微分拓扑讲义

张筑生　编著

北京大学出版社

微分拓扑讲义

张筑生　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据 EAOl 06

微分拓扑讲义/张筑生编著. — 北京：北京大学出版社，1996.10

ISBN 7-301-03101-7

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微分拓扑-高等学校-教材 Ⅳ. O189.3

书　　名：微分拓扑讲义
著作责任者：张筑生　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-03101-7/O·374
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话：出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032
排　印　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168 毫米　32 开本　9 印张　230 千字
1996 年 10 月第一版　1996 年 10 月第一次印刷
印　　数：0001—3,000 册
定　　价：13.50 元

内 容 简 介

微分拓扑是本世纪成就和影响最大的数学分支之一，在许多学科领域有广泛重要的应用．1983年诺贝尔经济奖的得主曾生动地讲述微分拓扑方法帮助他实现关键的突破．世界著名大学都将微分拓扑列为大学生和研究生的重要课程并列为博士资格考试的重要科目．

本书是根据作者近年来多次在北京大学数学系讲授“微分拓扑”课的讲稿写成．全书共十二章，前两章和附录较详细地介绍必要的预备知识，第三章至第十二章讲述微分拓扑的基本概念与基本方法并配有重要应用的例子．全书的讲解很注重启发性，所选材料有广泛的应用面，体现了学科现代化的大趋势，适应于数学、计算、力学、物理、经济等多个学科大学生、研究生和科技工作者的需要．

本书可作为综合大学和高等师范院校数学、计算、力学、物理、经济等学科高年级大学生和研究生的教材，也可供青年数学教师和科技工作者阅读．

序　言

微分拓扑是本世纪成就和影响最大的数学分支之一．因与微分拓扑有关的研究而获得 Fields 奖殊荣的数学家就有好几位．许多国家的著名大学都将“微分拓扑”列为大学生和研究生的重要课程并且列为博士资格考试的重要项目．微分拓扑在其他学科领域也有重要的应用．1983 年诺贝尔经济学奖的得主 Gérard Debreu 在获奖演说中，对于微分拓扑的方法帮助他实现关键性的突破曾有生动的描述．(该获奖演说的译文“数学思辨模式的经济理论”载于《数学进展》杂志第 17 卷 3 期(1988 年 7 月)．)

微分拓扑的教材，较早且影响深远的有 1958 年 Milnor 在 Princeton 大学讲授微分拓扑的讲义(序言附记中所列的文献[1])．到了 60 年代，先后出现了两本讲述微分拓扑的非常精彩的小册子．1963 年出版的 Munkres 的《初等微分拓扑学》(序言附记中的[2])，着重介绍某些最基本的微分拓扑技术手段(他所称的“初等”技术)．1965 年出版的 Milnor 的《从微分观点看拓扑》(序言附记中的[3])更为人们所珍爱．该书侧重于用微分的技术手段解决拓扑问题，对许多经典的拓扑定理作了简单明快引人入胜的处理．稍后出版的微分拓扑教材还有序言附记中列出的[4]，[5] 和[6] 等，其中[4] 着重于用微分技术解决拓扑问题(可以看成是[3] 的延伸)；[6] 着重于介绍基本概念与基本技术；[5] 则对两方面都有所兼顾．

笔者多年来在北京大学给研究生和部分高年级大学生讲授微分拓扑课程．这本讲义就是整理积累的讲稿写成的．作为研究生基本课程的教材，应该有较宽广的适应面．笔者希望能兼顾“基本技术”与“解决重要而又有魅力的问题”等方面．序言附记中列出的[1]—[6] 都可作为阅读本书的重要参考资料(书末还列有其他参

