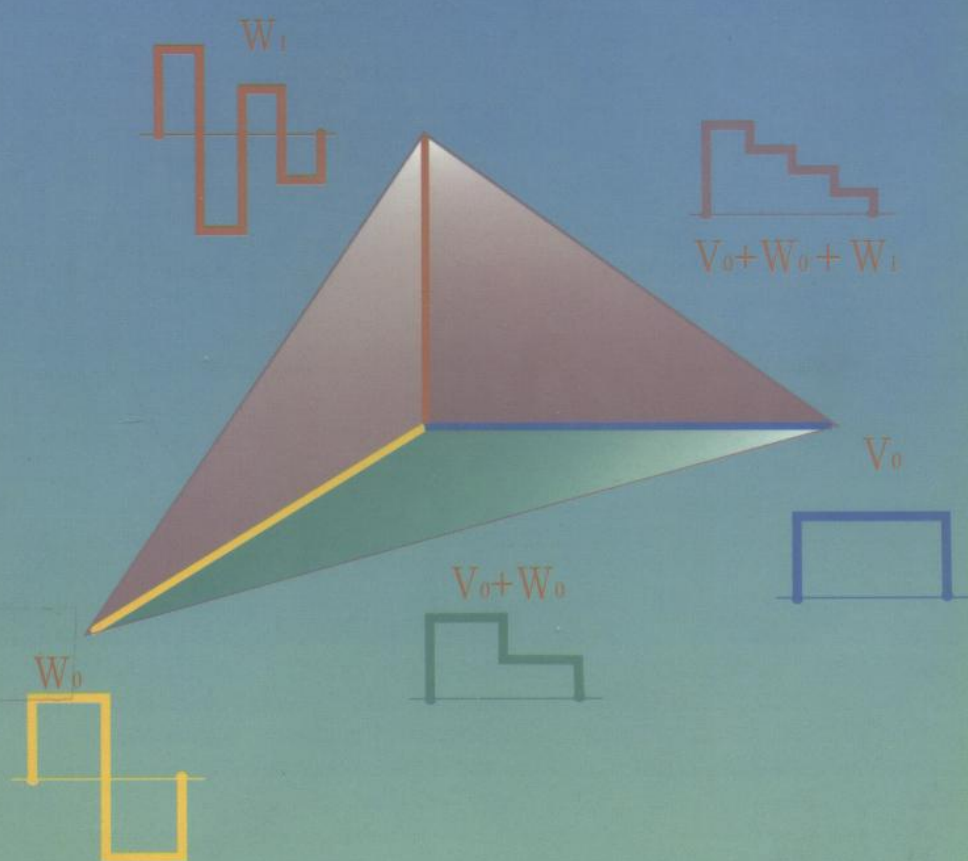
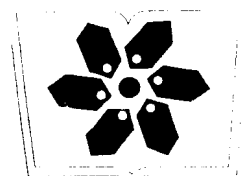


小波变换的工程分析与应用

杨福生 著



科学出版社



中国科学院科学出版基金资助出版

小波变换的工程分析与应用

杨 福 生 著

科 学 出 版 社

2 0 0 0

内 容 简 介

本书从工程观点阐述小波变换的基本原理及其应用。内容特点是:(1)着重从信号处理观点,采用其中的概念与术语阐明小波变换的基本原理和性质,既注意理论论证的严谨,也注意物理概念的清晰。(2)联系工程技术上的一些实际问题展开讨论,如滤波器组、多分辨率分析、瞬态及奇异点提取、图像处理及数据压缩等,说明它们的理论依据与相互联系,从而拓宽小波变换的实用意义。(3)注意引入这一领域近年来的新发展,如小波包、时-频铺砌、匹配跟踪、分形分析等,努力使内容紧跟技术发展步伐,使读者对前沿动态有所了解。

本书可供理工科大专院校的高年级学生、研究生和教师,以及相关专业的中、高级技术人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

小波变换的工程分析与应用/杨福生著. -北京:科学出版社,1999.

ISBN 7-03-006573-5

I. 小… I. 杨… II. 小波分析-应用-工程技术 N. TB112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 31651 号

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1999 年 2 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16

2000 年 4 月第二次印刷 印张: 17 1/2

印数: 1 301—2 800 字数: 403 000

定价: 35.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

前言

小波变换(wavelet transform)是80年代后期发展起来的应用数学分支。虽然从历史上追溯,在此之前已有一些学者零散地进行过一些工作(文献[1]在这方面作了较详细的归纳),但是理论上构成较系统的构架则主要是法国数学家 Y. Meyer、地质物理学家 J. Morlet 和理论物理学家 A. Grossman 的贡献。而把这一理论引入工程应用,特别是信号处理领域,法国学者 I. Daubechies 和 S. Mallat 则起着极为重要的作用。因此人们有时把小波分析的兴起归功于所谓“法国学派”。文献[2]从这一角度很好地总结了小波变换的发展历史。

小波变换的含义是:把某一被称为基本小波[也叫母小波(mother wavelet)]的函数 $\psi(t)$ 作位移 τ 后,再在不同尺度 a 下与待分析信号 $x(t)$ 作内积:

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt, \quad a > 0$$

等效的频域表示是(见第一章):

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega$$

式中 $X(\omega)$, $\Psi(\omega)$ 分别是 $x(t)$, $\psi(t)$ 的傅里叶变换。

粗略地比喻,小波变换(以下简记 WT)的作用如图 0.1 所示。用镜头观察目标 $x(t)$ (也就是待分析信号), $\psi(t)$ 代表镜头所起的作用(例如:滤波或卷积)。 τ 相当于使镜头相对于目标平行移动, a 的作用相当于镜头向目标推进或远离。由此可见小波变换有以下特点:

