数学物理方程近代方法

康盛亮　桂子鹏　编著

同济大学出版社

数学物理方程近代方法

康盛亮　桂子鹏　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是由编者根据教学实践中所积累的经验，并吸取了兄弟院校的同行们使用《数学物理方程中的近代分析方法》所提出的宝贵意见，对其中第二、三、五章，从表述方式或材料安排方面都作了较大改动，其他各章，对内容的表述和定理的论证也不同程度地作了修改，并对全书的习题和答案进行了相应的修改或补充，使本教材更适宜于教学。

本书内容包括：正则摄动和奇异摄动方法、泛函分析基本知识、积分方程理论及方法、微分方程的基本解和广义解、古典变分法和近代变分原理及变分问题的近似解法等。每章都配备适量的习题，并在书末给出了全部习题的答案或解答提示。

本书可作为工科院校研究生、高年级大学生的教材，也可作为工程技术人员自学用书。

责任编辑　许纪森
封面设计　[illegible]

数学物理方程近代方法
康盛亮　杜子鹏　编著
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
常熟市印刷七厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：11.875　字数：340 千字
1996 年 5 月第 1 版　1996 年 5 月第 1 次印刷
印数：1—2000　　定价：9.80 元
ISBN 7—5608—1610—X/O・142

再版前言

本书是 1991 年出版的《数学物理方程中的近代分析方法》的修订本。原书曾在同济大学和一些兄弟院校作为工科研究生“应用数学方法”课程的教材或教学参考书使用。这次我们根据在教学实践中积累的一些经验，并吸取使用该教材的同行们所提出的宝贵意见，将原书的部分内容作了修改。

这次修订，对第二、三、五章，从表述方式或材料安排方面作了较大改动，其他各章，对一些写得不够清楚和不够确切的地方也作了补充和修改，还对全书的习题和答案再次进行了审核，改正了个别错误，并略有增删，使本教材更便于教学。

同济大学研究生院对本书的再版给予了大力的支持，在此谨表示衷心的感谢。同时，我们还向关心本书和对它提出过宝贵意见的同志们表示真诚的感谢。我们热忱恳望使用和关心本教材的同志，对本书提出更多的改进意见，以使其质量能够不断地得到提高。

编　者

1995 年 5 月

前　言

《数学物理方程中的近代分析方法》(原名"应用数学方法")是工科有关专业研究生的一门重要的数学基础课,学生通过对本门课程的学习,可了解泛函分析的基本概念,并掌握处理数学物理方程的一些常用的近代解析方法,能为今后学习后继课程和进一步开拓知识面、开展工程科学研究提供必要的基础。

本书是这门课程的一本教材,可供工科研究生必修或选修之用,也可作为理、工科高年级大学生的教材或教学参考书,并可供工程技术人员自学参考。这本教材是我们根据 1990 年 9 月在天津大学召开的全国工科高等院校研究生"应用数学方法"课程研讨会上制定的教学大纲,结合作者多年来为同济大学理、工科专业研究生讲授"近代方法"的教学经验,并参考国内外现代有关论著的一些成果,把使用多年的作者的教学讲义进行较大的修改与充实后编著而成。本书内容包括正则摄动和奇异摄动方法、泛函分析基本知识、积分方程理论及方法、微分方程的基本解和广义解、古典变分法和近代的变分原理及变分问题的解法等。

本书主要特点:作者以近代分析观点贯穿全书,综合应用泛函分析方法和经典方法,既注意保持这两种方法的各自特色,又相互取长补短,把泛函分析方法用来解决数学物理问题;内容编排由浅入深,循序渐进,便于教学。文字叙述条理清楚,通俗易懂。各章内容都通过典型例子来阐明近代解析方法的基本思想和技巧。每章配备了适量的习题和参考文献,并在书末给出了全部习题的答案和部分习题的解答提示,以利于自学;本书既注意前后照应,自成完整体系,只要具备高等数学和微分方程基础知识的读者便可阅读;又注意各章内容的相对独立性,教学时可根据实际情况和要求作适当取舍。全书讲授时间大约为 54 学时(不包括"*"部分内容),连同"*"部分内容可在 72 学时内教完。