考文献)．学习这门课程的预备知识是有关微分流形的一些最基本的概念与事实．本书的第一章对所需的预备知识作了简单扼要的讲解(书中的第一章,第二章和最后的附录δ是流形论基础知识的一个概述)．本书第三章至第六章重点讲解微分拓扑学的一些最基本的概念并重点介绍一些典型的技巧方法,这些都是学习微分拓扑所必须掌握的．第七章至第十二章一方面继续讲解某些重要概念,另一方面着重于介绍基本概念和典型技巧方法的广泛应用．各章所证明的著名定理对数学的各分支及其他许多学科的研究与应用都是非常重要的．在整理讲稿的时候,笔者曾为叙述的启发性而煞费苦心,希望能避免过分的形式化而强调问题的实质．第四章讲解向量丛与管状邻域、映射的光滑化与同伦的光滑化等非常重要的内容,却从很简单的引例开始,力图做到形象生动并且深入浅出．对初学者而言,在各章的学习过程中自己举出一些实例并且画一些适当的示意图形以帮助理解,仍然是很有必要的．笔者热诚欢迎读者们的意见和建议．笔者诚挚地感谢姜伯驹教授和李忠教授对本书出版的支持,感谢责任编辑刘勇所做的细致工作．

根据笔者的经验,本书的材料适用于每周授课3学时的一学期课程．如果希望对内容作适当的删减以开设一个较少学时的课程,那么以下一些建议或许有所帮助:

(1) 如果学生对点集拓扑和微分流形的基础知识已经有了较好的理解,那么第一章和第二章的大部分内容都不必在课堂上讲授．

(2) 第三章和第四章所介绍的嵌入与管状邻域技术是很重要的．但应强调的是 Whitney 嵌入定理与管状邻域定理的结论．至于这些定理证明的细节处理,在讲课的时候却是大可省略的．

(3) 第五章§3和§4的材料亦可省略．因为在该章的§5中利用参数横截定理所作的关于横截逼近定理的证明,适用于无边流形与带边流形这两种情况．

(4) 第八章至第十二章的材料可以根据实际情况有选择有重点地讲述其中的一部分. 例如,可以重点地讲述模 2 情形的映射度和相交数,然后通过类比简单地介绍定向情形的相应结论(省去大部分证明).

张筑生

1995年7月于北京大学

附记 主要参考书介绍

[1] Milnor, J., *Differential Topology*. 译文载入《从微分观点看拓扑》一书(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.

[2] Munkres, J., *Elementary Differential Topology*, Princeton University Press, 1963.《初等微分拓扑学》(李培信译),上海科学技术出版社,1966.

[3] Milnor, J., *Topology from a Differential Viewpoint*, University of Virginia Press, 1965.《从微分观点看拓扑》(熊金城译),上海科学技术出版社,1983.

[4] Guillemin, V. and Pollack, A., *Differential Topology*, Prentice Hall, Inc., 1974.

[5] Hirsch, M., *Differential Topology*, Springer-Verlag New York Inc., 1976.

[6] Bröcker, Th. and Jänich, K., *Introduction to Differential Topology*, Cambridge University Press, 1982.

关于编号的说明

项目编号 在每一章里,引理、命题、定义、定理和注记等项目用两个数码统一编号:前一数码表示项目所在的节,后一数码表示项目在该节中的顺序,两个数码之间有小圆点隔开.

公式编号 在每一章里,公式用带有圆括弧的两个数码编号:前一数码表示公式所在的节,后一数码表示公式在该节中的顺序,两个数码之间有小圆点隔开.

项目与公式的引用 在同一章中引用时,直接写出所引项目或公式的编号.在不同章中引用时,先要指明所引项目或公式所在的章,然后才是其编号.

图或图表的编号 在全书中,图和图表统一按顺序编号.

关于某些符号与用语的说明

常以 $\mathrm{id}: X \to X$ 表示集合 X 的恒同映射(id 将 X 的每一点映到自己).

常以 $\#E$ 表示集合 E 的基数(对于有限集合,就是该集合中的元素个数).

如无另外的说明,讲义中所谈到的“可数”均表示“至多可数”,即包括“有限”的情形.

对于 $\mathbb{R}$ 的有限子集 F, 常以 $\max F$ 表示 F 中的最大数,并用 $\min F$ 表示 F 中的最小数. 对于 $\mathbb{R}$ 中的更一般的(不一定有限的)子集 G, 常以 $\sup G$ 表示 G 中数的上确界,并用 $\inf G$ 表示其下确界.