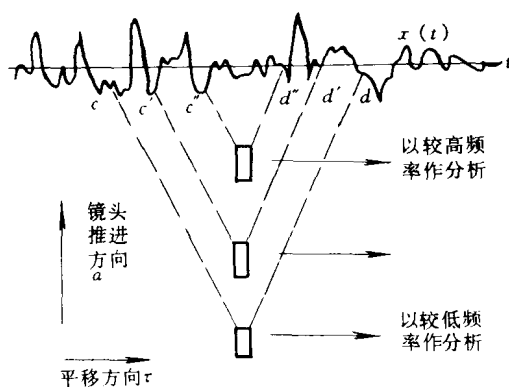


图 0.1 小波变换的粗略解释

(1) 具有多分辨率(multi-resolution), 也叫多尺度(multi-scale)的特点, 可以由粗及精地逐步观察信号。

(2) 也可以看成用基本频率特性为 $\Psi(\omega)$ 的带通滤波器在不同尺度 a 下对信号作滤波。由于傅里叶变换的尺度特性:

如果 $\phi(t)$ 的傅里叶变换是 $\Psi(\omega)$, 则 $\phi\left(\frac{t}{a}\right)$ 的傅里叶变换为 $|a|\Psi(a\omega)$ 。

因此这组滤波器具有品质因数恒定, 即相对带宽(带宽与中心频率之比)恒定的特点。注意, a 愈大相当于频率愈低。

(3) 适当地选择基本小波, 使 $\phi(t)$ 在时域上为有限支撑, $\Psi(\omega)$ 在频域上也比较集中, 便可以使 WT 在时、频两域都具有表征信号局部特征的能力, 因此有利于检测信号的瞬态或奇异点。

由于上述特性, 因此有人把小波变换誉为分析信号的数学显微镜。

在小波理论的发展过程中, 发现它与工程技术上一些已发展起来的问题密切相关。它们都可以用小波变换作为理论基础, 看成是从不同角度应用小波所得的特例。例如 Gabor 在 1946 年提出的 Gabor 变换, Burt 在 1982 年提出的金字塔式图像压缩编码概念, 通信及语言处理中的子带编码(subband coding), 数字信号处理中的多采样率滤波器组(multirate sampling filter bank), 计算机视觉中的多分辨率分析等。这些工程应用领域大大丰富了小波变换的实用意义, 也促进了小波分析理论的进一步发展。小波变换理论已由一维发展到多维。二维情况下它除了“显微”能力外还具有“极化”能力(即方向选择性), 因而引人注意。它在图像数据压缩方面的潜力已经得到确认。目前在语音、图像、通信、雷达、水声、地震、生物医学、机械振动、化工、湍流分析等领域都有应用, 是多学科关注的热点, 是信号处理的前沿课题。在诸如信号检测、特征提取、故障诊断与定位、数据压缩等方面都有应用报道。对功率谱具有“ $1/f$ ”特性的所谓“自相似信号”, 小波变换更是有力的分析工具。M. V. Wickerhauser 等人提出的“小波束”(wavelet packet) 更进一步发展了小波理论。考虑到人类感觉过程(例如视觉、听觉)的生理过程机制与小波分析颇有类似之处, 因此特别引起生物医学工程界的兴趣。

迄今为止, 小波变换的研究专著多数是应用数学界的贡献。如何从工程技术角度阐述并发展小波变换的理论与应用是一项值得努力的任务。本书正是从这一角度进行工作的一次尝试。这一思想不但表现在书的取材与结构上, 也表现在阐述问题的基本思路上。作者努力采用工程技术人员容易接受的概念与语言来阐述问题, 使读者在读后能初步领会应用小波变换分析实际问题的要领, 但是限于作者的水平, 书中必有不妥和错误之处, 殷切期待读者的批评、指正。

著 者

1998 年 1 月于清华园

目 录

第一章 连续的小波变换	1
1.1 连续小波变换的定义	1
1.2 与短时傅里叶变换的比较	4
1.3 连续小波变换的一些性质	5
1.4 小波变换的反演及对基本小波的要求	8
1.5 连续小波变换的计算机实现与快速算法	12
1.6 几种常用的基本小波	22
1.7 应用举例	27
第二章 尺度及位移均离散化的小波变换	32
2.1 离散 a, τ 栅格下的小波变换	32
2.2 标架(frame)概念	33
2.3 小波标架	37
2.4 应用举例	40
第三章 多分辨率分析与离散序列的小波变换	42
3.1 概述	42
3.2 多分辨率信号分解与重建的基本概念	42
3.3 尺度函数 $\phi(t)$ 和小波函数 $\psi(t)$ 的一些重要性质	48
3.4 由多分辨率分析引出多采样率滤波器组	58
3.5 Mallat 算法实现中的一些问题	62
3.6 离散序列的小波变换	64
3.7 金字塔结构的数据编码	68
第四章 多采样率滤波器组与小波变换	70
4.1 概述	70
4.2 多采样率信号处理的一些基本关系	70
4.3 双通道多采样率滤波器的理想重建条件	75
4.4 多采样率滤波器组的两种一般表示法	77
4.5 正交镜像滤波器组与共轭正交滤波器组	81
4.6 正交滤波器组的设计	86
4.7 二项式小波滤波器组	88
4.8 对滤波器组参数与连续时间小波变换关系的进一步讨论	91
4.9 Daubechies 小波	95
4.10 IIR 型的正交滤波器组和小波	97
4.11 双正交滤波器组与双正交小波	101
4.12 滤波器组理想重建条件的时域表示式及其设计	106
第五章 二维小波变换及其用于图像处理	112
5.1 概述	112
5.2 二维图像的多分辨率分析:可分离情况	115