本书编写过程中,承上海交通大学袁公英、浙江大学蔡燧林和华中理工大学于寅等专家教授认真仔细地审阅了原讲义,并提出

了许多宝贵的意见，同济大学应用数学系的许多任课教师都为完善本书给予了很大的帮助，同济大学研究生院对本书的出版给予了大力支持，作者对此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，书中的缺点和不妥之处在所难免，恳请读者批评和指正。

编　者

1991.4 于同济大学

目　　录

第一章　摄动方法

本章主要介绍摄动法及其在力学和工程科学上的某些应用.摄动法是应用数学中的一个重要方法,它不仅可用于求解一大类微分方程的定解问题,而且它的基本思想和原理也可用于代数方程、积分方程、积分微分方程和差分方程等的求解.

§1.1　引　言

1.1.1　摄动问题的提出

在物理学和其他工程科学问题中存在着大量的含有小参数 ε 的数学问题 P_ε. 最常见的是微分方程的定解问题. 小参数 ε 可以包含在方程中,也可包含在定解条件或区域的边界中. 通常称这一类含有小参数 ε 的数学问题 P_ε 为摄动问题. 例如,摄动问题是一类含小参数 ε 的微分方程的定解问题:

$$P_\varepsilon:\begin{cases} L_\varepsilon[u_\varepsilon(x)] = f(x,\varepsilon), & x = (x_1,x_2,\cdots,x_n) \in \Omega \\ B_{\varepsilon,j}[u_\varepsilon(x)] = \varphi_j(x,\varepsilon), & j = 0,1,\cdots,k \end{cases}$$

其中,$0 < \varepsilon \ll 1$;L_ε 表示微分算子:$L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_{1,\varepsilon}$;$B_{\varepsilon,j}$ 表示定义在边界(或部分边界)上的微分算子. 当 $\varepsilon = 0$ 时,相应的定解问题 P_0 称为退化问题,其解我们用 u_0 表示.

摄动理论是研究这类问题的解法(称为摄动方法或渐近展开法)、解的性质及其与相应的退化问题 P_0 的关系,考察 P_ε 的解能否通过对 P_0 的解加以校正得到. 摄动方法是微分方程摄动问题的一种近似解法,它是寻求摄动问题的解析形式的近似解(称为渐近解),该渐近解是对非摄动问题(退化问题)解的一种校正,它能给出足够精确的解的解析结构,其结果常能用来对物理问题进行相当精确的定量和定性讨论,这种优点是数值解法所不及的.

摄动方法产生于19世纪末期关于天体力学的研究. 天文学家 Lindstedt 等人通过研究行星轨道的摄动问题创立了摄动理论. 当时,遇到一类含小参数的非线性微分方程,无法求出它的解,于是, Lindstedt 等人就尝试将它的解用小参数 ε 的幂级数来表示. 虽然这些级数解常是发散的,但由于能正确地描写和解释各种天体现象,也就被广泛采用. 但人们始终抱着很大怀疑,为什么这种发散级数也会给出正确的结论? 直到1892年,伟大的数学家兼力学家 Poincare 才在他的著名著作《天体力学的新方法》(New Methods of Celestial Mechanics) 中解决了这个问题. 他用严格的数学方法证明了这些级数虽然是发散的,但却是一种"渐近级数". 即虽然它的部分和 S_n 当 $n \to \infty$ 时不趋于有限值,但它的前几项之和当 $|\varepsilon|$ 充分小时,可任意接近问题的解,因此能够充分精确地描述自然现象.

建立了严格的数学理论以后,摄动方法才被自然科学家们承认,并广泛应用到自然科学的各领域中去. 50年代后期发展更为迅速,天文学家用它来研究天体现象,力学家们应用它来研究力学现象(如流体、固体和等离子体等中的力学问题),物理学家应用它来研究物理现象(如光、声、电、磁等中的波动问题). 近年来,还被用来研究化学(如化学反应动力学)、生物学(如生物振荡)以及控制论(如最优控制)中的许多问题. 由于摄动法在研究复杂的非线性问题时较之数值解法有其显著的优点. 因此,奇异摄动理论越来越受到国际学术界的重视,应用范围也越来越广泛. 不仅在流体力学中,依靠这种方法研究了流体的附面层现象,建立了流体的边界层理论;在板壳力学中解决了大挠度、大变形问题;在非线性振动问题中,依靠这种方法研究了具有弱非线性项的振动问题,建立了弱非线性振动的小扰动理论;在光的传播问题中,建立了几何光学的近似理论;而且还开辟了许多新的应用领域,例如,海洋工程、反应扩散、传热传质、大气动力学、声学、生物化学及经济数学、人口理论等.

