中国科学院科学出版基金资助项目

张量几何
及其
在电机和电力系统中的应用

丘昌涛 编著

科 学 出 版 社

1 9 9 1

序

自从本世纪30年代初期 G. 克朗（Kron）创立电机和网络的张量几何理论以来，已经过去了半个多世纪[1-5]. G. 克朗是一位杰出的工程科学家，他于1968年逝世. 他的一生是创造性的一生，他创立了旋转电机的统一理论[1-4]、网络的变换理论[5]、网络分割论[6]，把张量算法和高维弯曲几何理论与工程科学的实际紧密地联系起来. 这些理论和方法已广泛应用于解决大型复杂的电力系统工程问题和其他问题[8,9]. G. 克朗的思想、概念、理论和方法在中国、欧美、日本和世界其他国家的电机工程界、物理界和数学界都有广泛而深刻的影响[7-10]. 在中国，萨本栋1929年就曾提出过电路的并矢分析[11]，顾毓琇、章名涛、余耀南、吴大榕等人都做过网络或电机的张量分析的工作[12-17]. 在国外，如美国的 B. 霍夫曼、H. H. 哈普、C. 康柯蒂阿、L. V. 标利等人，英国的 R. T. 阿克莱、W. J. 吉卜斯、J. W. 赖昂、B. 阿金斯等人，日本的近藤一夫、伊理正夫等人及其他许多学者和工程师都做过许多有关网络、电机和电力系统的张量分析的研究和应用工作，发表了大量的文章和专著[7-22]. 50年代初在英国创立的英国张量学会（TSGB），在日本创立的应用几何研究会（RAAG）和日本张量学会（JTS），1988年在中国电机工程学会内成立的电工数学研究会等均对发展近代数学在电机工程及其他工程科学中的应用，起了积极的组织和推进作用.

应用张量算法，结合高维几何理论进行工程科学的研究，可以使复杂的工程现象得到高度抽象的概括；可以用几何学方法作为有力的分析工具；可以将不同的工程对象和物理对象用张量几何的语言统一起来进行分析，以致在某些方面节约思维和计算精力；可以统一处理电机及电力系统的坐标转换，从而导出新的坐标系；可以用张量方法得出电机的等值电路；特别是，结合电子计算机应用，可以得出既节约内存又能提高解题速度的计算方法[7-34]. 因此，这方面的工作越来越引起电机工程界的重视.

但是，由于张量算法和几何理论的抽象和貌似困难，以及某些人误认为张量几何的工程应用研究是理论脱离实际，因而对这一方面课题的研究、推广均缺乏应有的重视与支持，以致至今在我国还极少出版有关这一学科分支的书籍，实在是非常可惜的事.

为了弥补我国这方面读物的不足，使想要了解和掌握这方面知识的电机工程界同行和有关这个专业的研究生和大学高年级学生，能较迅速而方便地掌握必要的张量算法和高维弯曲几何的理论基础及其在电机工程中的某些应用，以促进这个学科领域的研究和应用，使这一学科分支能够得到进一步的发展，编著者特地写了讲义，并从1982年起，在东北电力学院研究生中开设这门课程，已讲授过八届. 作为教材，它可供40—50学时课堂讲授之用. 经过多年来的使用，基本上能满足要求，学生在内容掌握上并无困难. 1986年以来，又对讲义作了全面修改与补充，形成了最后的手稿[17].

本书讲述张量几何的基本理论和方法及其在电机和电力系统中的应用. 全书首先着重于张量算法及几何理论基础知识，目的在于打下适当的基础. 虽然本书的读者对象主要是大学高年级学生、研究生和电机工程科学工作者，但也考虑了广大电机工程师阅读的

需要，书中着重讲述工程应用，而不追求严格的数学证明，全书写得便于读者能够通过自学掌握书中要点，并在实际工程中得到应用.

