

結構的振動和穩定性

A. Ф. 斯米爾諾夫

科學出版社

86.21

659

结构的振动和稳定性

A. Φ. 斯米尔諾夫 著

樓 志 文 譯

А. Ф. СМЕРНОВ
УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ
СООРУЖЕНИЙ

Государственное транспортное
железнодорожное издательство
Москва 1958

內 容 簡 介

本书所专门研究的是:在运输建筑方面,首先是桥梁建筑工程中广泛存在的弹性系统的振动和稳定性问题。文内还列举了一些矩阵计算理论的基本知识,在求解结构的振动和稳定性问题时,我们要依靠这些知识。

本书供工程师和科学技术工作者阅读。

结构的振动和稳定性

А. Ф. 斯米尔诺夫 著
楼 志 文 译

*

科学出版社出版 (北京朝阳门大街 117 号)
北京市书刊出版业营业许可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总经售

*

1963 年 9 月第 一 版	书号: 2822 字数: 507,000
1963 年 9 月第一次印刷	开本: 850×1168 1/32
(京) 0001—2,500	印张: 19 3/16 插页: 3

定价: 3.90 元

作 者 序

近年来,在苏联及其他国家得到很大发展的弹性系統稳定性理論,仍然是許多方面专家的注意中心并愈益在工程結構設計上得到推广应用。

由于設計实践的需要,在普遍理論和具体特殊問題方面,都得到了广泛的研究。

主要由俄罗斯学者代表 Ф. С. 雅兴斯基 (Ф. С. Ясинский), Б. Г. 加辽金 (Б. Г. Галеркин), С. П. 鉄木辛可 (С. П. Тимошенко), А. П. 勤尼克 (А. П. Динник), С. А. 别尔希捷依 (С. А. Бернштейн), В. З. 符拉索夫 (В. З. Власов), И. М. 拉宾諾維奇 (И. М. Рабинович), И. Я. 施塔也曼 (И. Я. Штаерман) 和 А. А. 皮可夫斯基 (А. А. Пиковский), Н. В. 柯尔諾烏霍夫 (Н. В. Корноухов), А. Р. 尔然尼采 (И. М. Ржаницин), Н. К. 司尼脫各 (Н. К. Снитко), В. Г. 丘达諾夫斯基 (В. Г. Чудновский), С. Д. 伯諾馬里也夫 (С. Д. Пономарев), А. В. 盖米尔林克 (А. В. Гемерлиг) 等人的工作,在設計巨型工程結構中,使得普通的設計工程师,成功地解决了許多复杂問題。

工程結構的振動理論与穩定理論是密切关联的。在这一領域中,应提及 А. Н. 克雷洛夫 (А. Н. Крылов), С. П. 鉄木辛可, И. М. 拉宾諾維奇 (И. М. Рабинович), К. С. 柴夫里也夫 (К. С. Завриев), И. П. 泊勒魯也夫 (И. П. Биркофьев), Н. И. 別查霍夫 (Н. И. Безухов), С. А. 别尔希捷依, А. П. 菲利包夫 (А. П. Филиппов), С. А. 依里耶西維奇 (С. А. Ильясевич), Н. И. 司尼脫各, И. Л. 高尔欽斯基 (И. Л. Горчинский), А. А. 別勞烏司 (А. А. Белоус), Я. Г. 伯諾夫 (Я. Г. Пановко)

等学者奠基性的工作,由于他們的工作,使动力計算方法达到了靜力計算方法所特有的完备程度。

近年以来,发展了一个新的方向,按照这个方向,振动和穩定問題是統一研究的。与这方面有关的特別是出現所謂参数共振的情况,这种問題的研究属于刚刚开始但又正在迅速发展的結構动力穩定性学科。