我国力学界早就开始研究和应用摄动法. 1948 年，我国著名力学家钱伟长就用现在称为的合成展开法成功地解决了圆薄板的大挠度问题；1953 年，著名力学家郭永怀把 Poincare—Lighthill 方法推广应用于有边界层效应的粘性流问题，取得了一致有效的速度场渐近解，从而发展成为奇异摄动理论中的著名方法—— PLK 方法；1954 年，著名应用数学家林家翘对双曲型微分方程问题提出了解析特征线法，为研究非线性波的问题提供了一个新的有效途径. 在 60 年代初期，清华大学、复旦大学、吉林大学、福建师范大学以及中国科学院力学研究所等单位都开展了这一方面的研究. 在 70 年代末期，特别是 1979 年全国奇异摄动理论和应用学术会议以后，摄动理论和方法的研究在我国已取得重大的突破性进展，其中某些方面已开始接近国际水平，在理论研究和方法应用上都有着广阔的前景.

由此可见，奇异摄动理论是解决自然科学问题的一种有效工具，同时，自然科学领域是奇异摄动理论滋长的温床. 下面通过两个例子进一步说明奇异摄动和自然科学的关系.

例 1　弹簧振子——弱非线性振动问题

考察质点-弹簧系统的振动问题. 取物体的质量中心的静平衡位置作为坐标轴 Ox 的原点 O（图 1-1-1). 以 $x = x(t)$ 表示振动时质点 m 在时刻 t 的位移，F 表示质点所受的力. 根据牛顿第二运动定律可以得到运动方程为：

$$m\ddot{x} = F$$

其中 $\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ · 下面分三种情况来讨论：

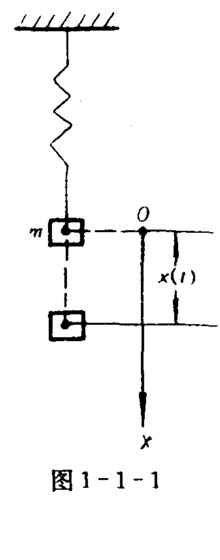

图 1-1-1

1）当振动位移较小时，由线弹性虎克定律，在不计阻尼，无外力作用的情况下有

$$F = -kx$$

其中 k 为弹簧的刚度. 从而得弹簧振子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0, \tag{1.1.1}$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$；$m$ 是物体质量. 容易解得

$$x=A\sin(\omega t+\varphi), \tag{1.1.2}$$

其中 A 和 φ 是任意常数，由初始条件确定. 由这个式子，可以看出，这时系统的振动频率为 ω.

2）当振动位移比较大时，弹簧的恢复力不再与振动位移成正比（即线弹性关系不成立），而是一曲线关系，假设

$$F=-(k_1x+k_2x^3),(0<k_2\ll 1)$$

在不计阻尼，无外力情况下，弹簧振子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x+\varepsilon x^3=0, \tag{1.1.3}$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$；$\varepsilon=\frac{k_2}{m}\ll 1$. 这就是著名的 Duffing 方程.

3）当弹簧振子置于介质中，这时考虑非线性阻尼影响，设摩擦阻力 $f=-\mu\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$，其中阻尼系数 $\mu\ll 1$. 在振动位移比较大，但无外力情况下，弹簧振子的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x+\varepsilon x^3+\beta\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=0, \tag{1.1.4}$$

其中 $\omega=\sqrt{\frac{k_1}{m}}$；$\varepsilon=\frac{k_2}{m}\ll 1,\beta=\frac{\mu}{m}\ll 1$.

