计算方法丛书

区域分解算法

——偏微分方程数值解新技术

吕 涛 石济民 林振宝 著

科 学 出 版 社

计 算 方 法 丛 书

区域分解算法

——偏微分方程数值解新技术

吕 涛　石济民　林振宝　著

科 学 出 版 社

1999

内 容 简 介

本书为系统地阐述近年崛起的解偏微分方程新技术—区域分解算法的第一本书。全书分基础篇与专门理论篇两部分。基础篇除介绍必备的Sobolev空间、弱解及有限元理论基础外，还着重讲述关于网格方程的预处理迭代法及偏微分方程的快速算法；专门理论篇则分章讲述不重叠型、重叠型、虚拟型及多水平型区域分解算法。

本书属当前偏微分方程数值解的前沿领域，有广泛应用前景，适合从事科学与工程计算的理论与应用工作的科研人员和工程人员、博士生、硕士生与大学高年级学生阅读。

计 算 方 法 丛 书

区域分解算法

—偏微分方程数值解新技术

吕涛 石济民 林振宝 著

责任编辑 林 鹏 刘嘉善

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年5月第 一 版 开本:850×1168 1/32

1999年5月第三次印刷 印张:14 1/8

印数:4 001—6 000 字数:363 000

ISBN 7-03-002815-5/O·525

定价:23.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈北燕〉)

《计算方法丛书》编委会

序

当今计算机的发展已将计算方法的研究推向科学研究的前沿. 事实上，科学计算已经成为继伽里略与牛顿开创的实验与理论两大方法后的第三种科研方法，并以前所未有之势推动技术革命. 在这场变革中，计算机与计算方法相互依存、相互配合，计算能力的提高依赖于这两方面的发展.

在实践中提出的科学与工程问题，如油、气藏的勘探与开发、航天飞行器的设计、大型水利设施的建筑、反应堆的设计等等，其数学模型皆属高维、大范围的偏微分方程. 所以科学计算的核心就是如何计算偏微分方程. 实践中的问题规模如此之大，单靠计算机硬件的发展是远为不够的，因此，研究高效率的计算方法在过去、现在和将来都是提高计算能力的重要途径. 回忆六十年代有限元素法的出现、七十年代多重网格法的出现，无不如此.

区域分解算法是八十年代崛起的新方向. 由于该方法能将大型问题分解为小型问题、复杂边值问题分解为简单边值问题、串行问题分解为并行问题，因此 1985 年以后研究渐趋活跃. 1987 年之后，每年召开一次国际会议. 美、苏、法、意、中国等数值分析学家竞相参加此项研究. 进入九十年代，区域分解算法已成为当今计算数学的热门领域，其趋势方兴未艾.

由于区域分解算法是新兴领域，集并行算法、预处理技术、多网格多水平技术、快速算法之大成. 迄今尚未有全面阐述各流派工作之专著问世，大量结果散存于浩如烟海的文献中，为研究者带来不便. 本书作者（中国科学院成都计算机应用研究所研究员吕涛与香港理工学院高级讲师石济民、林振宝）长期合作从事偏微分方程数值解的研究，并从 1985 年开始研究区域分解算法，在诸如覆盖型区域分解算法的加速收敛估计、变分不等式的区域分解算法、对称区域分解法等多项领域中取得瞩目成果. 现在他们在浩瀚的文献中选择有代表性的各家学说介绍于读者，其中不乏他们个人创见. 相信本书的出版将有助

于我国数值分析学家从事这一领域的研究，有利于为从事数值计算的工程人员提供最新型的算法．全书分基础篇与专门理论篇．在基础篇中，作者以简炼的笔触，阐述现代数值分析中的若干重要领域，不少简洁的证明属作者创造；专门理论篇则分类阐述美、苏、法、意及我国各流派的工作．无疑这些内容对从事理论与应用的读者皆大有裨益，故特为作序．

