到$x_s = \theta$时， 目标函数之值为：$x_0\theta$

$$x_0\theta = c'_B x_B + \theta c_s$$

这里，c'_B是与基本变量x_B相对应的增益系数矢量，也就是：

$$c'_B = [c_{i(1)},\ c_{i(2)},\ \cdots,\ c_{i(m)}] \qquad (1.38)$$

因此，如果把（1.30）式代入上式中的x_B里，加以整理，就得到下式：

$$x_0(\theta) = c'_B\beta + \theta(c_s - c'_B\alpha_s) \qquad (1.39)$$

这里，上式中的第一项$c'_B\beta$是与基本解（1.27）式相对应的目标函数值，若令其为$x_0^{(0)}$，则可以写成：

$$x_0^{(\theta)} - x_0^{(0)} = -\theta(c'_B\alpha_s - c_s) \qquad (1.40)$$

若令

$$\bar{c}_s = c'_B\alpha_s - c_s \qquad (1.41)$$

则可以写成$x_0(\theta) - x_0(0) = -\theta\bar{c}_s$，因此，$-\bar{c}_s$表示当非基本变量$x_s$增加$\theta$时目标函数的增加率。称由 （1.41） 式所定义的$\bar{c}_s$为与非基本变量相对应的缩减价值（reduced cost）。

对所有的非基本变量x_j，都来计算缩减价值。此外，根据下面的判定标准，在 （ii） 的情况下，选择一个x_s，把它作为新的基本变量。

（i）、 若所有的缩减价值$\bar{c}_j$都是非负的（即$\bar{c}_j \geqslant 0$），则与现有的基本矩阵B相对应的基本解x_B（$= B^{-1}b$，即β）是最优解。

（ii）、即使有一个缩减价值$\bar{c}_j$为负（$\bar{c}_j < 0$）的基本变量 x_j 存在，也可以改进现有的基本解，这只要选择满足

$$\bar{c}_s = \min_{\bar{c}_j < 0} \bar{c}_j \qquad (1.42)$$

的非基本变量 x_s， 并把它作为新的基本变量即可。

这种判定标准，称为单纯形判定标准。

下面，按以上步骤看一看我们的例题。

把图 1.7的黑点即原点 0 选为现有的基本解。此时的基本矩阵为：

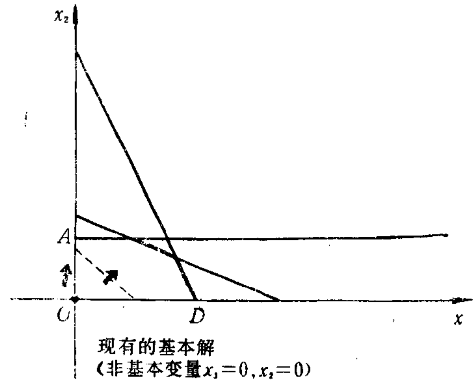

图 1.7

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_3 & x_4 & x_5 \cdots \text{基本变量} \end{array}$$

因为这是单位矩阵，所以基本逆矩阵也是单位矩阵。现有的非基本变量是 x_1，x_2， 而基本变量是 $\{x_3, x_4, x_5\}$ 。

由于与基本变量相对应的增益系数矢量是$c' = [0, 0, 0]$， 因此，与非基本变量 x_1 和 x_2相对应的缩减价值$\bar{c}_1$和$\bar{c}_2$按下式计算：

$$\bar{c}_1 = c'\alpha_1 - c_1 = -6 \qquad \alpha_1 = B^{-1}a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{c}_2 = c_B'\alpha_2 - c_2 = -7 \qquad \alpha_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

因此，成为单纯形判定标准（ii）的情况，根据（1.42）式，有

$$\bar{c}_s = \min_{c_j < 0} \bar{c}_j = \min\{-6, -7\} = -7$$

于是，从现有的非基本变量 $\{\alpha_1, x_2\}$ 中选取x_2，把它作为新的基本变量（$s = 2$）。

此时、根据（1.29）式，有

$$\beta = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 60 \\ 100 \\ 60 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = B^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

根据(1.33)式，有

$$\theta^* = \min\left\{\frac{60}{1}, \frac{100}{5}, \frac{60}{4}\right\} = \min\{60, 20, 15\} = 15$$

因此，$r = 3$。现有基本变量中的第 3 个变量x_5从基本变量中删去,而变成新的非基本变量。也就是，改进后的基本变量组变成 $\{x_3, x_4, x_2\}$，若用$\bar{B}$表示新的基本矩阵， 则有

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

它表示，是把图1.7的点A作为经过改进的基本解选择出来的。 根据（1.39）式，目标函数之值为