一般地，弱非线性振动方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=\varepsilon f\left(x,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right). \tag{1.1.5}$$

要求出式 (1.1.5) 的精确解是相当困难的. 但是，当 $\varepsilon=0$ 时，它退化到方程(1.1.1)，而有解式 (1.1.2). 于是，我们自然期望当 $0<\varepsilon\ll 1$ 时，能够以退化方程 (1.1.1) 的解式 (1.1.2) 作为主要项，再补充以小项 $\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2x_2(t)+\cdots$（称为摄动项），以得到 ε 的幂级数形式的近似解（又称为半解析解）. 这个问题就是奇异摄动理论中所要研究的中心问题.

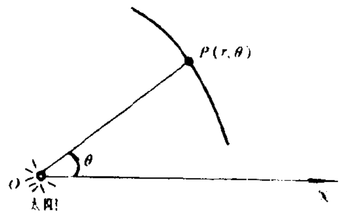

图1-1-2

例2 行星运行问题

考察某行星绕太阳的运动.取太阳 O 作为所引入的极坐标系 (r,θ) 的极点,以 r 表示行星 P 所处位置的极径,θ 为极角(见图1-1-2).根据万有引力定律,知道太阳与行星间的引力为

$$F=-G\frac{Mm}{r^2},$$

其中 G 表示引力常数;M 表示太阳的质量;m 表示行星质量.

在直角坐标系下:速度 $V=(\dot{x},\dot{y})$,加速度 $a=(\ddot{x},\ddot{y})$;

其中 $\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$;

在极坐标系下: $V=(V_r,V_\theta)$, $a=(a_r,a_\theta)$.

先导出关系公式:由 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,可得

$$\ddot{x}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\sin\theta,$$

$$\ddot{y}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\cos\theta,$$

故径向加速度为 $a_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2,$

横向加速度为 $a_\theta=\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right).$

根据牛顿第二运动定律得行星的运动微分方程:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}, & (1.1.6)\\ \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)=0, & (1.1.7)\end{cases}$$

由方程 (1.1.7)有

$$r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=h\ (常数). \tag{1.1.8}$$

再令

$$u=\frac{1}{r}. \tag{1.1.9}$$

因 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\dfrac{-1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\Big/\dfrac{h}{r^2}=-\dfrac{1}{h}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}=-\frac{1}{h}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\dot{r})=-\frac{1}{h}\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}}=-\frac{1}{h}\cdot\frac{r^2}{h}\left[r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2-\frac{GM}{h^2}\right]$$

$$=-\frac{r^2}{h^2}\left[r\frac{h^2}{r^4}-\frac{GM}{r^2}\right]=\frac{GM}{h^2}-\frac{1}{r}=\frac{GM}{h^2}-u,$$

得到关于 u 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}. \tag{1.1.10}$$

它有周期解为

$$u=h^{-2}GM[1+e\cos(\theta-\theta_0)], \tag{1.1.11}$$

其中 e 和 θ_0 为积分常数，由初始条件确定. 因而行星运动的轨道方程为

$$r=\frac{h^2}{GM[1+e\cos(\theta-\theta_0)]}. \tag{1.1.12}$$

对于行星来说，$e<1$，运行轨道是椭圆 (若 $e=1$，(1.1.12) 式表示抛物线；若 $e>1$，它表示双曲线. 这时该天体将远离太阳而去，而不会绕太阳运行，因而不是太阳的行星).

这个问题看来似乎解决了，其实不然. 经过长期观察，发现行星的轨道形状并不是一成不变的，而是存在着摄动现象. 在一个周期后，行星轨道的近日点有极微小的移动，所以，(1.1.10)—(1.1.12) 式给出的运动方程和轨道方程是不准确的.

从广义相对论出发，可以导得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+u=\frac{GM}{h^2}(1+\varepsilon u^2). \tag{1.1.13}$$

所以，前面给出的方程 (1.1.10) 只是 (1.1.13) 的退化方程(即 $\varepsilon=0$ 时的方程). 我们知道(1.1.10) 存在周期解(1.1.12). 这样，自然要问：当 $0<\varepsilon\leqslant 1$ 时，是否也存在着周期运动? 运动轨迹是什么? 是否存在形如

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots$$

的渐近解？其中u_0为退化方程（1.1.10）的解. 这又是一奇异摄动问题.