林群

1991 年于北京中关村

前　言

数学物理及工程问题，如油、气藏的勘探与开发、大型结构工程、航天器的设计、天气预报、反应堆计算等，无不归结于求解大型偏微分方程．计算区域往往是高维的、大范围的，其形态可能很不规则，给计算带来很大困难．过去十年中，随着并行计算机和并行算法的发展，一类被称为区域分解算法(Domain Decomposition Method)的偏微分方程数值解的新技术骤然崛起，并愈来愈受到人们重视． 1985年以前，国际核心杂志仅有少量文献，以后获得普遍关注，大批有影响的数学家加入研究行列． 1987年至今，每年召开一次国际会议，有关文献在数值分析核心杂志中逐年增多．到了九十年代，这一方法无疑已成为计算数学的热门领域．

简而言之，区域分解算法是把计算区域 Ω 分解为若干子域： $\bar{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bar{\Omega}_i$, 子域 Ω_i 的形状尽可能规则，于是原问题的求解转化为在子域上求解．区域分解算法特别受关注是因为它具有其它方法无以比拟的优越性：

1. 它把大问题化为若干小问题，缩小计算规模．

2. 子区域形状如果规则（如长方形），其上或者允许使用熟知的快速算法，如快速 Fourier 变换 (FFT) 、谱方法、τ 方法等；或者已经有解这类规则问题的高效率软件备用．

3. 允许使用局部拟一致网格，无需用整体拟一致网格．甚至各子域可以用不同离散方法进行计算．这对于形态极不规则的问题，如锅炉燃烧问题：炉体部分与烟筒部分几何尺寸相差很大，整体计算为了对付烟筒部分，不得不把网格加得很密，而区域分解算法可以把这两部分分别处理，具有很大的灵活性．其它如建筑结构中的板、梁组合结构，轧辊设计等也有类似情况．

4. 允许在不同子域选用不同的数学模型，以便整体模型更适合于工程物理实际情况．例如，油、气藏模拟中，靠近井

管部分流速快，应服从非 Darcy 流规律，而远离井管处则服从 Darcy 流规律，分解区域时应考虑在不同子域选用不同数学模型；又如气体绕飞行体流动，在边界层附近为粘性流，在边界层外为无粘流，二者有不同的数学模型，使用区域分解算法易于在不同子域选用更合于实际的模型；再如对数学中颇为棘手的混合型方程，如果我们把区域的椭圆型部分与双曲型部分作为两个子域考虑，在子域内进行计算，就简单多了.

5. 算法是高度并行的，即计算的主要步骤是在各子域内独立进行的.

6. 其它. 对对称区域问题有更简单的区域分解算法.

上述各点，以缩小规模及并行计算尤为根本.

区域分解算法的发展史，最原始的思想可追溯到 1870 年德国数学家 H.A.Schwarz 提出的著名的 Schwarz 交替法，但 Schwarz 本意是借用交替法论证非规则椭圆型方程解的存在性与唯一性，直到本世纪五十年代，才有人把 Schwarz 方法用于计算，但未能引起计算数学家的特别注意. 近十年来，由于并行计算机问世并且日益普及，经典的串行计算格局不适应于并行计算机，传统的算法受到挑战. 如何构造高度并行的算法是提高计算速度的关键. 我们面临的科学与工程问题是如此之浩大，计算能力的提高有赖于计算机与计算方法两方面的发展，而区域分解算法正是在这种背景下应运而生.

由于区域分解算法目前仍处于发展阶段，美国、苏联、法国、意大利皆形成了自己的流派，我国康立山教授在八十年代初就提出以 Schwarz 交替法为基础的异步并行算法，并出版专著. 但是据作者所知，迄今大量工作尚散见于文献中，为了便于学习与应用，作者不量孤陋寡闻编著本书奉献于读者. 无疑，既囿于作者知识面，也囿于篇幅限制，本书不可能全面反映各方面结果，材料选择上不免有重要遗漏，甚至有错，凡此皆仰赖有识之士不吝指正.

鉴于区域分解算法要涉及到当代计算数学的许多新成果，为了方便读者，本书在基础篇中对现代计算数学主要领域作了简略的回顾，内容有 Sobolev 空间、椭圆型方程弱解、有限元基础、预处理迭代法、快速算法等. 对于已掌握偏微分方程和有限元素法的读者，可从第四章读起. 在专门理论篇中分别按非覆盖型、覆盖型、虚拟型、多水平型介绍区域分解算法. 各章评注、参考文献、索引、中英词汇对照放在书末，以方便读

者.