全书分三篇共二十四章，包括张量几何基础、经典力学系统及张量几何在电机、电力系统中应用三部分. 仔细阅读第一篇是很重要的，因为这是全书的理论基础，特别要注意熟练掌握指标记号和爱因斯坦作和规约，掌握坐标变换及不变量的概念，深刻理解向量的逆变和协变的含义及其变换规律，掌握张量的概念及其代数运算. 在定义了协变和逆变基本度量张量，确定了它们之间的关系后，引出了指标的上移和下移的运算. 第六至十三章讲述张量分析及其在高维弯曲几何中的应用. 在讲述克里斯多夫记号、张量的绝对微分、张量的绝对导数和协变导数的基础上，阐明了向量平行移动的概念，建立了向量平移方程式，由此导出了空间的测地线方程，包括在完整坐标系和非完整坐标系上的黎曼空间和仿射联络空间的测地线方程. 在阐明空间的曲率张量、挠率张量和非完整几何对象的基础上，导出了完整坐标系和非完整坐标系上黎曼空间和仿射联络空间的测地离差方程，也介绍了常用的拟完整坐标系. 这一篇是电机工程应用的理论基础[1~4,17,35~66].

第二篇讲述经典力学系统，着重讲述了约束的概念，建立起完整和非完整力学系统的拉格朗日质点运动方程式[67]. 仔细阅读这一篇是重要的，因为电机工程用的一些概念和术语来自力学系统，但熟悉力学系统的读者可以跳过去，直接阅读第三篇.

第三篇讲述张量几何在电机和电力系统中的应用，这一篇实际上是工程应用篇，是本书的重点，主要说明如何把张量算法及几何理论和方法与电机工程实际联系起来，从而建立起工程对象的几何模型及几何分析方法[1~66,68~92]. 在讲述网络的张量理论时，着重讲了原网络及网络的变换公式，这是 G. 克朗的网络理论的核心. 几十年来，G. 克朗理论中存在的关于功率不变性假设的错误与变换公式的正确之间的矛盾问题，使 G. 克朗受到许多指责，几乎否定了他的非常有用的原网络. 因此本书第十六章重点介绍了网络的射影理论，充分肯定了 G. 克朗的原网络和变换公式的正确性，并澄清其网络理论中某些关键性错误[22,24,27,68~72]. 第十七章讲述如何用统一的几何和代数方法去处理电力系统中应用的对称坐标法[25,26,73,~80]，目的在于使读者能遵循一定的途径去寻求并发现新的坐标系. 第十八章介绍了由 G. 克朗所创立，并由他和 H. H. 哈普发展和应用的网络分割论. 因为专门讲述分割法的书籍已经出版，本书只作了概括的介绍，需要深入学习的读者，可以参阅 G. 克朗和 H. H. 哈普的专著[6~9,40,41,44].

第十九至二十三章讲述张量几何在电机中的应用. 由于工程实践中首先与电机相联系的表征空间是黎曼空间，因此把黎曼空间的完整机作为原电机，而与 G. 克朗用拟完整坐标系上的电机为原机作为推理的基础不同[1,4]. 从原机出发，用几何变换的方法导出了各种坐标系上、不同结构、不同绕组联接、不同性能的电机的特性方程式[4,37,42]. 由于同步发电机是电力系统中的主机，因此专门讲述了几何理论和方法在同步发电机中的应用[4,26,37,47,78,79,90]，还特别讲述了如何用张量方法实现电机的等值电路的方法，这是 G. 克朗的重要创造之一[26,52,55,57]. 也讲述了非常新颖的同步电机射影分析法[27,31].

最后一章讲述张量几何在电力系统稳定性中的应用. 这是一个非常值得研究和开发的领域. 远在 50 年代初，G. 克朗就指出："那些黎曼-克里斯多夫张量等是极为重视实际的技术业务人员……，在不远的将来，他们将使电气工程师得到更多的发电机出力，……即以较低廉的造价生产更大容量的发电机，并且更为经济地送到更远的距离"，[42,43] 也就

是说，应用抽象的几何理论于电力系统，导致改进控制系统，例如采用 PSS，OEC 或非线性控制等调节器，以改变曲率张量或协变导数，使测地离差为有限，从而可大大提高电力系统稳定性和发送电能力[18,23,43-45,51,80-92]．这是本书论述的重要方面．近十多年来兴起和发展起来的电力系统非线性控制的几何理论，把抽象的拓扑学和李导数等应用于电力系统稳定控制，取得了很好的效果，这是当年 G. 克朗的系统控制几何理论和方法的进一步发展，清华大学和电力科学院的同行专家们正在从事这方面的开发研究工作．

为了使读者对 G. 克朗的学术思想的发展有更好的了解，附录一介绍了 G. 克朗的原电机[4]，附录二则详尽的介绍了 G. 克朗的生平[8]．书末列出了参考文献，供读者查阅和进一步研究之用．