这个領域中的第一个研究工作是 Н. М. 別辽耶夫在 1924 年进行的。

在近年发表的許多著作中: Н. М. 克雷洛夫 (Н. М. Крылов), Н. Н. 鮑格留鮑夫 (Н. Н. Боголюбов), Г. Ю. 达柴尼利达才 (Г. Ю. Джанелидзе), И. И. 高里琴拔拉脫 (И. И. Гольденблат), В. А. 加司切夫 (В. А. Гастев) 等等,解决了許多具有实用价值的問題。特別值得一提的是 В. В. 鮑洛金 (В. В. Болотин) 在最近出版的书^[22],这本著作意味着弹性系統动力穩定性理論已經成为一門独立的学科。

建筑技术的迅速发展对建筑力学提出了許多复杂的新問題,在許多情况下,它們的解决伴随着很大的困难;因此,发展这种問題的数解法具有很大的实用价值。

本书專門討論求解弹性系統振动的和穩定性問題的数解法。

第 III 章討論在解决具体工程問題时有着很大价值的特征方程的解法。第 IV 章給出插值理論的一些必要知識。由于采用了插值理論和函数近似表示法,就使許多問題的解答精度大为提高。有一些問題,过去应用作者在书^[16]中所述的方法,因所得結果的准确程度不够而不能很好加以解决,但現在由于应用了插值理論,就数解法来講,所費劳动量不大,同时精度很高,因而获得了解决。

其余各章求解弹性系統振动的和穩定的各种工程問題。

对于在运输建筑方面的最常見問題,我們賦予主要的地位。除理論性問題外,作者还力求詳細地研究那些在桥梁建筑中常見的实际問題,并安插一些图表和表格,利用它們,对于一些最常見

• x •

的問題,就能毫不困難地求得其解答。

書中還例舉了大量的數字題,這些例題可作為求解相應問題的參考。

作者趁此機會向格魯吉亞蘇維埃社會主義共和國科學院院士、蘇聯建築及建築方法科學院正式委員 К. С. 柴夫里也夫,科學技術博士 А. А. 烏曼斯基 (А. А. Уманский) 教授,科學技術副博士 А. В. 阿歷克山大洛夫 (А. В. Александров) 等表示感謝,他們在審閱原稿時提出了許多寶貴的意見,作者還對 Н. В. 斯米爾諾娃 (Н. В. Смирнова) 工程師表示感謝,在完成原稿和求解許多例題時,他給予作者很大的幫助。

А. Ф. 斯米爾諾夫

目 录

作者序	ix
第 I 章 矩陣理論簡介	1
§ 1. 一般概念	1
§ 2. 正方矩陣的加法和乘法	6
§ 3. 逆矩陣及其求法	10
§ 4. 矩陣函数及其运算	20
§ 5. 特征值和固有向量	26
第 II 章 建筑力学中的常見矩陣	36
§ 6. 概述	36
§ 7. 位移矩陣	36
§ 8. 沿主軸綫方向选取剩余未知数	43
§ 9. 反力矩陣	51
§ 10. 非綫性位移的矩陣	53
§ 11. 影响矩陣	56
§ 12. 弹性荷重矩陣	64
第 III 章 特征方程及其解	76
§ 13. 緒言	76
A. 把特征方程变换成多項式	
§ 14. 萊維法	77
§ 15. 克雷洛夫法	80
§ 16. 达尼利夫斯基法	85
§ 17. 以解 n 个綫性方程的方法求特征多項式	91
§ 18. 組合法	93
B. 首几个特征值的計算	
§ 19. 最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的計算	97
§ 20. С. А. 別尔希捷依教授 (С. А. Бернштейн) 的頻譜函数的 系数和矩陣方次的迹之間的关系	104