作者能编写此书实有赖于中国科学院系统所研究员林群先生的鼓励，若干内容曾应邀在系统所举办的讨论班上作了报告，部分内容曾作为教材在中科院成都数理室为硕士生讲授，林群先生百忙中审阅本书并作序介绍，作者借此深表谢忱.

吕涛，石济民，林振宝

1991年2月于北京中关村

Domain Decomposition Methods — New Numerical Techniques for Solving PDE

Lü Tao T.M. Shih C.B. Liem

Abstract

Domain Decomposition Methods (DDM) are new techniques for solving partial differential equations. This book is probably one of the earliest which introduces the DDM systematically. It consists of nine chapters arranged into two parts:

Part I Fundamental theory of partial differential equations and their numerical solutions

Chapter 1 Sobolev spaces
Chapter 2 Weak solution theory of elliptic equations
Chapter 3 Finite element methods
Chapter 4 Preconditioned iterative methods of grid equations
Chapter 5 Fast solvers of partial differential equations

Part II Domain decomposition methods

Chapter 6 Domain decomposition methods for nonoverlapping subdomains
Chapter 7 Domain decomposition methods for overlapping subdomains
Chapter 8 Ficticious domain methods
Chapter 9 Multilevel methods

The book touches the frontier of numerical solutions of partial differential equations. It would be useful for researchers and engineers working in theoretical and applied sciences. Advanced undergraduates and graduate students should also find this book beneficial.

符号便览

向量与矩阵

$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$x=[x_1,\cdots,x_n]^T$	$\mathbb{R}^n$ 的列向量
$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$	向量 x 与 y 的欧氏内积
$\lVert x\rVert=\langle x,x\rangle^{1/2}$	向量 x 的欧氏范
$A=[a_{ij}]$	n 阶实方阵
A^T	A 的转置
$\lambda(A)$	A 的本征值
$\rho(A)=\max_i\lvert\lambda_i\rvert$	A 的谱半径
$\lVert A\rVert=\sqrt{\rho(A^TA)}$	A 的谱范（欧氏范），若 $A=A^T$，则 $\lVert A\rVert=\rho(A)$
A^{-1}	A 的逆矩阵
$\langle x,y\rangle_A=\langle Ax,y\rangle$	向量 x 和 y 的能量内积，其中 A 是对称正定矩阵
$\kappa(A)=\lVert A\rVert\lVert A^{-1}\rVert$	A 的条件数
$A\otimes B$	$m\times n$ 阶矩阵 A 与 $p\times q$ 阶矩阵 B 的直积也称张量积
$\vec{A}$	矩阵 A 的拉直
$\text{diag}\,(a_{11},\cdots,a_{nn})$	以 $a_{11},\cdots,a_{nn}$ 为对角元的对角阵
$\text{blockdiag}\,(A_{11},\cdots,A_{nn})$	以阵 $A_{11},\cdots,A_{nn}$ 为块对角元的块对角阵
$\text{tridiag}\,(b_{ii},a_{ii},C_{ii})$	三对角矩阵
$\text{Schur}\,(A)$	块结构矩阵 A 的 Schur 分解后的容度矩阵