如前所述，本书的内容包括张量几何基础及其在电机电力系统中的应用，由于有关拓扑学和图论方面的书籍已有许多专著，本书就不再去讲述．有些较深入的内容也没有列入，需要了解的读者，可以参阅 G. 克朗的原著[1-6,35-59]及其他有关文献．书中有些内容是编著者多年来的研究成果[23-34]，但有些问题只能当作研究的开始，还需要作进一步研究与发展．

在编写本书的过程中，曾得到清华大学的高景德、黄眉、孙绍先、程式等各位教授和已故的章名涛、钟士模教授的热情帮助和鼓励，得到电力科学院王平洋教授以及东北电力学院许多同事的帮助，吉林电业局王素之工程师对书稿的整理出版做了大量的工作，在此，编著者对上述各位教授和同事表示衷心的感谢．特别是清华大学校长高景德教授在百忙中审阅了全书的手稿，编著者对他表示由衷的谢意．

由于作者水平所限，文中叙述不当或错误之处在所难免，欢迎读者批评指正．

丘昌涛

1989 年 1 月于吉林

目　录

第二篇　经典力学系统

第三篇 张量几何在电机和电力系统中的应用

第一篇　张量几何基础

第一章　指标记号与作和规约

§1-1　指 标 记 号

N 个量 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 用记号 $x_k(k=1,2,\cdots,N)$ 表示；N个量 $x^1,x^2,\cdots,x^N$ 用记号 $x^l(l=1,2,\cdots,N)$ 表示。x 称为核文字，附在 x 右下方的字母 k 称为下指标，附在 x 右上方的字母 l 称为上指标。上指标绝无方幂之意，仅表示量 x 的逆变分量；下指标则表示量 x 的协变分量[60-65]。

同理，x_{kl}，x^{kl}，$x_l^k(k,l=1,2,\cdots,N)$ 表示共有 N^2 个量；而 x_{klm}，x^{klm}，x_{lm}^k $(k,l,m=1,2,\cdots,N)$ 则表示共有 N^3 个量。总之，核文字共附有 p 个指标字母，表示总共有 N^p 个量。

例如普通三维空间一点的坐标 x_1,x_2,x_3 就写作 $x_k(k=1,2,3)$。又如具有N条支路的电路，其支路电势源 $e_1,e_2,\cdots,e_N$ 就记作 e_m $(m=1,2,\cdots,N)$；其支路电流 i^1，i^2，$\cdots,i^N$ 记作 $i^n(n=1,2,\cdots,N)$；其支路的自阻抗和互阻抗

$$\begin{array}{l}
Z_{11},Z_{12},\cdots,Z_{1N};\\
Z_{21},Z_{22},\cdots,Z_{2N};\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Z_{N1},N_{N2},\cdots,Z_{NN};
\end{array}$$

用 Z_{mn} $(m,n=1,2,\cdots,N)$ 表示。这种写法，叫做指标记号[60]。

§1-2　作 和 规 约

在作总和的式子里，采用爱因斯坦作和规约，即在指标记号表示的式子里，同一项中同时出现相同的一个上指标和一个下指标，表示为由 1 到N作和[60-65]。

例如，线性型

$$S=a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_Nx^N{}^{1)},$$

可用总和记号$\sum$表示为

$$S=\sum_{k=1}^{N}a_kx^k,$$

为了简化书写，我们把总和记号$\sum$去掉，而写成

1) 为了区别逆变指标和幂次，以后用圆括弧外加字母或数字表示幂次，如 i^1 的平方写成 $(i^1)^2$。

$$S = a_k x^k, \tag{1.1}$$

其中 k 表示由 1 到 N 作和。

根据作和规约，有 N 条支路的网络，其支路电压方程式为

$$\begin{aligned} e_1 - \hat{u}_1 &= Z_{11}i^1 + Z_{12}i^2 + \cdots + Z_{1N}i^N, \\ e_2 - \hat{u}_2 &= Z_{21}i^1 + Z_{22}i^2 + \cdots + Z_{2N}i^N, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_N - \hat{u}_N &= Z_{N1}i^1 + Z_{N2}i^2 + \cdots + Z_{NN}i^N. \end{aligned}$$

可写成

$$\begin{aligned} e_m - \hat{u}_m &= Z_{m1}i^1 + Z_{m2}i^2 + \cdots + Z_{mN}i^N (m = 1, 2, \cdots, N) \\ &= \sum_{n=1}^{N} Z_{mn}i^n = Z_{mn}i^n \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$(m, n = 1, 2, \cdots, N).$$