符号 sgn 表示这样一个实函数:

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & \text{对于 } x>0; \\ 0, & \text{对于 } x=0; \\ -1, & \text{对于 } x<0. \end{cases}$$

这里和以后许多类似的情形,我们都以符号“$:=$”表示“定义为”,即表示“右边的式子是左边记号的定义”.

对于 $n\times n$ 方阵 A, 常以 $\det A$ 表示其行列式. 对于 $m\times n$ 矩阵 B, 约定以 $\operatorname{rank} B$ 表示它的秩.

对于拓扑空间的子集 S, 常以

$$\operatorname{int} S$$

表示 S 的内部(即由 S 的全体内点组成的集合). 还约定以

$$\overline{S}$$

表示 S 的闭包(即包含 S 的最小闭集).

设 (X, d) 是距离空间. 对于 X 的非空子集 E 和 F, 我们约定记

$$d(E, F) := \inf_{x\in E,\ y\in F} \{d(x, y)\}.$$

常用小写的拉丁字母，例如 x，表示空间 $\mathbb{R}^m$ 中的点．这时，常以带上标(或带下标)的 x 表示 x 的各分量，例如

$$x=(x^1,\cdots,x^m)\in\mathbb{R}^m.$$

常以 $\|x\|$ 表示 x 的 Euclid 范数，即

$$\|x\|:=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^m)^2}\,.$$

对于定义于 $D\subset\mathbb{R}^m$ 并且映入 $\mathbb{R}^n$ 的函数 f，也可用附以上标(或下标)的办法指明其分量，例如:

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x)),$$

其中 $x=(x^1,\cdots,x^m)\in D$．对类似这样的情形，上标的意义可以从行文中看出，不致于被误认成幂指数．

如果 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，

$$f(x)=(f^1(x),\cdots,f^n(x))$$

是定义于 D 上的连续可微映射，那么该映射的 Jacobi 行列式(常简记为 $J_f(x)$)指的是

$$\frac{\partial(f^1,\cdots,f^n)}{\partial(x^1,\cdots,x^n)}:=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial f^n}{\partial x^n}\end{vmatrix}.$$

讲义中常用“在 p 点邻近”的说法表示“在 p 点的某个邻域中”这样的意思．例如:“f 是在 p 点邻近有定义的 C^r 函数”意指“函数 f 在 p 点的某个开邻域内有定义，并且在该邻域内是 r 阶连续可微的”．

如无另外的说明，讲义中所提到的流形均被认为是满足第二可数公理的．

我们还约定用方框记号“□”表示:“证明完成”或者“证明较简单，不再写出了”这样的意思．

目　录

第一章 预备知识

阅读本书的预备知识是有关微分流形和可微映射的一些最基本的概念和一些最基本的结论．本章的 §1～§3 对这部分内容作了一个简明扼要的介绍．更详尽的材料可以从许多教科书或参考书里查到（例如参考文献的[Au], [Bo], [Ch], [Go] 和[Wa]）．

在 §4 里，将利用"逆函数定理"给出"代数基本定理"一个新颖的证明．逆函数定理是微分流形概念的基石．熟练灵活地掌握运用逆函数定理对于学习微分拓扑这门课程是至关重要的． §4 所介绍的代数基本定理的证明是运用逆函数定理的范例．经典定理的别开生面的新证明也总是能引起人们浓厚的兴趣．为了便于查阅，在附录 α 中还按照我们需要的形式陈述并证明了逆函数定理．

§1 微分流形

按照 Bourbaki 学派的观点，数学研究的对象是各种结构．通常的 Euclid 空间 $\mathbb{R}^m$ 至少有两种重要的结构：拓扑结构和代数结构（线性空间结构）．函数连续性的概念只涉及其中第一种结构．可微性的概念则涉及两种结构，因为微分 $\mathrm{D}f(x)=A$ 的定义牵涉到线性运算和极限概念：

$$f(x+h)-f(x)-Ah=o(\|h\|).$$

可微性的概念可以推广到有拓扑结构和线性代数结构这两种结构的其他空间，例如 Banach 空间（甚至更一般的拓扑线性空间）．这些有整体线性结构的空间，应该被看成"平直"的空间．人们不满足于"平直"空间的微分学，希望能进一步研究"弯曲"空间的微分学，这不仅是数学发展自然的要求，也是力学、物理与其他许多

应用数学的学科的需要.

