結构的振动和稳定性

A. Φ. 斯米尔諾夫

科学出版社

結构的振动和稳定性

A. Φ. 斯米尔諾夫 著

楼 志 文 譯

А. Ф. СМИРНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ СООРУЖЕНИЙ

Государственное транспортное
железнодорожное издательство
Москва 1958

內 容 簡 介

本书所专門研究的是:在运輸建筑方面,首先是桥梁建筑工程中广泛存在的弹性系統的振动和稳定性問題. 文內还列举了一些矩陣計算理論的基本知識,在求解結构的振动和稳定性問題时,我們要依靠这些知識.

本书供工程师和科学技术工作者閱讀.

結构的振动和稳定性

A. Ф. 斯米尔諾夫 著

楼 志 文 譯

*

科 学 出 版 社 出 版 (北京朝阳門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1963年 9月第 一 版 书号:2822 字数:507,000

1963年 9月第一次印刷 开本:850×1168 1/32

(京) 0001—2,500 印张:19 3/16 插頁:3

定价: 3.90 元

作 者 序

近年来，在苏联及其他国家得到很大发展的弹性系統稳定性理論，仍然是許多方面专家的注意中心并愈益在工程結构設計上得到推广应用。

由于設計实践的需要，在普遍理論和具体特殊問題方面，都得到了广泛的研究。

主要由俄罗斯学者代表 Ф. С. 雅兴斯基 (Ф. С. Ясинский), Б. Г. 加辽金 (Б.Г. Галеркин), С. П. 鉄木辛可 (С. П. Тимошенко), А. П. 勤尼克 (А. П. Динник), С. А. 别尔希捷依 (С. А. Бернштейн), В. З. 符拉索夫 (В. З. Власов), И. М. 拉宾諾維奇 (И. М. Рабинович), И. Я. 施塔也曼 (И. Я. Штаерман) 和 А. А. 皮可夫斯基 (А. А. Пиковский), Н. В. 柯尔諾烏霍夫 (Н. В. Корноухов), А. Р. 尔然尼采 (И. М. Ржаницин), Н. К. 司尼脫各 (Н. К. Снитко), В. Г. 丘达諾夫斯基 (В. Г. Чудновский), С. Д. 伯諾馬里也夫 (С. Д. Пономарев), А. В. 盖米尔林克 (А. В. Гемерлиг) 等人的工作，在設計巨型工程結构中，使得普通的設計工程师，成功地解决了許多复杂問題。

工程結构的振动理論与稳定理論是密切关联的。在这一領域中，应提及 А. Н. 克雷洛夫 (А. Н. Крылов), С. П. 鉄木辛可, И. М. 拉宾諾維奇 (И. М. Рабинович), К. С. 柴夫里也夫 (К. С. Завриев), И. П. 泊勒科菲也夫 (И. П. Прокофьев), Н. И. 別查霍夫 (Н. И. Безухов), С. А. 别尔希捷依, А. П. 菲利包夫 (А. П. Филиппов), С. А. 依里耶西維奇 (С. А. Ильясевич), Н. И. 司尼脫各, И. Л. 高尔欽斯基 (И. Л. Корчинский), А. А. 别劳烏司 (А. А. Белоус), Я. Г. 伯諾夫各 (Я. Г. Пановко)

等学者奠基性的工作，由于他們的工作，使动力計算方法达到了靜力計算方法所特有的完备程度。

近年以来，发展了一个新的方向，按照这个方向，振动和稳定問題是統一研究的。与这方面有关的特别是出現所謂参数共振的情况，这种問題的研究属于刚刚开始但又正在迅速发展的結构动力稳定性学科。

这个領域中的第一个研究工作是 H. M. 别辽耶夫在 1924 年进行的。

在近年发表的許多著作中：H. M. 克雷洛夫（H. M. Крылов），H. H. 鲍格留鲍夫（H. H. Боголюбов），Г. Ю. 达柴尼利达才（Г. Ю. Джанелидзе），И. И. 高里琴拔拉脫（И. И. Гольденблат），B. A. 加司切夫（B. A. Гастев）等等，解决了許多具有实用价值的問題。特别值得一提的是 B. B. 鲍洛金（B. B. Болотин）在最近出版的书[22]，这本著作意味着弹性系統动力稳定性理論已經成为一門独立的学科。

建筑技术的迅速发展对建筑力学提出了許多复杂的新問題，在許多情况下，它們的解决伴随着很大的困难；因此，发展这种問題的数解法具有很大的实用价值。

本书专門討論求解弹性系統的振动和稳定性問題的数解法。

第 III 章討論在解决具体工程問題时有着很大价值的特征方程的解法。第 IV 章給出插值理論的一些必要知識。由于采用了插值理論和函数近似表示法，就使許多問題的解答精度大为提高。有一些問題，过去应用作者在书[164]中所述的方法，因所得結果的准确程度不够而不能很好加以解决，但現在由于应用了插值理論，就数解法来講，所費劳动量不大，同时精度很高，因而获得了解决。