5.3	五株排列(quincunx)的多分辨率分析	121
5.4	应用举例	132
5.5	二维连续小波变换	139
第六章	小波变换用于表征信号的突变(瞬态)特征	145
6.1	概述	145
6.2	基本原理	146
6.3	几种检测局部性能常用的小波	148
6.4	用小波变换极大值在多尺度上的变化来表征信号奇异点的性质	152
6.5	用二维小波变换作图像上物体边沿的检测	157
6.6	应用举例	160
6.7	用小波变换的过零点来表征信号	167
6.8	由小波变换的奇异点重建信号	170
6.9	仿真计算	176
第七章	小波包与时-频平面的铺砌	178
7.1	概述	178
7.2	小波包的定义与主要性质	181
7.3	最优小波包基的选择	184
7.4	自适应小波包分解	190
7.5	最优小波包作自适应切换时瞬态的抑制——时变滤波器组方法	193
7.6	关于时间-频率平面的自适应铺砌	204
7.7	基本小波的优化设计	211
7.8	小波变换在不同基函数间的换算	215
第八章	小波变换与分形信号的分析	217
8.1	概述	217
8.2	关于分形的简述	217
8.3	$1/f$ 过程的小波分析	221
8.4	确定性的自相似过程	225
8.5	$1/f$ 过程的信号处理	229
8.6	分数布朗运动与分数高斯噪声	235
8.7	小波变换用于其他分形问题简介	241
附录	$1/f$ 过程或 FBM 的产生	244
第九章	运动物体回波信号的宽带处理	248
9.1	概述	248
9.2	回波信号的宽带模型	249
9.3	针对宽带回波的小波变换处理	251
9.4	运动系统特性的多尺度表征	256
结束语		261
参考文献		263

5.3	五株排列(quincunx)的多分辨率分析	121
5.4	应用举例	132
5.5	二维连续小波变换	139
第六章	小波变换用于表征信号的突变(瞬态)特征	145
6.1	概述	145
6.2	基本原理	146
6.3	几种检测局部性能常用的小波	148
6.4	用小波变换极大值在多尺度上的变化来表征信号奇异点的性质	152
6.5	用二维小波变换作图像上物体边沿的检测	157
6.6	应用举例	160
6.7	用小波变换的过零点来表征信号	167
6.8	由小波变换的奇异点重建信号	170
6.9	仿真计算	176
第七章	小波包与时-频平面的铺砌	178
7.1	概述	178
7.2	小波包的定义与主要性质	181
7.3	最优小波包基的选择	184
7.4	自适应小波包分解	190
7.5	最优小波包作自适应切换时瞬态的抑制——时变滤波器组方法	193
7.6	关于时间-频率平面的自适应铺砌	204
7.7	基本小波的优化设计	211
7.8	小波变换在不同基函数间的换算	215
第八章	小波变换与分形信号的分析	217
8.1	概述	217
8.2	关于分形的简述	217
8.3	$1/f$ 过程的小波分析	221
8.4	确定性的自相似过程	225
8.5	$1/f$ 过程的信号处理	229
8.6	分数布朗运动与分数高斯噪声	235
8.7	小波变换用于其他分形问题简介	241
附录	$1/f$ 过程或 FBM 的产生	244
第九章	运动物体回波信号的宽带处理	248
9.1	概述	248
9.2	回波信号的宽带模型	249
9.3	针对宽带回波的小波变换处理	251
9.4	运动系统特性的多尺度表征	256
结束语		261
参考文献		263

第一章 连续的小波变换

1.1 连续小波变换的定义

前言中已粗略地介绍了小波变换的定义。现在把它更完整地重述于下:

设 $x(t)$ 是平方可积函数[记作 $x(t) \in L^2(R)$], $\psi(t)$ 是被称为基本小波或母小波 (mother wavelet) 的函数。则

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t-\tau}{a} \right) dt = \langle x(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle \quad (1.1)$$

称为 $x(t)$ 的小波变换。式中 $a > 0$ 是尺度因子^①, τ 反映位移, 其值可正可负。符号 $\langle x, y \rangle$ 代表内积, 它的含义是 (上标* 代表取共轭)

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int x(t) y^*(t) dt$$

$\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t-\tau}{a} \right)$ 是基本小波的位移与尺度伸缩。式(1.1)中不但 t 是连续变量, 而且 a 和 τ 也是连续变量, 因此称为连续的小波变换 (continuous wavelet transform, 简记 CWT)。

关于式(1.1), 有以下几点应加补充说明:

(1) 基本小波 $\psi(t)$ 可能是复数信号, 特别是解析信号。例如 $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{j\omega_0 t} = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \omega_0 t + j e^{-\frac{t^2}{2}} \sin \omega_0 t$ (称为 Morlet 小波) 便是一例, 它是高斯包络下的复指数函数, 其虚部是实部的希尔伯特变换 (Hilbert transform) ^②。

(2) 尺度因子 a 的作用是将基本小波 $\psi(t)$ 作伸缩, a 愈大 $\psi \left(\frac{t}{a} \right)$ 愈宽。对于一个持续时间有限的小波, $\psi(t)$ 与 $\psi_{a\tau}(t)$ 间关系如图 1.1 所示。在不同尺度下小波的持续时间 (也就是分析时段) 随 a 加大而增宽, 幅度则与 $\sqrt{a}$ 成反比减小, 但波的形状保持不变。图 1.2 表示不同 a 值下小波分析区间的变化。

