航空院校成人高等教育统编教材

高等数学

（教材）

徐兵　计慕然　主编

航空工业出版社

(京)新登字161号

内 容 提 要

本书是航空院校依据航空院校1994年制定的“成人高等教育工程专科，高等数学教学基本要求”为成人专科高等教育编写的。

全书共14章，包括函数、极限、连续性、导数与微分、中值定理、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何、多元函数的微分、重积分、曲线积分、级数与常微分方程初步。

本书可作为成人高等教育专科高等数学的教材，也可作为夜大学、电视大学等专科高等数学教学参考书。

图书在版编目([redacted])数据

高等数学/徐兵[redacted]编.—[redacted]京：航空工业出版社，1995·2

ISBN 7-80046-890[redacted]

Ⅰ.高… Ⅱ.①徐…②计… Ⅲ.高等数学 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第01270号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

河北省徐水县冀强胶印厂印刷 全国各地新华书店经售

1995年4月第1版 1995年4月第1次印刷

开本：787×1092 1/32 印张：30 字数：643千字

印数：1—11000 定价：21.80元(教材：15.10元；学习辅导：6.70元)

前　言

为了适应社会主义市场经济体制的建立和经济发展对人才的需求，进一步提高航空院校成人高等教育教学质量，从1992年开始，在航空工业总公司教育培训局统筹下，航空院校成人高等教育函授、夜大学协作组重点研究了成人高等教育教学工作，扎扎实实抓好教学基础建设。大家一致认为：为了适应社会主义市场经济发展对人才的需求，必须进一步提高成人高等教育的教学质量。在教育培训局领导下，要充分发挥航空院校群体优势，组织航空院校热心成人高等教育、有丰富教学经验的专家、教授按照成人高等教育的特点重新调整和修订教学计划和教学大纲，重点编写部分基础课和专业基础课的教学基本要求、教材和自学辅导书，使教学管理工作向着规范化的方向发展。

1994年4月，成立了航空院校成人高等教育教材编委会，统一领导这项工作，并决定首先组织编写成人高等教育大专层次的高等数学教材和自学辅导书。按照统一的教学基本要求和统编教材组织教学、统一组织命题考试。在教学实践的基础上，进一步完善高等数学的教材建设，促进航空院校成人高等教育整体教学水平的提高。

我们深信，经过航空院校各级领导和广大教师的共同努力，航空院校成人高等教育的教学质量一定能够不断得到提高。

编者的话

本书是航空院校成人高等教育专科高等数学课程的统编教材。教材的内容是依航空院校成人高等教育协作组于 1994 年 4 月制定的“成人高等教育专科高等数学教学基本要求(修订稿)”而选定。

作者们在各航空院校多年来从事高等数学教学，历经成人教育与在校生多层次的教学工作。作者们不断探索与研究成人高等教育的特点及其与在校生的异同；分析专科与本科生的教学基本要求的差异。总结多年教学经验，协力编写成本书。

本书中注意几何直观，对于一些难于理解或易于误解的概念与性质，或指明其要点，或指出思考题，以期引导读者理解有关概念的实质。对于基本的计算方法，书中给出了较多的例题，注意解说方法的要点与技巧，力图使读者掌握基本方法。

在书中每节的后面选配了一定的习题和思考题，以便于读者掌握所学知识。在每章的后面选配有一份自我检查题，以备读者自我检测，达到巩固提高之目的。全书例题约 450 个，习题及自我检查题约 900 个，其中包括概念与性质的题目约 100 个。

本书为专科的工科与文科通用教材，其中标有 * * 号的章节成人工科可以不选用；标有 * 号的章节成人文科(财经、管理专业)可以不选用。工科专科所需学时约 120 至 140 学

时；文科专科所需学时约 70 至 90 学时。

本书是北京航空航天大学徐兵、计慕然主编，由西北工业大学张永曙教授主审。其中第一至三章由计慕然执笔；第四至六章由南昌航空工业学院张一龙执笔；第七至八章由郑州航空工业管理学院李宝君执笔；第九章、第十三章由南京航空航天大学王月珍执笔；第十至十二章由沈阳航空工业学院王世英、孙鸿儒执笔；第十四章由徐兵执笔。