其余各章求解弹性系統振动和稳定的各种工程問題。

对于在运輸建筑方面的最常見問題，我們賦予主要的地位。除理論性問題外，作者还力求詳細地研究那些在桥梁建筑中常見的实际問題，并安插一些图表和表格，利用它們，对于一些最常見

的問題，就能毫不困难地求得其解答。

书中还例举了大量的数字題，这些例題可作为求解相应間題的参考。

作者趁此机会向格魯吉亚苏維埃社会主义共和国科学院院士、苏联建筑及建筑方法科学院正式委員 K. C. 柴夫里也夫，科学技术博士 A. A. 烏曼斯基 (A. A. Уманский) 教授，科学技术副博士 A. B. 阿历克山大洛夫 (A. B. Александаров) 等表示感謝，他們在审閱原稿时提出了許多宝貴的意見，作者还对 H. B. 斯米尔諾娃 (H. B. Смирнова) 工程师表示感謝，在完成原稿和求解許多例題时，他給予作者很大的帮助。

A. Ф. 斯米尔諾夫

目　　录

变形法

混合法

第 I 章　矩陣理論簡介

§ 1. 一般概念

一个多元素系統(在数的特殊場合下),其諸元素按照一定的次序排列,并組成一个具有 m 行和 n 列的长方形陣,就叫作矩陣:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}. \tag{1.1}$$

矩陣 (1.1) 可縮写成形式:

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| \quad (i = 1, 2, \cdots, m; \quad k = 1, 2, \cdots, n).$$

我們将以

$$a_{ik} = \{\mathbf{A}\}_{ik}$$

来表示矩陣 $\mathbf{A}$ 的每一个元素.

单列矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{Vmatrix}$$

或单行矩陣

$$\mathbf{A} = \|a_1 a_2 \cdots a_n\|$$

是矩陣 (1.1) 的特殊情况.

如果 $m = n$, 即

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{matrix}\right\|,$$

就称作 n 阶正方矩陣. 我們将据此以区分二阶,三阶,$\cdots$, n 阶的矩陣.

全部元素都等于零的矩陣,叫做零矩陣;它在矩陣理論中的作用,与普通数字中的零相同.

若在正方矩陣中,除对角綫上諸元素外,其余的都等于零:当 $i \neq k$ 时,$a_{ik}=0$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$,便称作对角矩陣:

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

如在对角矩陣中,假定所有的元素都等于一,我們便得到一个单位矩陣,单位矩陣通常用字母 $\mathbf{E}$ 表示:

$$\mathbf{E}=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right\|.$$

这一矩陣所起的作用与普通代数中的单位值相同.

如在一矩陣中,元素的本身也是矩陣,便称为准矩陣. 例如,如果 $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}\cdots$, $\mathbf{A}_{nn}$ 都是矩陣,則准矩陣为

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12} \cdots \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{22} \cdots \mathbf{A}_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}_{n1}\mathbf{A}_{n2} \cdots \mathbf{A}_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

而对应的准对角矩陣是:

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & & & \\ & & \mathbf{A}_{33} & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & \mathbf{A}_{nn} \end{Vmatrix}.$$

我們可把矩陣看作是某种复数，并能对它进行确定的运算，如:加法、互乘、除法、乘方、构成矩陣函数等等. 所有这些运算都具有确定的意义;如以下所述,它們可以用来代替方程組的代数运算.

下面我們将研究带有 n^2 个元素的正方矩陣，在某些必須引用长方矩陣的場合,将特别加以預先說明.

矩陣和行列式不能混为一談. 一个行列式,它的元素虽与用以构成矩陣的 n^2 个元素 a_{ik} 完全相同,但它是一个純数，只是在某种程度上表述出矩陣的特征,故称为矩陣的模. 我們把行列式表示成[1]:

$$|\mathbf{A}| = \mathrm{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如矩陣的行列式 Det($\mathbf{A}$) 等于（不等于）零,矩陣 $\mathbf{A}$ 便叫作奇异矩陣(非奇异矩陣).

如在矩陣中，元素 $\{\mathbf{A}\}_{ik} = \{\mathbf{A}\}_{ki}$，矩陣 $\mathbf{A}$ 便称作对称矩陣. 例如在結构靜力学中,力法和变形法的准則方程的矩陣,便是对称矩陣.