(3) $\psi_{a\tau}(t)$ 前加因子 $1/\sqrt{a}$ 的目的是使不同 a 值下 $\psi_{a\tau}(t)$ 的能量保持相等。即, 设 $\epsilon = \int |\psi(t)|^2 dt$ 是基本小波的能量, 则 $\psi_{a\tau}(t)$ 的能量是

$$\epsilon' = \int \left| \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{t}{a} \right) \right|^2 dt = \frac{1}{a} \int \left| \psi \left(\frac{t}{a} \right) \right|^2 dt = \epsilon$$

① 应用数学著作中也常讨论 a 值可正可负的情况。但工程实际中尺度因子 $a < 0$ 无实际意义, 因此本书采用 $a > 0$ 的定义。

② 关于希尔伯特变换和解析信号的含义和特性请参看, 杨福生著, 随机信号分析, 第三章 (清华大学出版社, 1990 年)。

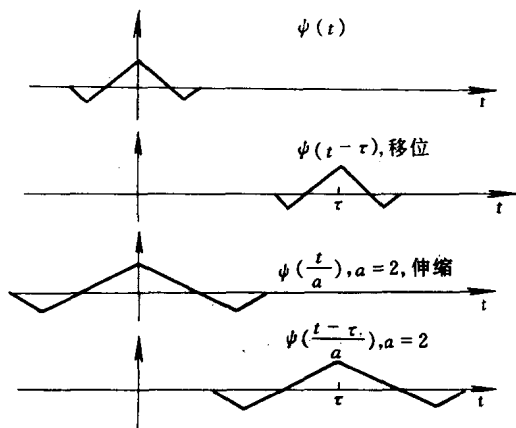


图 1.1 小波的位移与伸缩

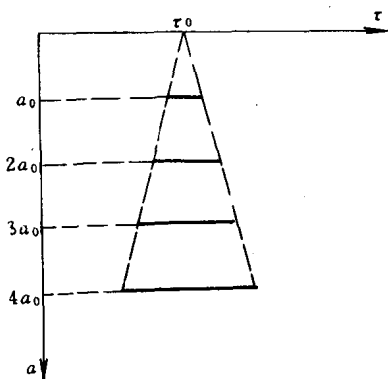


图 1.2 不同 a 值下小波分析区间的变化(实线代表分析小波的持续时间,即分析区间)

应该指出, $\phi_{ar}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \phi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ 并不是文献中小波函数族的唯一定义。有些学者主张对小波函数族采用如下的定义:

$$\phi_{ar}(t) = \frac{1}{a} \phi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

其优点是在不同尺度下可以保持各 $\phi_{ar}(t)$ 的频谱中幅频特性大小一致。即, 设 $\phi(t)$ 的傅里叶变换是 $\Psi(\omega)$ ^①, 则 $\frac{1}{a} \phi(t)$ 的傅里叶变换是 $\frac{|a|}{a} \Psi(a\omega) = \Psi(a\omega)$ 。可见与 $\Psi(\omega)$ 相比, 只有频轴比例尺变化, 没有幅度变化。

(4) 式(1.1)的内积往往被不严格地解释成卷积。这是因为

$$\text{内积: } \langle x(t), \phi(t-\tau) \rangle = \int x(t) \phi^*(t-\tau) dt$$

$$\text{卷积: } \langle x(t) * \phi(t) \rangle = \int x(\tau) \phi^*(t-\tau) d\tau \text{ 或记作 } \int x(t) \phi^*(\tau-t) dt$$

两式相比, 区别仅在 $\phi(t-\tau)$ 改成 $\phi(\tau-t) = \phi[-(t-\tau)]$ 。即 $\phi(t)$ 首尾对调。如果 $\phi(t)$ 是关于 $t=0$ 对称的函数, 则计算结果无区别; 如非对称, 在计算方法上也没有本质区别。

应该指出, 有些学者(例如 Mallat 在其关于边沿检测的论文中)是直接按卷积来定义小波变换的。他们所采用的定义是(ϕ_1 是基本小波):

$$WT'_x(a, \tau) = \frac{1}{a} \int x(t) \phi_1\left(\frac{\tau-t}{a}\right) dt \quad (1.2)$$

不难证明式(1.1), (1.2) 两个定义有密切联系。当 $\phi(t)$ 和 $\phi_1(t)$ 都是实函数时, 如果 $\phi_1(t) = \phi(-t)$, 则有:

$$WT'_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} WT_x(a, +\tau) \quad (1.3)$$

下面来讨论小波变换在频域上的特点:

① 本书中一律以小写字母[如 $\phi(t)$, $x(t)$]表示源函数, 用相应的大写字母[如 $\Psi(\omega)$, $X(\omega)$]表示傅里叶变换。

式(1.1)的等效频域表示是:

$$WT_x(a, \tau) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int X(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (1.4)$$

证明: 因为 $x(t) * \phi(t) \xrightarrow{\text{FT}} X(\omega) \cdot \Psi(\omega)$ (傅里叶变换的卷积定理)
所以

$$x(t) * \phi^*(-t) \xrightarrow{\text{FT}} X(\omega) \cdot \Psi^*(\omega)$$

(对复函数有 $f(-t)$ 的 FT 与 $f^*(t)$ 的 FT 共轭)

因而

$$\frac{1}{\sqrt{a}} x(t) * \phi\left(-\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\text{FT}} \sqrt{a} X(\omega) \Psi^*(a\omega)$$