我们将在以后几节给出这两个例子的具体解法. 现在这里只是希望通过这两个例子进一步说明奇异摄动问题不仅来自自然科学，并且还是自然科学发展到一定阶段的产物，是自然科学对我们提出更高要求的结果. 如果我们满足于线性振动系统或牛顿力学，或还没有观察到行星轨道的摄动现象，或者为了求解而随意地略去微分方程中含有小参数的项，那我们就不会遇到奇异摄动问题，也就不能获得对自然界的更深入的了解.

随着近代科学技术的发展，我们正遇到越来越多的奇异摄动问题，这方面的应用实例将在 §1.4 中进一步给出. 近代处理奇异摄动问题的方法或技巧，已成为每个自然科学工作者（包括工程技术人员）应该掌握的普通数学方法.

1.1.2 阶的符号和标准函数

在摄动问题的讨论中，量的阶的符号是常常要用到的.

设$f(\varepsilon)$为ε的单值实函数，在近似计算过程中，我们经常要研究当$\varepsilon \to 0$时，函数$f(\varepsilon)$的极限，它有三种可能性：当$\varepsilon \to 0$时，

$$\begin{cases} f(\varepsilon) \to 0 \\ f(\varepsilon) \to A \quad (0 < A < \infty) \\ f(\varepsilon) \to \infty \end{cases} \tag{1.1.14}$$

在第一种情形$f(\varepsilon) \to 0$（第三种情形也类似）中，当$\varepsilon \to 0$时，它趋于零的速率随$f(\varepsilon)$解析表达式的不同而异. 为了研究当$\varepsilon \to 0$时，函数$f(\varepsilon)$趋向于零（或趋向于∞）的速率等性态，我们常选用一个被称为标准函数$g(\varepsilon)$的函数来与函数$f(\varepsilon)$相比较.

定义 1.1.1 设$g(\varepsilon)$是ε的实连续函数，且$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon)$存在（包括$\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = \infty$），则$g(\varepsilon)$称为标准函数.

最简单和最常用的标准函数为

$$\cdots \varepsilon^{-n}, \cdots \varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^n, \cdots$$

有时，还有其他形式的标准函数，例如

$\sin\varepsilon, \cos\varepsilon, \mathrm{tg}\varepsilon, \mathrm{sh}\varepsilon, \mathrm{ch}\varepsilon, \mathrm{th}\varepsilon, \cdots$

$\log\varepsilon^{-1}, \log(\log\varepsilon^{-1}), \exp(\varepsilon^{-1}), \exp(-\varepsilon^{-1}), \varepsilon\log\varepsilon, \varepsilon^2\log\varepsilon, \varepsilon^2(\log\varepsilon)^2,$ $\cdots$.

$f(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon \to 0$ 时的速率等性态，是按它和确定的标准函数 $g(\varepsilon)$ 相比较而决定. 这里，我们以量的阶符大 O 和小 o 为记号，来表示函数 $f(\varepsilon)$ 与标准函数相比较的性态.

定义 1.1.2　阶符 O

1) 如果存在一个与 ε 无关的正数 A 和一个 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$|f(\varepsilon)| \leqslant A|g(\varepsilon)|, (|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0) \tag{1.1.15}$$

成立，则称 $f(\varepsilon)$ 与 $g(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 近旁为同阶，并记作

$$f(\varepsilon) = O[g(\varepsilon)], (\varepsilon \to 0) \tag{1.1.16}$$

条件(1.1.15) 也可用下式来表示：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right| < \infty. \tag{1.1.17}$$

例如，当 $\varepsilon \to 0$ 时，有

$\sin\varepsilon = O(\varepsilon), \sin\varepsilon^2 = O(\varepsilon^2), \sin 2\varepsilon - 2\varepsilon = O(\varepsilon^3), \cos\varepsilon = O(1),$ $1 - \cos\varepsilon = O(\varepsilon^2), J_0(\varepsilon) = O(1), J_0(\varepsilon) - 1 = O(\varepsilon^2), \mathrm{sh}\varepsilon = O(\varepsilon),$ $\mathrm{ch}\varepsilon = O(1), \mathrm{th}\varepsilon = O(\varepsilon), \mathrm{tg}\varepsilon = O(\varepsilon), \mathrm{ctg}\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$.