函数空间

X	抽象 Banach 空间
X^*	X 的共轭空间

$\langle\cdot,\cdot\rangle$	X 和 X^* 的配对
H	抽象 Hilbert 空间
Ω	$I\!R^n(n=2,3)$ 的有界开集
$\bar{\Omega}$	Ω 的闭包
$\partial\Omega$	Ω 的边界
$\boldsymbol{\nu}$	$\partial\Omega$ 的单位外法向向量
$\Omega_1\subset\subset\Omega$	指 $\Omega_1\subset\Omega$, 且 dist $(\partial\Omega_1,\partial\Omega)>0$
$L_p(\Omega)$	Ω 上 $p(1<p<\infty)$ 次乘方可积函数空间
$L_\infty(\Omega)$	Ω 上真性有界函数空间
$W_p^m(\Omega)$	Sobolev 空间， m 阶广义导数属于 $L_p(\Omega)$
$C^k(\Omega)$	Ω 上 k 次连续可微函数空间
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Hölder 空间， $0<\alpha\le 1$
$C_0^\infty(\Omega)$	支集属于 Ω 的无穷可微函数空间
$\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ 函数在 $W_p^m(\Omega)$ 意义下构成的闭子空间
$H^m(\Omega)$	$W_2^m(\Omega)$ 的简记
$H_0^m(\Omega)$	$\overset{\circ}{W}{}_2^m(\Omega)$ 的简记
$\\|\cdot\\|_{m,p,\Omega}$	$W_p^m(\Omega)$ 的范，在不至混淆处简记为 $\\|\cdot\\|_{m,p}$
$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$	$W_p^m(\Omega)$ 的半范，在不至混淆处简记为 $\|\cdot\|_{m,p}$
$\\|\cdot\\|_{m,\Omega}$	$H^m(\Omega)$ 的范，在不至混淆处简记为 $\\|\cdot\\|_m$
$\|\cdot\|_{m,\Omega}$	$H^m(\Omega)$ 的半范，在不至混淆处简记为 $\|\cdot\|_m$
$X\hookrightarrow Y$	空间 X 连续嵌入到 Y
$(X_0,X_1)_{\theta,q}$	Banach 空间 X_0 和 X_1 的内插空间
$B_p^{\theta,q}(\Omega)$	Besov 空间
$W_p^s(\Omega)$	实指标 Sobolev 空间
$H^s(\Omega)$	$W_2^s(\Omega)$ 的简记
$H_0^s(\Omega)$	$C_0^\infty(\Omega)$ 函数关于 $H^s(\Omega)$ 的闭子空间
Γ	边界 $\partial\Omega$ 的开子集
$H^s(\Gamma)$	Γ 上 Sobolev 空间
$H_0^s(\Gamma)$	$C_0^\infty(\Gamma)$ 关于 $H^s(\Gamma)$ 的闭包
$H_{00}^{1/2}(\Gamma)$	$H_0^1(\Gamma)$ 与 $L_2(\Gamma)$ 的内插空间，即 $(L_2(\Gamma),H_0^1(\Gamma))_{1/2,2}$
$\\|\cdot\\|_X$	一般 Banach 空间 X 的范
$x_n\to x$	序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x
$x_n\rightharpoonup x$	序列 $\{x_n\}$ 弱收敛于

有限元

(e, P, Σ)	抽象有限元三元集
$(\hat{e}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$	标准(参考)有限元
$\mathcal{J}^h$	Ω 的三角剖分, h 是剖分参数
S^h	试探函数空间
S_0^h	$S^h \cap H_0^1(\Omega)$
φ_i	与结点 i 对应的基函数
$a(\cdot,\cdot)$	Ω 上函数空间的双线性泛函. 如 $a(\cdot,\cdot)$ 对称正定, 则确定为能量内积
$a_{\Omega_i}(\cdot,\cdot)$	在子域 Ω_i 上定义的双线性泛函, 也简记为 $a_i(\cdot,\cdot)$
$\\| \cdots \\|_a$	由 $a(\cdot,\cdot)$ 定义的能量范, 即 $\\|u\\|_a^2 = a(u,u)$

算子

$K : X_1 \to X_2$	线性算子 K 映 Banach 空间 X_1 到 Banach 空间 X_2
K^*	K 的共轭算子
$\mathcal{D}(K)$	K 的定义域
$\mathcal{R}(K)$	K 的值域
Ker (K)	K 的核, 即 K 的化零子空间, 也记为 $\mathcal{N}(K)$
D_i	微分算子 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 的缩写
D^α	$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 为多重指标, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}$, 并且 $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$
∇	梯度算子
L	常指一般椭圆型微分算子
Δ	Laplace 算子

目　录

第一篇　偏微分方程及其数值解现代理论基础