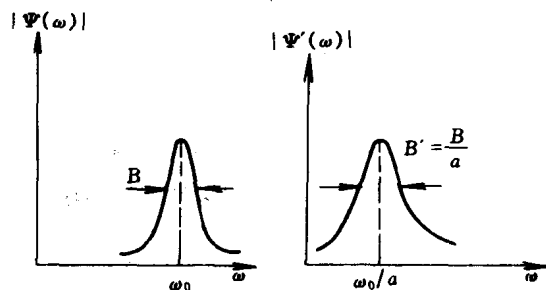
可见:

$$WT_x(a, \tau) = \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int X(\omega) \Psi^*(a\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

由此可见:

1. 如果 $\Psi(\omega)$ 是幅频特性比较集中的带通函数, 则小波变换便具有表征待分析信号 $X(\omega)$ 频域上局部性质的能力。例如, Morlet 小波 $\phi(t) = e^{-\frac{t^2}{T}} e^{j\omega_0 t}$ 的频谱 $\Psi(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{T}{4}(\omega - \omega_0)^2}$ 便具有这样的特点: 它是中心频率在 ω_0 的高斯型函数[图 1.3(a)]。只要改变 ω_0 就可以表征 $X(\omega)$ 在 ω_0 附近的局部性质。

2. 采用不同 a 值作处理时, 各 $\Psi(a\omega)$ 的中心频率和带宽都不一样, 但品质因数[即(中心频率)/(带宽)]却不变。仍以 Morlet 小波为例: 当 $a = 2$ 时 $\phi\left(\frac{t}{2}\right)$ 的傅里叶变换是 $2\Psi(2\omega) = 2\sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{T}{4}(2\omega - \omega_0)^2} = 2\sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-T(\omega - \frac{\omega_0}{2})^2}$ 。



$$(a) Q = \frac{\omega_0}{B}$$

$$(b) Q' = \frac{\omega_0/a}{B/a} = Q$$

图 1.3 尺度伸缩时小波函数的恒 Q 性

可见此时中心频率降到 $\frac{\omega_0}{2}$, 而带宽也

由 $\sqrt{\frac{4}{T}} = 2\sqrt{\frac{1}{T}}$ 降到 $\sqrt{\frac{1}{T}}$ [图 1.3

(b)], 因而品质因数不变。图 1.4 表示在不同 a 值下小波变换在尺度上频率分析的范围。

总之, 从频域上看, 用不同尺度作小波变换大致相当于用一组带通滤波器对信号进行处理。带通的目的既可能是分解, 也可能是检测(此时它相当于一组匹配滤波器)。

把图 1.2 和图 1.4 结合起来, 小波变换在时-频平面上的基本分析单元具有图 1.5 所示的特点。当 a 值小时, 时轴上观察范围小, 而在频域上相当于用较高频率作分辨率较高的分析, 即用高频小波作细致观察。当 a 值较大时, 时轴上考察范围大, 而在频域上相当于用低频小波作概貌观察。分析频率有高有低, 但在各分析频段内分析的品质因数 Q 却保

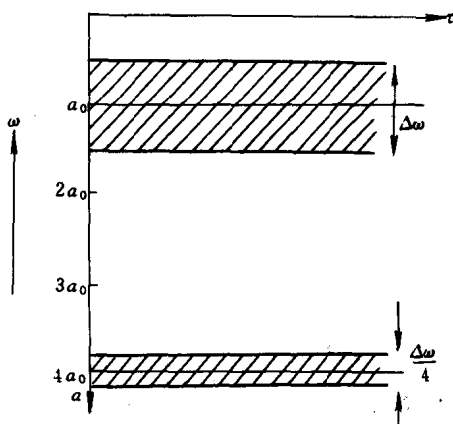


图 1.4 不同 a 值下分析小波频率范围的变化

持一致。这是一项很符合实际工作需要的特点,因为如果希望在时域上观察得愈细致,就愈要压缩观察范围,并提高分析频率。它也和人类对感觉信息(如视觉、听觉)的加工特点相一致。例如,生理学研究证明,对听觉起关键作用的耳蜗内基底膜,其作用相当于一组建立在薄膜振动基础上的恒 Q 的带通频率分析器。另外生理信号被分解后常表现出高频分量持续时间较短,低频分量持续时间较长的特点。这也正和小波分析的性质互相吻合。

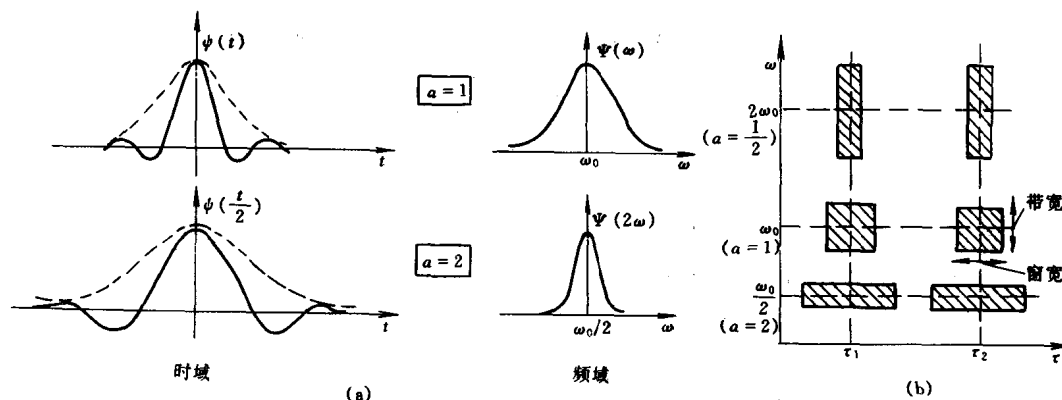


图 1.5 典型小波函数的分析特点
(a)尺度变化的影响;(b)基本分析单元的特点。

1.2 与短时傅里叶变换的比较

工程技术上在时域作局部分析时以往常用短时傅里叶变换(Short Time FT, 简记 STFT)。为了说明 STFT 和 CWT 作局部分析时性质有何不同,下面把两者作时频局部分析的特点作一比较。