本书可选作成人高等教育专科（工科或文科财经、管理等专业）的高等数学教材。也可选作在校专科生的高等数学课程教材或教学参考书。

编者

1995 年 1 月

目　录

第一章　函数

教学基本要求

1. 理解函数的概念。

2. 了解分段函数。

3. 理解复合函数的概念，掌握将复合函数拆成一串基本初等函数。熟悉基本初等函数及其图形。

4. 能列出简单问题中的函数关系。

函数的概念是数学中重要概念之一，它是现代数学各分支的主要研究对象，也是学习微积分的基础。

§1.1　函数概念

一、常量与变量

在实际问题中，往往离不开数量。有些数量在整个过程中，其值保持不变，这些量称为常量或常数；有些量在整个过程中可以取不同的值，这些量称为变量或变数。

例如一架客运飞机，在旅客登机至飞机起飞这个过程中，旅客人数是个变量，飞机距离起飞点的距离是个常量。而在飞机飞行的过程中，旅客人数是个常量，飞机距起飞点的距离是个变量。

由上述例子可以知道，常量或变量都是相对于一个过程而言的。

二、函数

在实际问题中，经常会遇到两个变量之间存在某种关系。为此引进函数的概念。

定义 设有两个变量，若对于变量 x 在允许范围内的每一个确定的值，变量 y 按一个确定的规则有一个或多个值与之对应，则称 y 为 x 的**函数**。记为 $y=f(x)$。其中变量 x 称为自变量，变量 y 称为因变量。

例如，$y=x^2+1$ 可以理解为对于任意的 x，变量 y 按如下规则："自变量 x 的平方加 1"与 x 相应，因此说 $y=x^2+1$ 建立了 y 与 x 的函数关系。

思考题 1　$y=c$（常数）是否建立了 y 与 x 的函数关系？

1. 函数的定义域

如果自变量取定一个值 x_0 时，函数 y 就有确定的值和它相对应，那么就称函数在 x_0 点有定义。所谓函数的定义域，就是指在函数有定义的条件下，自变量 x 允许的变化范围。通常遇到的定义域是由离散点集或区间构成的。

离散点集可以由有限多个点或无限多个点所组成的集合，如全体自然数的集合、全体整数集合、全体有理数集合等等。

区间是指介于两个实数之间的全体实数组成的集合。

若 a,b 为两个实数，且 $a<b$，则：

满足 $a<x<b$ 的实数 x 的全体称为**开区间**，记为 (a,b)；

满足 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的全体称为**闭区间**，记为 $[a,b]$；

满足 $a<x\leqslant b$ 的实数 x 的全体称为**左开右闭区间**，记为 $(a,b]$；

满足 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的全体称为**左闭右开区间**，记为 $[a,b)$。

左开右闭区间和左闭右开区间统称为**半开半闭区间**。

以上四种区间皆为有限区间，即变量只在有限范围内变化。以后还会遇到无限区间。规定：

$(a,+\infty)$表示大于 a 的全体实数组成的集合；

$[a,+\infty)$表示 a 和大于 a 的全体实数组成的集合；

$(-\infty,b)$表示小于 b 的全体实数组成的集合；

$(-\infty,b]$表示 b 和小于 b 的全体实数组成的集合；

$(-\infty,+\infty)$表示全体实数组成的集合。

如果因变量 y 是由自变量 x 经过一系列运算所得到，那么函数的定义域就是使运算关系式有意义的点 x 的全体。

要使运算关系式有意义，通常要考虑：

(1)分母不能为零；

(2)偶次方根下的数不能为负数；

(3)对数的真数必须大于零；

(4)取反正弦，反余弦的数的绝对值不能大于 1；$k\pi+\frac{\pi}{2}$ (k 为整数)不能取正切；$k\pi$(k 为整数)不能取余切。

等等。

例 1 求下列函数的定义域：

(1)$y=\sqrt{1-x^2}$；(2)$y=\frac{1}{x}\lg(x+1)$；

(3)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$；(4)$y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$