式(2.2)表示共有 m 个方程式，每个方程式的右边共有 N 项作和。式中不重复的指标叫做自由指标，重复的指标叫做哑指标。自由指标由 1 到 N 但不作和，哑指标由 1 到 N 作和。显然，哑指标的字母可以任意更换，例如，

$$S = a_k x^k = a_m x^m = a_l x^l = a_\alpha x^\alpha = a_\beta x^\beta.$$

等式二边的自由指标必须相同，例如

$$e_m - \hat{u}_m = Z_{mn}i^n = Z_{ml}i^l = Z_{mk}i^k \neq Z_{kn}i^n.$$

§ 1-3 例 子

为了熟悉指标记号与作和规约，我们再举几个例子。

(1) 克朗奈克记号，定义为

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & 若\ i = j; \\ 0, & 若\ i \neq j. \end{cases} \tag{1.3}$$

它表示：

$$\begin{aligned} &\delta_1^1 = \delta_2^2 = \cdots = \delta_N^N = 1, \\ &\delta_2^1 = \delta_1^2 = \cdots = \delta_{\gamma+1}^{\gamma} = 0, \\ &\delta_\alpha^\alpha = \delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_N^N = N. \end{aligned}$$

(2) 多元函数的全微分

若
$$y = f(x^1, x^2, \cdots, x^N) = f(x^k),$$
则

$$\begin{aligned} dy &= \frac{\partial y}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial y}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial y}{\partial x^N}dx^N \\ &= \frac{\partial y}{\partial x^k}dx^k, \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, N).$$

(3) 二次型

$S = a_{mn}x^m x^n$ $(m, n = 1, 2, 3)$ 表示共有 9 项作和，即

$$
\begin{aligned}
S &= a_{mn}x^m x^n \\
&= a_{m1}x^m x^1 + a_{m2}x^m x^2 + a_{m3}x^m x^3 \\
&= a_{11}x^1x^1 + a_{12}x^1x^2 + a_{13}x^1x^3 \\
&\quad + a_{21}x^2x^1 + a_{22}x^2x^2 + a_{23}x^2x^3 \\
&\quad + a_{31}x^3x^1 + a_{32}x^3x^2 + a_{33}x^3x^3,
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

其他情形，依此类推.

§ 1-4 指标记号与矩阵符号

让我们再说明一下指标记号与矩阵符号的关系：

(1) N 个数 $x^k(k=1,2,\cdots,N)$ 可用一行矩阵或列矩阵表示：

$$
x^k = \begin{array}{c} \diagdown k \rightarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x^1 & x^2 & \cdots & x^N \\ \hline \end{array} \end{array}
$$

(2) N^2 个数 a_{mn} $(m,n=1,2,\cdots,N)$ 可用一方阵表示：

$$
a_{mn} = \begin{array}{c|cccc} m\diagdown n & & & & \\ \hline & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{array}.
$$

(3) 克朗奈克记号用单位矩阵 I 表示：

$$
\delta^i_j = \begin{array}{c|cccc} i\diagdown j & & & & \\ \hline & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{array} = I.
$$

(4) 线性型用矩阵表示为

$$
S = a_k x^k = \begin{array}{c} \diagdown k \rightarrow \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_1 & a_2 & \cdots & a_N \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|} k\diagdown & \\ \downarrow & x^1 \\ & x^2 \\ & \vdots \\ & x^N \\ \end{array}.
$$

(5) N 条支路电路之电压方程式：

$$
e_m-\hat{u}_m=Z_{mn}i^n=\begin{array}{c|c} & n\rightarrow \\ \hline m\downarrow & \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \cdots & Z_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline n\downarrow & \begin{bmatrix} i^1 \\ i^2 \\ \vdots \\ i^N \end{bmatrix} \end{array}
$$

(6) 二次型用矩阵表示为

$$
S=a_{mn}x^m x^n
$$

$$
=\begin{array}{c} m\rightarrow \\ \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & n\rightarrow \\ \hline m\downarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline n\downarrow & \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \end{array}
$$