STFT 的处理方法是对信号 $x(t)$ 施加一个滑动窗 $w(t-\tau)$ (τ 反映滑动窗的位置)后,再作傅里叶变换。即

$$\text{STFT}_x(\omega, \tau) = \int x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt \quad (1.5)$$

它也可以看成是 $x(t)$ 和 $g(t)=w(t-\tau)e^{+j\omega t}$ 的内积; τ 是移位因子, ω 是频率。为了与前节分析作比较,假定 $w(t)$ 也是高斯型的。当 $\tau=0$ 时,

$$w(t) = e^{-\frac{t^2}{T}}$$

对固定频率 $\omega = +\omega_0$

$$g(t) = e^{-\frac{t^2}{T}} e^{+j\omega_0 t}, G(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{T}} e^{-\frac{T}{4}(\omega - \omega_0)^2}$$

它正是 Morlet 基本小波。可是当改变 ω_0 时 STFT 的基本分析单元的结构与 CWT 明显不同。由于 ω_0 只影响 $g(t)$ 中的复指数因子, 因此从时域上看, 当 ω_0 取不同值时 $g(t)$ 的包络不变, 只是包络下的正弦波频率改变。(图 1.6(a) 示出的 ω_0 变成 $2\omega_0$ 的情况。) 从频域上看, 当 ω_0 变成 $2\omega_0$ 时, $G(\omega)$ 的中心频率变成 $2\omega_0$, 但带宽仍保持不变。可见 STFT 基本分析单元的分析特点如图 1.6(b) 所示, 在 τ - ω 平面的不同位置处分析单元的形状保持不变; 既不具有分析频率降低时视野自动放宽的特点, 也不具有频率特性品质因数恒定的特点。

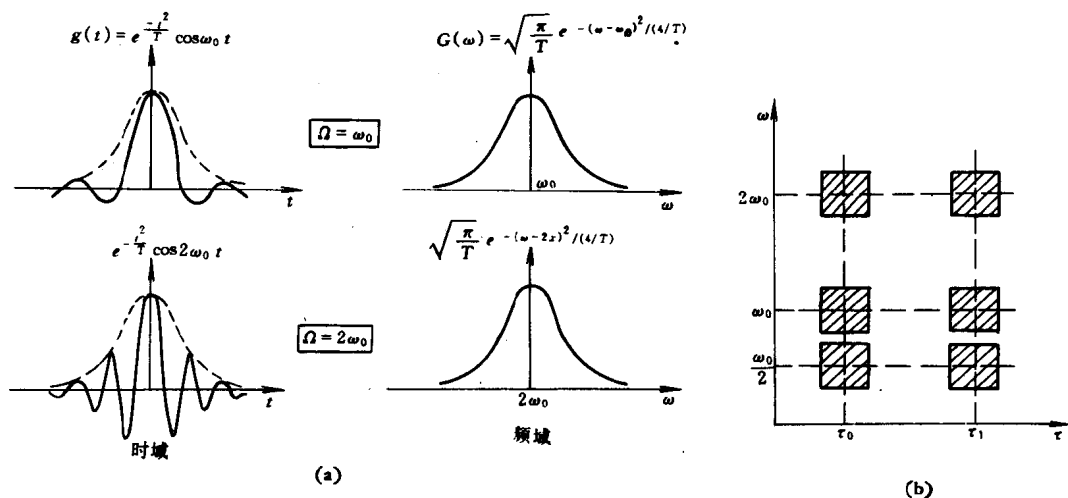


图 1.6 短时傅里叶变换的分析特点

(a) 频率变化的影响; (b) 基本分析单元的特点。

1.3 连续小波变换的一些性质

由于小波变换对 $x(t)$ 而言是以 $\psi(t)$ 为核函数的线性变换, 因此不难证明它具有下述特性:

1. 叠加性 如果 $x(t)$ 的 CWT 是 $WT_x(a, \tau)$, $y(t)$ 的 CWT 是 $WT_y(a, \tau)$, 则

$$z(t) = k_1 x(t) + k_2 y(t) \text{ 的 CWT 是 } k_1 WT_x(a, \tau) + k_2 WT_y(a, \tau)$$

这是线性变换的基本特性, 不难根据式(1.1)定义自行证明。

2. 时移性质 如果 $x(t)$ 的 CWT 是 $WT_x(a, \tau)$, 则

$$x(t-t_0) \text{ 的 CWT 是 } WT_x(a, \tau-t_0)$$

也就是 $x(t)$ 的时移对应于 WT 的 τ 移。

证明:令 $x'(t) = x(t - t_0)$, 则

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t - t_0) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

令 $t - t_0 = t'$, 即 $t = t' + t_0$, $dt = dt'$, 则上式化成

$$\text{WT}_x(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t') \psi^* \left(\frac{t' + t_0 - \tau}{a} \right) dt' = \text{WT}_x(a, \tau - t_0)$$