§ 21. 用迭代法計算特征值	107
§ 22. 計算最小特征值 $\lambda_{\min}$	117
B. 解特征方程式	
§ 23. 罗巴切夫斯基法	119
§ 24. 牛頓方法	123
§ 25. 关于解广义特征方程的附注	125
第 IV 章 插值理論的必要知識	127
§ 26. 緒言	127
§ 27. 普通多項式和三角多項式	128
§ 28. 借助于拉格朗日多項式的插值函数	129
§ 29. 拉格朗日插值多項式的积分計算和两个矩陣运算子的构成	133
§ 30. 用三角函数的插值法	145
第 V 章 应用矩陣于微分方程的求解	149
§ 31. 概述	149
§ 32. 利用矩陣級数解常系数方程	149
§ 33. 用幂級数积分变系数方程	156
§ 34. 加辽金法	159
§ 35. 以多項式代替未知函数的方法	159
§ 36. 积分矩陣解	161
第 VI 章 直杆在复杂載荷下的稳定性	173
§ 37. 概述	173
§ 38. 稳定性方程的組成	173
§ 39. 任意分布載荷作用下杆件的稳定性	176
§ 40. 分布力和集中力的同时作用	184
§ 41. 刚度阶段性改变的变截面杆之稳定性	187
§ 42. 刚度連續改变的杆件的稳定性	190
§ 43. 确定临界載荷时計及剪切的影响	204
§ 44. 在弹性支座上的杆件稳定性	207
§ 45. 开式桥梁受压上弦杆的稳定性	220
§ 46. 纵向弯曲时具有最小自重的杆件	230
第 VII 章 拱和拱系的稳定性	256

§ 47. 概述	256
§ 48. 等截面单拱的稳定性	256
§ 49. 变截面双铰拱的稳定性	260
§ 50. 在正对称弯曲形式时拱的稳定性	267
§ 51. 静不定系统的正则方程式	269
§ 52. 静不定系统稳定方程的构成	273
§ 53. 广义正则方程式的应用举例	275
§ 54. 两端固定拱的稳定性	278
§ 55. 弹性拱座拱的稳定性	279
§ 56. 拱背上部结构参与作用时的拱的稳定性	286
§ 57. 带有拉梁的拱的稳定性	297
§ 58. 桥梁建筑中常见的组合系统的稳定性	304
§ 59. 推力传到刚梁的系统的稳定性	312
§ 60. 带有可动刚梁的柔拱稳定性	319
§ 61. 带有固定端点刚梁的柔拱稳定性	325
§ 62. 具有变截面成份的组合系统	329
§ 63. 纵向弯曲时的最小自重拱	331
第 VIII 章 梁平面弯曲的稳定性	345
§ 64. 概述	345
§ 65. 用以解平面弯曲稳定问题的微分方程	345
§ 66. 刚度阶段性改变的矩形截面悬臂梁稳定性	347
§ 67. 任意载荷的作用	356
§ 68. 具有两根对称轴的薄壁杆件平面弯曲形式的稳定性	365
§ 69. 应用图解分析法研究具有两根对称轴的梁的稳定性问题	374
§ 70. 当丧失平面弯曲稳定性时, 确定临界载荷的近似法	376
§ 71. 应用延拓法求解梁平面弯曲形式稳定问题的微分方程	381
第 IX 章 刚架的稳定计算	384
§ 72. 緒言	384
力 法	
§ 73. 基本系统的选择及正则方程的系数计算	385
§ 74. 特征行列式的构成	387
§ 75. 虛假的基本系统	390

变形法

§ 76. 基本系统的选择及反力计算	393
§ 77. 特征行列式及其性质	396
§ 78. 超越方程的解	397

混合法

§ 79. 特征方程及其系数的计算	405
§ 80. 对称性在刚架稳定计算中的利用	409
§ 81. 约束性的和强制性的丧失稳定	415
§ 82. 附加约束对弹性系统稳定性的影响	418
§ 83. 雅可比系统的稳定储备	419
§ 84. 不对称加载系统的力的临界参数估值	427
§ 85. 不对称刚架临界力的估值	433
§ 86. 以等稳定性虚系统替代实结构	436
§ 87. 关于稳定储备不足的系统的合理加固	437
§ 88. 旱桥型刚架的稳定性	443
§ 89. 带有变截面立柱的旱桥型刚架的稳定性	452
§ 90. 以横梁相连的桥塔稳定性	459
§ 91. 门式起重机的稳定性	465

第 X 章 受有轴向力作用的直杆的自由振动

§ 92. 概述	467
§ 93. n 个自由度系统的自由振动	467
§ 94. 在一组力的压缩下, 等截面杆频率方程的构成	472
§ 95. 压杆的自由振动	482