指标作和与矩阵乘法有一个重大的差别，就是矩阵相乘其次序不可交换，如 AB 必须是 A 的行元素乘以 B 的列元素作和，而指标作和却与次序无关，写成矩阵形式时它是按指定的字母进行的，可以列与列相乘，也可以行与行相乘。例如二次型可以写成以下各种形式：

$$
S=\begin{array}{c} m\rightarrow \\ \begin{bmatrix} x^1 & x^2 & \cdots & x^N \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & n\rightarrow \\ \hline m\downarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline n\downarrow & \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$
=\begin{array}{c|c} & \\ \hline m\downarrow & \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & n\rightarrow \\ \hline m\downarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c|c} & \\ \hline n\downarrow & \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{bmatrix} \end{array}
$$

第二章 坐标变换

§2-1 N 维空间 V_N

在普通的三维空间中，空间的点要用三个独立的坐标来确定．在空间一个面上的点，可以用二个独立的面上的坐标来确定，面是二维空间．在空间曲线上的点，只需用线上一个坐标来确定，因而线是一维空间．由此，若空间只有一点，则是零维空间．

我们将空间的概念推广到N个坐标上去，为了在 $N=3$，$N=2$，$N=1$ 时仍然和普通空间的意义相符，我们仍旧叫空间．

我们称N个变数 $x^k(k=1,2,\cdots,N)$ 的集合为点，变数 x^k 叫做点的坐标，与所有坐标对应的点的全体，组成一个N维空间 V_N．

在 V_N 内的各点可以用一个单一参数的函数表示的，其全体叫 V_N 内的曲线，定义为

$$x^k=x^k(u),\ (k=1,2,\cdots,N), \tag{2.1}$$

式中 u 是参变数．

在 V_N 中的点能用 M 个独立变数表示的，其全体叫 V_N 的子空间，应满足下列关系：

$$x^k=x^k(u^1,u^2,\cdots,u^M)\ (k=1,2,\cdots,N), \tag{2.2}$$

且

$$M<N,$$

这种子空间，叫做沉浸在 V_N 之中，若 $M=N-1$，则 V_{N-1} 叫空间 V_N 上的超曲面[60-65]．

力学中作为高维空间的例子，例如一根在普通空间中运动的棒，其形相可以用棒的一端的笛卡儿坐标 x,y,z 及该棒与三个坐标轴形成的斜角 θ,φ,ϕ 等六个独立变数确定，因此棒的形相空间是六维空间．由N条自行短路的支路构成的网络，每一条支路通过的电荷 q_n 是独立变数，共有N个独立变数，因而可视作N维空间．

§2-2 坐标变换[60]

设在 V_N 中有一坐标系 y^α $(\alpha=1,2,\cdots,N)$，叫做旧坐标系，另有一坐标系 x^k $(k=1,2,\cdots,M)$，可叫新坐标系，则下式定义一个坐标变换 T：

$$y^\alpha=y^\alpha(x^k)\ (\alpha=1,2,\cdots,N;\ k=1,2,\cdots,M), \tag{2.3}$$

其中 y^α 是 x^k 的单值连续可微函数．

(1) 如图 2-1，设平面正交笛卡儿坐标系为旧坐标系 $y^\alpha(\alpha=1,2)$，经旋转 θ_0 后的正交笛卡儿坐标系为新坐标系 $x^k(k=1,2)$，则有坐标变换式

$$T: \begin{cases} y^1 = (\cos\theta_0)x^1 + (\sin\theta_0)x^2, \\ y^2 = (-\sin\theta_0)x^1 + (\cos\theta_0)x^2. \end{cases} \tag{2.4}$$

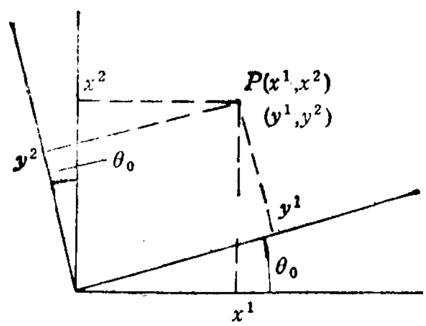

图 2-1

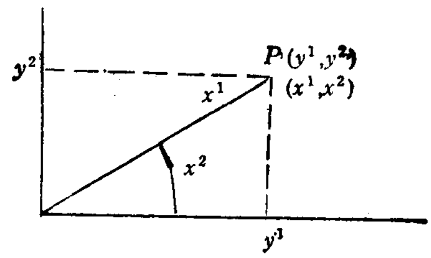

图 2-2

(2) 如图 2-2，设旧坐标系为正交笛卡儿坐标系 $y^\alpha(\alpha=1,2)$，新坐标系为平面极坐标系 $x^k(k=1,2)$，其坐标变换式为

$$T: \begin{cases} y^1 = (\cos x^2)x^1, \\ y^2 = (\sin x^2)x^1. \end{cases} \tag{2.5}$$