3. 尺度转换 如果 $x(t)$ 的 CWT 是 $\text{WT}_x(a, \tau)$, 则

$$x\left(\frac{t}{\lambda}\right) \text{ 的 CWT 是 } \sqrt{\lambda} \text{WT}_x\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda}\right); \lambda > 0$$

证明:令 $x'(t) = x\left(\frac{t}{\lambda}\right)$, 则

$$\begin{aligned} \text{WT}_x(a, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int x\left(\frac{t}{\lambda}\right) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \int x(t') \psi^* \left(\frac{\lambda t' - \tau}{a} \right) dt' \quad \left[t' = \frac{t}{\lambda} \right] \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{a}} \int x(t') \psi^* \left(\frac{t' - \frac{\tau}{\lambda}}{\frac{a}{\lambda}} \right) dt' \\ &= \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{\lambda}}} \int x(t') \psi^* \left(\frac{t' - \tau/\lambda}{a/\lambda} \right) dt' \right] \\ &= \sqrt{\lambda} \text{WT}_x\left(\frac{a}{\lambda}, \frac{\tau}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

此定理表明:当信号 $x(t)$ 作某一倍数伸缩时,其小波变换将在 a, τ 两轴上作同一比例的伸缩,但是不发生失真变形。这是使小波变换成为“数学显微镜”的重要依据。

4. 交叉项的性质 由于 CWT 是线性变换,满足叠加性,因此不存在交叉项。但是由它引伸出的能量分布函数 $|\text{WT}_x(a, \tau)|^2$ 却仍有交叉项表现:

设 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, 则

$$\begin{aligned} |\text{WT}_x(a, \tau)|^2 &= |\text{WT}_{x_1}(a, \tau) + \text{WT}_{x_2}(a, \tau)|^2 \\ &= |\text{WT}_{x_1}(a, \tau)|^2 + |\text{WT}_{x_2}(a, \tau)|^2 + 2|\text{WT}_{x_1}(a, \tau)| |\text{WT}_{x_2}(a, \tau)| \cos(\theta_{x_1} - \theta_{x_2}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

式中 $\theta_{x_1}, \theta_{x_2}$ 分别是 $\text{WT}_{x_1}(a, \tau), \text{WT}_{x_2}(a, \tau)$ 的幅角。

证明:[为了简化书写,以下把 $\text{WT}_x(a, \tau)$ 简记作 WT_x]

$$\begin{aligned} |\text{WT}_x|^2 &= |\text{WT}_{x_1} + \text{WT}_{x_2}|^2 = (\text{WT}_{x_1} + \text{WT}_{x_2})(\text{WT}_{x_1} + \text{WT}_{x_2})^* \\ &= |\text{WT}_{x_1}|^2 + |\text{WT}_{x_2}|^2 + \text{WT}_{x_1} \text{WT}_{x_2}^* + \text{WT}_{x_2} \text{WT}_{x_1}^* \end{aligned}$$

不难证明后两项互为共轭,因此上式化简成

$$|WT_x|^2 = |WT_{x_1}|^2 + |WT_{x_2}|^2 + 2|WT_{x_1}| |WT_{x_2}| \cos(\theta_{x_1} - \theta_{x_2})$$

由式(1.6)可见小波变换的交叉项只出现在 WT_{x_1} 和 WT_{x_2} 同时不为零的 (a, τ) 处, 也就是两者互相交叠的区域中, 而不像维格纳分布的交叉项, 即使 WD_{x_1} 与 WD_{x_2} 不重叠也会出现。

5. 小波变换的内积定理 以基本小波 $\psi(t)$ 分别对 $x_1(t), x_2(t)$ 作小波变换。设 $x_1(t)$ 的 CWT 是: $WT_{x_1}(a, \tau) = \langle x_1(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle$
 $x_2(t)$ 的 CWT 是: $WT_{x_2}(a, \tau) = \langle x_2(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle$

其中 $\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$, 则有

$$\langle WT_{x_1}(a, \tau), WT_{x_2}(a, \tau) \rangle = c_\psi \langle x_1(t), x_2(t) \rangle \quad (1.7)$$

式中 $c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$ 。

这就是小波变换的内积定理, 也叫 Moyal 定理。

式(1.7)可以写成更明确的形式。左边的内积是对 a 和 τ 的双重积分, 而且由于式中 a 以倒数形式出现, 所以微分为 da/a^2 。这样就可写出式(1.7)的更具体形式:

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int \langle x_1(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle \langle \psi_{a\tau}(t), x_2(t) \rangle d\tau = c_\psi \int x_1(t) x_2^*(t) dt \quad (1.7)'$$

[左边第二个内积中两个因子次序对调反映了取共轭]。

证明: 首先根据巴塞瓦定理的广义形式:

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int X(\omega) Y^*(\omega) d\omega$$

$$\text{有} \quad \langle x_1(t), \psi_{a\tau}(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int X_1(\omega) \Psi_{a\tau}^*(\omega) d\omega \quad (i)$$

$$\langle \psi_{a\tau}(t), x_2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \Psi_{a\tau}(\omega') X_2^*(\omega') d\omega' \quad (ii)$$

又 $\psi_{a\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ 的 FT 是

$$\Psi_{a\tau}(\omega) = \sqrt{a} \Psi(a\omega) e^{+j\omega\tau} \quad (iii)$$

因此

$$\Psi_{a\tau}^*(\omega') = \sqrt{a} \Psi^*(a\omega') e^{-j\omega'\tau} \quad (iv)$$