经验告诉我们,如果不撕破,不重叠就无法把球面摊成平面区域(半球面是可以摊成平面区域的). 拓扑学也证明了球面不可能与平面区域同胚. 正因为如此,要把地球表面画成地图,就非得把球面"撕破"不可. 有好多种"撕破"的办法,对应着世界地图的好些种画法.

像球面这样的几何对象当然不可能有整体的线性结构. 但可微性的定义只涉及到函数在一点邻近的性质. 换句话说,这定义是"局部"的. 对于球面 S 这样的几何对象,如果在某点 $p\in S$ 的邻近 U 能引入局部坐标

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2,$$

那么对于函数 f: $S\to\mathbb{R}$ 自然可以讨论复合函数

$$f\circ\varphi^{-1} : \varphi(U)\to\mathbb{R}$$

在 p 点邻近的可微性(参看图 1). 但若在点 p 邻近,引入不同的

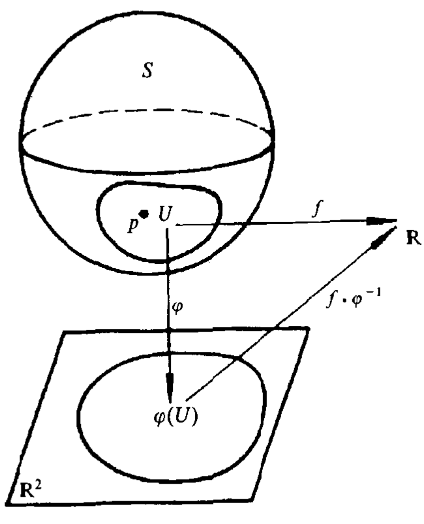

图 1

局部坐标:

$$\varphi : U \to \mathbb{R}^2, \quad \psi : V \to \mathbb{R}^2.$$

函数 $f : S \to \mathbb{R}$ 在 p 点邻近也就有两种不同的局部表示

$$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}, \quad f \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \mathbb{R}.$$

或许会发生这样的情形: f 的这两种局部坐标表示有不同的可微性质. 这时就难以根据某一局部表示定义 f 在点 $p \in U \cap V$ 的可微性. 为了避免在 $U \cap V$ 上可微性的定义出现歧义, 应该要求两局部坐标之间的坐标变换

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

和

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

都是连续可微的. 有了这样的条件, 就可以由 $f \circ \varphi^{-1}$ 的可微性推论出

$$f \circ \psi^{-1} = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \psi^{-1})$$

的可微性, 反之亦然. 这就是说: 两种局部坐标对于讨论函数 $f : S \to \mathbb{R}$ 的可微性是协调一致的或者说是相容的. 如果能找到一族局部坐标, 其定义域覆盖了整个球面 S, 并且两两在其定义域交叠的部分上是相容的, 那么就可以无歧义地讨论函数 $f : S \to \mathbb{R}$ 在整个 S 上的可微性了. 这时可以说, 在 S 上给出了一种微分结构. 微分流形定义的基本想法就是这样的.

微分流形

设 M 是一个拓扑空间, 满足 Hausdorff 分离公理. (在本书以后的各章节中, 还要求 M 满足第二可数公理, 详见第二章的有关陈述.)

(U, φ) 称为是 M 的一个**局部坐标图卡**或者一个**图卡** (chart), 如果 U 是 M 的一个开集, φ 是从 U 到 $\mathbb{R}^m$ 中的开集 $\varphi(U)$ 的同胚映射. (U 称为图卡的定义域.)

M 的两个图卡 (U, φ) 和 (V, ψ) 被称为是 $\boldsymbol{C^r}$ **相容的**, 如果有以