(3) 如图 2-3，设旧系为普通三维空间笛卡儿坐标系，新系为球坐标系，则有变换式

$$T: \begin{cases} y^1 = x^1 \sin x^2 \cos x^3, \\ y^2 = x^1 \sin x^2 \sin x^3, \\ y^3 = x^1 \cos x^2. \end{cases} \tag{2.6}$$

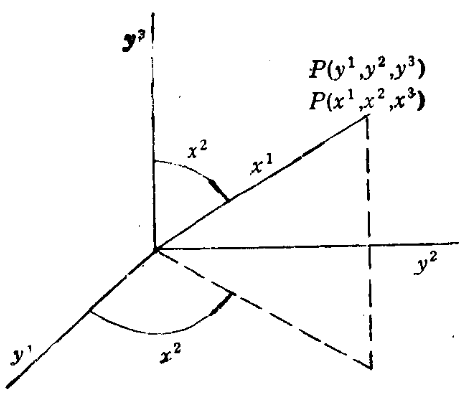

图 2-3

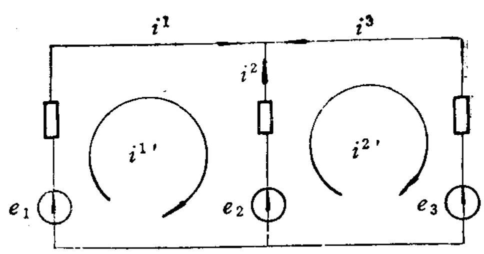

图 2-4

(4) 如图 2-4，网络的支路电流 $i^k(k=1,2,3)$，可用回路电流 $i^{k'}(k'=1,2)$ 表示，则旧系 k 与新系 k' 的坐标变换式为

$$T: \begin{cases} i^1 = i^{1'}, \\ i^2 = -i^{1'} + i^{2'}, \\ i^3 = -i^{2'}. \end{cases} \tag{2.7}$$

§2-3 函数行列式

若N个变数 $x^k(k=1,2,\cdots,N)$ 的N个函数

$$y^\alpha = y^\alpha(x^k) \quad (\alpha = 1,2,\cdots,N), \tag{2.8}$$

及此函数 y 对变数 x 的偏导数在所研究的区域内有限且连续，则以各个 y 对各个 x 的一阶偏导数为元素构成的行列式，叫函数行列式或叫雅可比式[60]，即

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^N} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y^N}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^N}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial y^N}{\partial x^N} \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k} \right|. \tag{2.9}$$

(1) 变换式(2.4)的函数行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{vmatrix} = \cos^2\theta_0 + \sin^2\theta_0 = 1. \tag{2.10}$$

(2) 变换式(2.5)的函数行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1\sin x^2 \\ \sin x^2 & x^1\cos x^2 \end{vmatrix} = x^1. \tag{2.11}$$

(3) 变换式(2.6)的函数行列式为

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x^2\cos x^3 & x^1\cos x^2\cos x^3 & -x^1\sin x^2\sin x^3 \\ \sin x^2\sin x^3 & x^1\cos x^2\sin x^3 & x^1\sin x^2\cos x^3 \\ \cos x^2 & -x^1\sin x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (x^1)^2\sin x^2. \tag{2.12}$$

(4) 变换式(2.7)的函数行列式不定义。

象变换式(2.4)及(2.7)中，系数 $C_k^\alpha = \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}$ 为常数的，叫线性变换；而像变换式(2.5)及(2.6)中的系数 C_k^α 是变数 x^k 的函数，叫非线性变换。

§2-4 许 可 变 换

当坐标变换时，其函数行列式不为零的 $(J \neq 0)$，叫许可变换。这时可作其逆变换

$$T^{-1}:\ x^k = x^k(y^\alpha) \quad (k,\alpha = 1,2,\cdots,N). \tag{2.13}$$

(1) 变换式(2.4)的逆变换为

$$T^{-1}:\begin{cases}x^1=(\cos\theta_0)y^1-(\sin\theta_0)y^2,\\x^2=(\sin\theta_0)y^1+(\cos\theta_0)y^2.\end{cases}\tag{2.14}$$