把式(iii), (iv)代入式(i), (ii), 再把式(i), (ii)代入式(1.7)'左边, 整理后得[注意到 $\int e^{j(\omega-\omega')\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega-\omega')$]:

$$\begin{aligned} \text{左边} &= \frac{1}{2\pi} \iint \frac{da}{a} X_1(\omega) X_2^*(\omega) \Psi(a\omega) \Psi^*(a\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left[\int \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{a} da \right] X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega \end{aligned}$$

设中括弧内的积分存在, 即

$$\int \frac{|\Psi(a\omega)|^2}{a\omega} d(a\omega) = \int \frac{|\Psi(\tilde{\omega})|^2}{\tilde{\omega}} d\tilde{\omega} = c_\psi \quad (\tilde{\omega} = a\omega)$$

则上式最后成为:

$$\text{左边} = c_\psi \left[\frac{1}{2\pi} \int X_1(\omega) X_2^*(\omega) d\omega \right] = c_\psi \langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \text{右边}$$

由证明可见内积定理的成立以 c_ψ 存在为条件。又由于 $\omega' = a\omega$, 而 a 值非负, 因此存在条件可以更明确地写成:

$$c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (1.8)$$

1.4 小波变换的反演及对基本小波的要求

小波变换区别于某些常用变换(如傅里叶变换、拉氏变换)的一个特点是没有固定的核函数。但也不是任何函数都可用作小波变换的基本小波 $\psi(t)$ 。任何变换都必须存在反变换才有实际意义, 但反变换并不一定存在。对小波变换而言, 所采用的小波必须满足所谓“容许条件”(admissible condition), 反变换才存在。

1.4.1 容许条件

当 $c_\psi = \int_{-\infty}^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$ 时才能由小波变换 $WT_x(a, \tau)$ 反演源函数 $x(t)$ 。此时

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty WT_x(a, \tau) \psi_{ar}(t) d\tau \\ &= \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty WT_x(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau \end{aligned} \quad (1.9)$$

$c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$ 便是对 $\psi(t)$ 提出的容许条件。

证明: 由式(1.7)的内积定理便可证明式(1.9)。令式(1.7)中 $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \delta(t-t')$, 则根据 δ 函数的采样特性 $\langle x_1(t), \delta(t-t') \rangle = x(t')$, 式(1.7)便成为:

$$\begin{aligned} c_\psi x(t') &= \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int \langle x(t), \psi_{ar}(t) \rangle \langle \psi_{ar}(t), \delta(t-t') \rangle d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int WT_x(a, \tau) \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t'-\tau}{a}\right) d\tau \end{aligned}$$

也就是

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int WT_x(a, \tau) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) d\tau$$

此式的成立显然以 $c_\psi < \infty$ 为条件, 它也就是内积定理存在的条件。

注意: CWT 的定义式中 ψ 取共轭, 而反演公式(1.9)中 ψ 不取共轭。

由容许条件 $c_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$ 可以推论出: 能用作基本小波 $\psi(t)$ 的函数至少必须

满足 $\Psi(\omega=0)=0^{①}$ 。也就是说 $\Psi(\omega)$ 必须具有带通性质, 且 $\phi(t)$ 必是有正负交替的振荡波形, 使得其平均值 $=0$ 。这便是称之为“小波”(wavelet) 的原因。

证明:
$$\Psi(\omega) = \int \phi(t) e^{-j\omega t} dt$$

因此
$$\Psi(\omega=0) = \int \phi(t) dt = 0$$

1.4.2 能量的比例性(isometry of energy)

由 Moyal 公式能引出一个类似于巴塞瓦定理的关系, 即小波变换幅度平方的积分和信号的能量成正比。

$$\int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty |WT_x(a, \tau)|^2 d\tau = c_\phi \int_{-\infty}^\infty |x(t)|^2 dt \quad (1.10)$$

证明: 在式(1.7)中令 $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$, 便得:

$$\langle x_1(t), \phi_{a\tau}(t) \rangle = WT_x(a, \tau)$$

$$\langle \phi_{a\tau}(t), x_2(t) \rangle = WT_x^*(a, \tau)$$

$$\langle x_1(t), x_2(t) \rangle = \int |x(t)|^2 dt$$

将以上各关系代入式(1.7)中便得式(1.10)。

1.4.3 正规性条件(regularity condition)

本来, 满足容许条件的 $\phi(t)$ 便可以用作基本小波。但实际上往往要求更高些, 对 $\phi(t)$ 还要施加所谓“正规性条件”, 以便 $\Psi(\omega)$ 在频域上表现出较好的局域性能。为了在频域上有较好的局域性, 要求 $|WT_x(a, \tau)|$ 随 a 的减小而迅速减小。这就要求 $\phi(t)$ 的前 n 阶原点矩 $=0$, 且 n 值愈高愈好。也就是要求

$$\int t^p \phi(t) dt = 0, \quad p = 1 \sim n, \text{ 且 } n \text{ 值愈大愈好} \quad (1.11)$$

此要求的相应频域表示是: $\Psi(\omega)$ 在 $\omega=0$ 处有高阶零点, 且阶次愈高愈好(一阶零点就是容许条件)。即

$$\Psi(\omega) = \omega^{n+1} \Psi_0(\omega), \quad \Psi_0(\omega=0) \neq 0, n \text{ 愈大愈好} \quad (1.12)$$

式(1.11)和(1.12)就是正规性条件。

证明: ①先证式(1.11)。

因为

① 严格的数学证明还应要求 $\int \frac{dt}{(1+|t|^\alpha)} \cdot |\phi(t)| < \infty$, (α 是一个正数), 以便保持 $\Psi(\omega)$ 在 $\omega=0$ 附近连续。