应该注意，在一个力学问题或数学问题中，不仅参数 ε 的选择不是唯一的，而且标准函数的选择也不是唯一的，如 $\sin\varepsilon$ 可以有下列各标准函数：

$$\sin\varepsilon = O(\varepsilon), \text{或} \sin\varepsilon = O(\mathrm{tg}\varepsilon), \text{或} \sin\varepsilon = O\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right).$$

2) 如果 f 是 ε 和另一个变量 x 的函数，而 $g(x,\varepsilon)$ 是一标准函数. 若存在与 ε 无关的常数 $A > 0$ 和 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$|f(x,\varepsilon)| \leqslant A|g(x,\varepsilon)|, (|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0) \tag{1.1.18}$$

成立，则称 $f(x,\varepsilon)$ 与 $g(x,\varepsilon)$ 为同阶，并记作

$$f(x,\varepsilon) = O[g(x,\varepsilon], (\varepsilon \to 0) \tag{1.1.19}$$

如果 A、ε_0 都与某个区域上的 x 无关，则(1.1.19) 式称为在该区间上一致成立；反之，则称为非一致成立. 例如：

$\sin(x+\varepsilon) = O(1), (\varepsilon \to 0)$ 一致成立，$-\infty < x < \infty$,.

$e^{-\varepsilon x}-1=O(\varepsilon),(\varepsilon\to 0)$ 一致成立，$-\infty<x<\infty$，

$\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}=O(\varepsilon),(\varepsilon\to 0)$ 非一致成立，在包含 $x=0$ 的区间上.

定义 1.1.3　阶符 o

1）若对任意一个与 ε 无关的常数 $\delta>0$，存在 $\varepsilon_0>0$，使得

$$|f(\varepsilon)|\leqslant\delta|g(\varepsilon)|,(|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0) \tag{1.1.20}$$

成立，则称 $f(\varepsilon)$ 的量阶比 $g(\varepsilon)$ 的高（或低，当 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(\varepsilon)=\infty$ 时），并记作

$$f(\varepsilon)=o[g(\varepsilon)],(\varepsilon\to 0) \tag{1.1.21}$$

不等式（1.1.20）也可用下式表示：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}\right|=0. \tag{1.1.22}$$

例如，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$\sin\varepsilon=o(1),\sin\varepsilon^2=o(\varepsilon),\cos\varepsilon=o(\varepsilon^{-\frac{1}{2}})$，

$J_o(\varepsilon)=o(\varepsilon^{-1}),\mathrm{cth}\varepsilon=o(\varepsilon^{-\frac{3}{2}}),\mathrm{ctg}\varepsilon=o(\varepsilon^{-\frac{n+1}{n}})(n>0)$，

$1-\cos 3\varepsilon=o(\varepsilon),\exp(-\varepsilon^{-1})=o(\varepsilon^n)(n>0)$.

2）若 $f=f(x,\varepsilon)$，而标准函数 $g=g(x,\varepsilon)$，如果式(1.1.20)中的 δ 与 ε_0 都和 x 无关，则称式(1.1.21）是一致成立的；反之，则称是非一致成立的.

例如，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\sin(x+\varepsilon)=o(\varepsilon^{-\frac{2}{3}})$ 在 $-\infty<x<\infty$ 上一致成立，而

$$e^{-\varepsilon t}-1=o(\varepsilon^{\frac{1}{2}})(-\infty<t<+\infty)$$

和　　$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=O(\varepsilon^{\frac{3}{4}})$（包含 $x=0$ 的区间内）

当 $\varepsilon\to 0$ 时非一致成立.

应该指出，量级的意义在数学上和在力学上略有不同. 数学上的量级，对于比例系数毫无要求，例如，对于

$$K\varepsilon=O(\varepsilon) \tag{1.1.23}$$

而言，虽然 $K=100000$，式(1.1.23)仍有效，它还是数学意义上的 ε 量级. 但在力学问题中，人们总是希望 $O(\varepsilon)$ 和 ε 量级相当（即 $O(\varepsilon)$ 在 1ε 到 10ε 之间或 0.1ε 到 ε 之间）. 如果 $O(\varepsilon)$ 表示力学理论