(2) 变换式(2.5)的逆变换为

$$T^{-1}:\begin{cases}x^1=\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2},\\x^2=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y^2}{y^1}\right).\end{cases}\tag{2.15}$$

(3) 变换式(3.6)的逆变换为

$$T^{-1}:\begin{cases}x^1=\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2+(y^3)^2},\\x^2=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{\sqrt{(y^1)^2+(y^2)^2}}{y^3},\\x^3=\mathrm{tg}^{-1}\left(\dfrac{y^2}{y^1}\right).\end{cases}\tag{2.16}$$

当 $x^1>0$，$0<x^2<\pi$，$0\leqslant x^3\leqslant 2\pi$。

§2-5 群的基本概念

集合 S 中任意元素 A,B,C 存在下列关系者叫做群:

(1) 集合 S 的元素经过一种代数运算后仍属于集合 S，即若 $A,B\in S$，则

$$A\cdot A=C;\ C\in S\tag{2.17}$$

(2) 服从结合律，即

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C);\tag{2.18}$$

(3) 存在一个单位元素 I，使

$$A\cdot I=I\cdot A=A;\tag{2.19}$$

(4) 存在逆元素 A^{-1}，使

$$A\cdot A^{-1}=I.\tag{2.20}$$

只具有前二个性质的，叫半群[60-63]。

例如，所有正负整数对于加法运算构成一个整数群，因为整数作加法运算后仍然是整数；整数的加法运算服从结合律；整数群的单位元素是 0；负整数是相应正整数的逆元素。

又如，许可互逆变换构成一个群，因为若

$$T:\quad y^\alpha=y^\alpha(x^k),\tag{2.21}$$

$$T^{-1}:\ x^i=x^i(y^\alpha),\tag{2.22}$$

其函数行列式

$$J=\left|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\right|\neq 0,\tag{2.23}$$

且有

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial y^\beta}=\delta^\alpha_\beta=\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\ \frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\qquad(k=1,2,\cdots,N),\tag{2.24}$$

故

$$\left|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\cdot\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\right| = \left|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\right|\cdot\left|\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\right| = |\delta^\alpha_\beta| = 1. \tag{2.25}$$

作连续二次互逆许可变换

$$T_1:\quad y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \cdots, x^N), \tag{2.26}$$

$$T_2:\quad z^\beta = z^\beta(y^1, y^2, \cdots, y^N), \tag{2.27}$$

$$T_3:\quad z^\beta = z^\beta[y^1(x^1, x^2, \cdots, x^N),\ y^2(x^1, x^2, \cdots x^N), \cdots, y^N(x^1, x^2, \cdots, x^N)], \tag{2.28}$$

则

$$J_3 = \left|\frac{\partial z^\beta}{\partial y^\alpha}\ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\right| = \left|\frac{\partial z^\beta}{\partial y^\alpha}\right|\left|\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k}\right| = J_2 J_1, \tag{2.29}$$

因而

$$T_3 = T_2 T_1. \tag{2.30}$$

可见：(1)二个许可互逆变换经乘法运算仍然是一个互逆变换；(2)结合律 $T_3(T_2T_1) = (T_3T_2)T_1$ 成立；(3)存在一致相等变换，即 $x^i = x^i$；(4)许可变换存在逆变换。因而许可变换构成一个群[60]。

§ 2-6 不 变 量

当坐标变换时具有不变性质的事物或现象，叫做不变量[35]。例如空间某点 P 的电位当其只是空间坐标的函数而非时间函数时是不变量；张量方程经坐标变换后仍然是张量方程；空间线元的平方 $(ds)^2$ 在坐标变换时为不变量；一次型或二次型经坐标变换其型仍然不变；当网络结构不变时作变数替换功率是不变量。

对工程科学来说，正确认识和选定不变量是非常重要的，例如在四维物理世界中，光速是不变量，由此出发可以进行四维时空的各种变换。在质点动力学中，质点的动能是不变量，以此为基础，可以得出不同坐标系上的质点动力学方程。在网络变换中，如不改变拓扑结构的联接，功率是不变量，由此可得出网络变换各种公式；但由原网络变换到实际网络时，就不能简单地假定二者的功率相等[27]。如果不变量认识不清，就不能正确地选定，会导至错误的结论。