如矩陣元素

$$\{\mathbf{A}\}_{ik} = -\{\mathbf{A}\}_{ki},$$

---

1) 把行列式写在单綫之間以示它与矩陣的区别.

则 **A** 称为斜矩陣.

当斜矩陣对角綫上的元素都等于零时,称为斜对称矩陣.

特别值得注意的是所謂雅可比矩陣，这种矩陣在它每一行中所包含的元素,不超过三个，且其中有一个是对角綫元素，另外二个則位于对角綫元素的相邻二侧. 下式所示即为一 n 阶的雅可比矩陣:

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{array}{lllllll} a_{11}a_{12} & & & & & & \\ a_{21}a_{22}a_{23} & & & & & & \\ & a_{32}a_{33}a_{34} & & & & & \\ & & a_{43}a_{44}a_{45} & & & & \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & \cdots & & \\ & & & & & & a_{n(n-1)}a_{nn} \end{array}\right\|.$$

在对角綫一側的諸元素都等于零的矩陣,叫做三角矩陣.

如一个矩陣的行是已知矩陣 $\mathbf{A}=\|a_{ik}\|$ 的列，則此矩陣称为关于矩陣 **A** 的轉置矩陣,以符号 $\mathbf{A}^*$ 表示. 任一正方对称矩陣恆等于它的轉置矩陣.

两个同阶矩陣:

$$\mathbf{A}=\|a_{ik}\|,$$
$$\mathbf{B}=\|b_{ik}\|$$

只有当它們之間的对应元素完全相等时，才认为是彼此互等的. 亦即,如果

$$\{\mathbf{A}\}_{ik}=\{\mathbf{B}\}_{ik}\quad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

則 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

矩陣对角綫上諸元素的和,称为矩陣的迹，以符号 Sp**A** 表示:

$$\mathrm{Sp}\mathbf{A}=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\sum_{k=1}^{n}\{\mathbf{A}\}_{kk}.$$

例題

1)

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{array}{rrr}2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 6 & 2 & 3\end{array}\right\|$$

是三阶正方矩陣;这个矩陣的行列式是

$$\mathrm{Det}(\mathbf{A})=\left|\begin{array}{rrr}2 & 1 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 6 & 2 & 3\end{array}\right|=16;$$

矩陣的迹为

$$\mathrm{Sp}\mathbf{A}=9.$$

2)

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{array}{rrr}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 5\\ 1 & 5 & 6\end{array}\right\|.$$

是对称矩陣;

$$\mathbf{B}=\left\|\begin{array}{rrr}3 & 2 & 1\\ -2 & 4 & 5\\ -1 & -5 & 6\end{array}\right\|$$

是斜矩陣;

$$\mathbf{C}=\left\|\begin{array}{rrr}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 5\\ -1 & -5 & 0\end{array}\right\|$$

是斜对称矩陣;

$$\mathbf{D}_1=\left\|\begin{array}{rrr}2 & 0 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 8 & 1 & 9\end{array}\right\|,\quad \mathbf{D}_2=\left\|\begin{array}{rrr}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{array}\right\|$$

是三角矩陣;

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{array}{rrr}2 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{array}\right\|$$

是为对角矩陣而单位矩陣是

$$\mathbf{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

§2. 正方矩陣的加法和乘法

两个 n 阶正方矩陣

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| \quad 和 \quad \mathbf{B} = \|b_{ik}\| \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

之和,給出一个仍为 n 阶的正方矩陣 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \|c_{ik}\|,$$

它带有元素

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

不难看出,由于

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

类似地作矩陣的减法运算,自然就有

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{B} - \mathbf{A}).$$

一个 n 阶矩陣和常数 α 互乘等于它的全部元素与 α 相乘:

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha\|a_{ik}\| = \|\alpha a_{ik}\|,$$

同时

$$\mathrm{Det}(\alpha\mathbf{A}) = \mathrm{Det}\|\alpha a_{ik}\| = \alpha^n \mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

两个 n 阶正方矩陣 $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|$ 和 $\mathbf{B} = \|b_{ik}\|$ 互乘,得出一个仍为同阶的正方矩陣 $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|$. 同时乘积矩陣的每一个元素 $\{\mathbf{C}_{ik}\} = c_{ik}$ 等于矩陣 $\mathbf{A}$ 中第 i 行元素与矩陣 $\mathbf{B}$ 中第 k 列諸对应元素的乘积的和:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}.$$

变换因子的位置就改变了乘积矩陣. 在一般的情况下 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, 因此,矩陣互乘的次序一般都是指明的. 例如,乘积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 就对应于在矩陣 $\mathbf{B}$ 的左边乘以矩陣 $\mathbf{A}$.

設