解

(1)$y=\sqrt{1-x^2}$

由于偶次方根下的数不能为负数，因此必须有

$1-x^2\geqslant 0$

解得 $-1\leqslant x\leqslant 1$

于是 $y=\sqrt{1-x^2}$的定域为$-1\leqslant x\leqslant 1$。

(2)$y=\frac{1}{x}\lg(x+1)$

由于分式的分母不能为零，对数的真数必须大于零，因此

有

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1>0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x>-1 \end{cases}$$

于是，$y=\frac{1}{x}\lg(x+1)$的定义域为$-1<x<0$和$x>0$。

(3)$y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$

由于取反正弦的数的绝对值不能大于1，偶次方根下的数不能为负数，因此

$$\begin{cases} \left|\frac{x-1}{2}\right| \leqslant 1 \\ x-2 \geqslant 0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 3 \\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

进而知　$2 \leqslant x \leqslant 3$

故　$y=\arcsin\frac{x-1}{2}+\sqrt{x-2}$的定义域为$2 \leqslant x \leqslant 3$。

(4)$y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$.

由于$k\pi+\frac{\pi}{2}$(k为整数)不能取正切，偶次方根下的数不能为负数，分式的分母不能为零，因此

$$\begin{cases} x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\text{为整数}) \\ 4-x^2>0 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\text{为整数}) \\ -2<x<2 \end{cases}$$

因此$y=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{4-x^2}}$的定义域为

$$-2<x<-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}<x<2。$$

对于实际应用问题，除了要保证运算关系式有意义之外，还要保证实际问题有意义。

如在边长为 a 的正方形铁片的四个角上各去掉一个边长为 x 的小正方形，如图 1·1 所示，从而做成一个无盖的小盒。记小盒的容积为 y，则

$$y=x(a-2x)^2$$

不难看出，对于上述关系式而言，x 可以取任意数值。但对于给定的实际问题来说，由于截去的小正方形的边长为 x，因此它必须满足 $0<x<\frac{a}{2}$。即对此实际问题而言，函数的定义域应为 $0<x<\frac{a}{2}$。

2. 函数的符号

在函数记号 $y=f(x)$ 中，$f(x)$ 是一个整体记号，不能认为是 f 与 x 的乘积。f 表示因变量 y 与自变量 x 的对应规则。如 $f(x)=x-x^2$ 意味着因变量 y 与自变量 x 之间的对应规则为 $f(\ast)=(\ast)-(\ast)^2$。

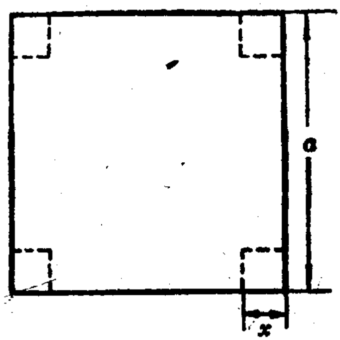

图 1·1

对于 y 与 x 之间的函数关系可以用 $y=f(x)$ 表示，也可以用 $y=g(x)$，$y=\varphi(x)$，或 $y=y(x)$ 来表示。但是必须注意，在同一个问题中，为了表示 y 与 x 的不同函数关系，必须用不同的字母来表示不同的对应规则。例如，用 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 来表示两个不同的函数；

用 $y=f_1(x)$、$y=f_2(x)$、…、$y=f_n(x)$表示 n 个不同的函数。

例 2　设 $y=f(x)=\frac{1}{1+x}$，求 $f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$、$f(x^2)$、$f^2(x-1)$、$\frac{1}{f(x)}$。

解　$f(x)=\frac{1}{1+x}$意味着对应规则为 $f(*)=\frac{1}{1+(*)}$，因此

$$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(0)=\frac{1}{1+0}=1$$

$$f(-2)=\frac{1}{1+(-2)}=-1$$

$$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f^2(x-1)=\left[\frac{1}{1+(x-1)}\right]^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{1+x}}=1+x(x\neq-1)$$