第 XI 章 变截面受压杆件的自由振动

§ 96. 概述	490
§ 97. 刚度作阶段形变化的杆件的振动	490
§ 98. 刚度连续变化的杆件的自由振动	499
§ 99. 尖劈的振动	502
§ 100. 平截头圆锥体的自由振动	506

第 XII 章 刚架、拱及组合系统的振动

§ 101. 概述	511
§ 102. 刚架系统的振动	511

§ 103. 旱桥型刚架的自由振动·····	514
§ 104. 組合系統的自由振动·····	521
§ 105. 組合系統的强迫振动·····	531
§ 106. 拱与拱背結構联合承載时,拱的自由振动 ·····	534
第 XIII 章 直杆的强迫振动 ·····	539
§ 107. 概述·····	539
A. 諧和振动	
§ 108. 变截面压杆的强迫振动·····	540
§ 109. 压杆强迫振动的計算举例·····	542
B. 非諧和振动	
§ 110. 概述·····	545
§ 111. 用延拓法解微分方程·····	545
§ 112. 以系数均值法求解·····	547
§ 113. 在纵向周期力作用下,杆件共振区的特性 ·····	549
§ 114. 确定不穩定区的边界·····	550
§ 115. 关于計算矩陣 C 的一些附注·····	555
§ 116. H. M. 別辽耶夫問題的近似解·····	557
§ 117. 杆端約束方式的影响·····	561
附录·····	562
参考文献·····	596

第 I 章 矩陣理論簡介

§ 1. 一般概念

一个多元素系統 (在数的特殊場合下), 其諸元素按照一定的次序排列, 并組成一个具有 m 行和 n 列的长方形陣, 就叫作矩陣:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

矩陣 (1.1) 可縮写成形式:

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| \quad (i = 1, 2, \cdots, m; \quad k = 1, 2, \cdots, n).$$

我們將以

$$a_{ik} = \{\mathbf{A}\}_{ik}$$

来表示矩陣 $\mathbf{A}$ 的每一个元素.

单列矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{vmatrix}$$

或单行矩陣

$$\mathbf{A} = \|a_1 a_2 \cdots a_n\|$$

是矩陣 (1.1) 的特殊情况.

如果 $m = n$, 即

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

就称作 n 阶正方矩阵。我们将据此以区分二阶, 三阶, $\cdots$, n 阶的矩阵。

全部元素都等于零的矩阵, 叫做零矩阵; 它在矩阵理论中的作用, 与普通数字中的零相同。

若在正方矩阵中, 除对角线上诸元素外, 其余的都等于零: 当 $i \neq k$ 时, $a_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, \cdots, n$), 便称作对角矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如在对角矩阵中, 假定所有的元素都等于一, 我们便得到一个单位矩阵, 单位矩阵通常用字母 $\mathbf{E}$ 表示:

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

这一矩阵所起的作用与普通代数中的单位值相同。

如在一矩阵中, 元素的本身也是矩阵, 便称为准矩阵。例如, 如果 $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$, $\cdots$, $\mathbf{A}_{nn}$ 都是矩阵, 则准矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{vmatrix}.$$

而对应的准对角矩阵是:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & & & \\ & \mathbf{A}_{22} & & \\ & & \mathbf{A}_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \mathbf{A}_{nn} \end{vmatrix}$$

我們可把矩陣看作是某种复数，并能对它进行确定的运算，如：加法、互乘、除法、乘方、构成矩陣函数等等。所有这些运算都具有确定的意义；如以下所述，它們可以用来代替方程組的代数运算。

下面我們將研究带有 n^2 个元素的正方矩陣，在某些必須引用长方矩陣的場合，將特別加以預先說明。

矩陣和行列式不能混为一談。一个行列式，它的元素虽与用以构成矩陣的 n^2 个元素 a_{ik} 完全相同，但它是一个純数，只是在某种程度上表述出矩陣的特征，故称为矩陣的模。我們把行列式表示成¹⁾：

$$|\mathbf{A}| = \text{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

如矩陣的行列式 $\text{Det}(\mathbf{A})$ 等于（不等于）零，矩陣 $\mathbf{A}$ 便叫作奇异矩陣（非奇异矩陣）。

如在矩陣中，元素 $\{\mathbf{A}\}_{ik} = \{\mathbf{A}\}_{ki}$ ，矩陣 $\mathbf{A}$ 便称作对称矩陣。例如在結構靜力学中，力法和变形法的准則方程的矩陣，便是对称矩陣。