例 3　设 $y=ax^2+bx+c$，并当 $x=1$ 时，$y=0$；$x=2$ 时，$y=7$；$x=-1$ 时，$y=-2$。求 $x=-2$ 时，y 的相应取值。

解　$y=ax^2+bx+c$

因 $x=1$ 时，$y=0$，故有 $0=a\cdot1^2+b\cdot1+c$，即

$$a+b+c=0 \tag{1}$$

因 $x=2$ 时，$y=7$，故有 $7=a\cdot2^2+b\cdot2+c$，即

$$4a+2b+c=7 \tag{2}$$

因 $x=-1$ 时，$y=-2$，故有 $-2=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c$，即

$$a-b+c=-2 \tag{3}$$

由(1)、(2)、(3)联立，不难解得 $a=2$，$b=1$，$c=-3$，

因而得 $y=2x^2+x-3$
所以，当 $x=-2$ 时，$y=2\cdot(-2)^2+(-2)-3=3$

函数的定义域和函数的对应规则，一般被称为函数的两个要素。对于两个函数，只有当它们的定义域完全相同，它们的对应规则完全相同时，才能认为它们是同一函数。

例 4 下面的函数是否是同一函数？

(1) $y=\sqrt{(x+1)^2}$ 与 $y=x+1$

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$

解

(1) $y=\sqrt{(x+1)^2}$ 与 $y=x+1$ 不是同一函数。尽管其定义域完全相同，但在 $x<-1$ 时，它们的对应规则不同，因而它们是两个不同的函数。

(2) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$ 不是同一函数。因为它们的定义域不相同，前者是 $x\neq0$，而后者是 $x>0$，因此它们是两个不同的函数。

三、函数的图形

在函数 $y=f(x)$ 中，若给出一个 x 的值，相应地可以得到 y 的值，将 (x,y) 在直角坐标系 oxy 中点出，这样就可得到坐标系中一系列的点。这些点的全体（通常是一条曲线）就称为函数 $y=f(x)$ 的图形。

例如，$y=2x+1$ 的图形是过 $(0,1)$ 和 $(1,3)$ 的直线；$y=x^2$ 是过原点，且张口向上的抛物线；$y=\sqrt{1-x^2}$ 则是以原点为圆心的单位圆的上半圆周。

作函数 $y=f(x)$ 的图形，通常采用逐点描迹法。其步骤如下：

(1)在定义域中适当选取 n 个值，$x_1,x_2,\cdots,x_n$，并计算出相应的函数值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$。

(2)将$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$在直角坐标系中点出，从而得到$n$个点。

(3)将得到的n个点用光滑的曲线联结。此曲线即为$y=f(x)$的图形。

四、函数的表示法

函数的表示有多种，但常见的表示法有下列三种形式：

1. 解析法(分析法)

因变量y与自变量x通过一个运算关系式相联结。此时因变量y的值可通过对自变量x实施加、减、乘、除、乘方…等运算得到。

例如，$y=x^2+\sin x$。对任意的x，则x的平方与x的正弦之和即为相应的y值。

函数的解析法表示是函数的最重要的表示法。因为它便于在理论上对函数进行分析和研究。

2. 图象法

因变量y与自变量x的关系通过oxy平面上的一条曲线给出，此时对应规则是：对于给定的x值，在曲线上找点M，使M点的横坐标为x，则M点的纵坐标即为相应的y值(如图1·2所示)。

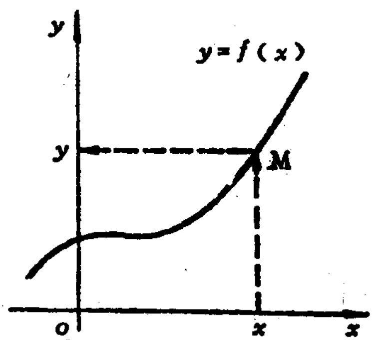

图1·2

函数图象法表示的最大优点在于直观、明显，因而在分析讨论函数时，常将解析法表示与图象法表示结合使用。