如矩陣元素

$$\{\mathbf{A}\}_{ik} = -\{\mathbf{A}\}_{ki},$$

1) 把行列式写在单綫之間以示它与矩陣的区别。

則 $\mathbf{A}$ 称为斜矩陣。

当斜矩陣对角綫上的元素都等于零时,称为斜对称矩陣。

特別值得注意的是所謂雅可比矩陣,这种矩陣在它每一行中所包含的元素,不超过三个,且其中有一个是对角綫元素,另外二个則位于对角綫元素的相邻二側。下式所示即为一 n 阶的雅可比矩陣:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ & a_{22} & a_{23} & & \\ & & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ & & & & \dots & \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

在对角綫一側的諸元素都等于零的矩陣,叫做三角矩陣。

如一个矩陣的行是已知矩陣 $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|$ 的列,則此矩陣称为关于矩陣 $\mathbf{A}$ 的轉置矩陣,以符号 $\mathbf{A}^*$ 表示。任一正方对称矩陣恆等于它的轉置矩陣。

两个同阶矩陣:

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\|,$$

$$\mathbf{B} = \|b_{ik}\|$$

只有当它們之間的对应元素完全相等时,才認為是彼此互等的。亦即,如果

$$\{\mathbf{A}\}_{ik} = \{\mathbf{B}\}_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

則 $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。

矩陣对角綫上諸元素的和,称为矩陣的迹,以符号 $\text{Sp}\mathbf{A}$ 表示:

$$\text{Sp}\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{kk} = \sum_{k=1}^n \{\mathbf{A}\}_{kk}.$$

例題

1)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

是三阶正方矩阵；这个矩阵的行列式是

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 16;$$

矩阵的迹为

$$\text{Sp}\mathbf{A} = 9.$$

2)

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

是对称矩阵；

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 5 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

是斜矩阵；

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ -1 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

是斜对称矩阵；

$$\mathbf{D}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

是三角矩阵；

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

是为对角矩阵而单位矩阵是

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

§ 2. 正方矩陣的加法和乘法

两个 n 阶正方矩陣

$$\mathbf{A} = \|a_{ik}\| \quad \text{和} \quad \mathbf{B} = \|b_{ik}\| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

之和, 給出一个仍为 n 阶的正方矩陣 $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \|c_{ik}\|,$$

它帶有元素

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}.$$

不难看出, 由于

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A},$$

类似地作矩陣的減法运算, 自然就有

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{B} - \mathbf{A}).$$

一个 n 阶矩陣和常数 α 互乘等于它的全部元素与 α 相乘:

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha \|a_{ik}\| = \|\alpha a_{ik}\|,$$

同时

$$\text{Det}(\alpha \mathbf{A}) = \text{Det}\|\alpha a_{ik}\| = \alpha^n \text{Det}(\mathbf{A}).$$

两个 n 阶正方矩陣 $\mathbf{A} = \|a_{ik}\|$ 和 $\mathbf{B} = \|b_{ik}\|$ 互乘, 得出一个仍为同阶的正方矩陣 $\mathbf{C} = \|c_{ik}\|$. 同时乘积矩陣的每一个元素 $\{c_{ik}\} = c_{ik}$ 等于矩陣 $\mathbf{A}$ 中第 i 行元素与矩陣 $\mathbf{B}$ 中第 k 列諸对应元素的乘积的和:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \dots + a_{in} b_{nk}.$$

变换因子的位置就改变了乘积矩陣. 在一般的情况下 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$, 因此, 矩陣互乘的次序一般都是指明的. 例如, 乘积 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 就对应于在矩陣 $\mathbf{B}$ 的左边乘以矩陣 $\mathbf{A}$.

設