电磁测量与仪表丛书

误差理论在电磁测量中的应用

董怀武　编著

机械工业出版社

本书介绍了误差理论在电磁测量中的应用。全书共七章，重点讲述了静态测量和动态测量的误差估计方法，其中包括：误差概念；随机误差；系统误差；误差合成；实验设计；最小二乘法和随机过程的误差等基本的和常用的内容。

本书讲解细致，通俗易懂，理论联系实际，侧重于应用。凡具有普通微积分和电磁测量基本知识的读者均能阅读本书。本书可供从事电磁测量和仪器仪表设计与制造的科技人员及大专院校有关专业师生参考。

电磁测量与仪表丛书

误差理论在电磁测量中的应用

董怀武　编著

•

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南街一号）

（北京市书刊出版业营业许可证出字第117号）

中国农业机械出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

•

开本 850×1168 1/32·印张 8 $^1/_2$·字数 218 千字

1986年9月北京第一版·1986年9月北京第一次印刷

印数 00,001—3,400·定价 2.15 元

•

统一书号：15033·6044

目　录

符号表
第一章　误差概念 ……………………………………………… 1
一、测量的定义和分类 ……………………………………… 1
（一）直接测量 ……………………………………………… 1
（二）间接测量 ……………………………………………… 1
（三）组合测量 ……………………………………………… 2
二、误差表示法 ……………………………………………… 2
（一）绝对误差 ……………………………………………… 3
（二）相对误差 ……………………………………………… 4
三、函数误差的计算 ………………………………………… 8
（一）误差传递的一般公式 ………………………………… 8
（二）举例 …………………………………………………… 11
（三）隐函数和复合函数误差的计算 ……………………… 15
四、测量误差的来源和分类 ………………………………… 17
（一）测量误差的来源 ……………………………………… 17
（二）测量误差的分类 ……………………………………… 19
五、衡量准确度的尺度 ……………………………………… 23
（一）系统误差和随机误差的数学表达 …………………… 23
（二）系统误差和随机误差对测量的影响 ………………… 26
六、系统误差和随机误差的传播 …………………………… 27
（一）数学期望和方差的基本运算公式 …………………… 27
（二）系统误差的传播公式 ………………………………… 28
（三）随机误差的传播公式 ………………………………… 29
（四）举例 …………………………………………………… 30
七、数据处理中常用的近似公式 …………………………… 30
第二章　随机误差 ……………………………………………… 33
一、随机事件及其概率 ……………………………………… 33
二、随机样本和统计直方图 ………………………………… 35
三、正态分布和概率计算 …………………………………… 38

四、数学期望和方差的估计 ……41
（一）概率乘法定理 ……42
（二）数学期望和方差的最大似然估计 ……43
（三）算术平均值的数学期望与方差 ……45
（四）方差的无偏估计和贝塞尔公式 ……46
五、数学期望的置信区间 ……49
（一）小概率原理、置信区间和显著水平 ……49
（二）方差已知和大样本时数学期望的置信区间 ……49
（三）方差未知和小样本时数学期望的置信区间 ……53
六、随机误差计算举例 ……55
（一）数据舍入规则与有效数字 ……55
（二）随机误差计算步骤 ……57
（三）计算举例 ……59
（四）算术平均值和标准差的简便算法 ……61
七、粗差准则和坏值的剔除 ……63
（一）拉依达（Райта）准则 ……63
（二）格拉布斯（Grubbs）准则 ……65
八、函数随机误差的计算 ……67
（一）协方差和相关系数的估计 ……67
（二）函数方差的估计 ……67
（三）举例 ……67
第三章　系统误差 ……76
一、系统误差的估计方法 ……76
（一）比对法 ……76
（二）解析法 ……77
（三）实验法 ……81
（四）估计法 ……83
二、系统误差对测量结果的影响 ……84
三、系统误差的检验 ……86
（一）实验比对法 ……86
（二）剩余误差观察法 ……86
（三）实验数据统计检验法 ……92
四、消除系统误差的基本方法 ……102

(一) 从误差来源上消除系统误差……102
(二) 用修正方法消除系统误差……102
(三) 应用测量技术消除系统误差……106
第四章 误差合成……115
一、已定系统误差的合成……115
二、随机误差的合成……116
三、未定系统误差的合成……118
(一) 常见的误差分布……118
(二) 常见分布律的数字特征量……120
(三) 广义方和根合成公式……121
(四) 举例……124
四、综合误差的合成……126
五、简化广义方和根合成……132
第五章 实验设计……136
一、微小误差准则……136
(一) 系统误差的可略准则……136
(二) 随机误差的可略准则……138
(三) 不确定度的可略准则……139
(四) 标准的选取……140
二、误差分配……141
(一) 误差分配方法……141
(二) 举例……144
三、最佳测量方案的确定……146
(一) 方案比较法……146
(二) 求极小值法……147
四、实验设计举例……149
(一) 设计任务……149
(二) 误差分析……149
(三) 误差分配……151
(四) 对选定的分配方案进行核算……153
五、正交设计……154
(一) 正交表……154
(二) 正交设计举例……156

（三）小结……161
第六章 最小二乘法……163
一、矩阵的基本知识……163
（一）基本概念……163
（二）矩阵的加减运算和数乘矩阵……165
（三）矩阵乘法……166
（四）矩阵的基本类型……167
（五）矩阵求逆……168
（六）矩阵导数……171
（七）秩的概念……172
（八）矩阵的迹……173
二、组合测量的误差……173
（一）误差矩阵……173
（二）协方差矩阵……176
（三）举例……178
（四）相关系数的估计……181
三、等精密度线性组合测量……182
（一）原理与公式……182
（二）应用举例……185
四、等精密度非线性组合测量……196
（一）原理与公式……196
（二）应用举例……198
五、非等精密度测量……202
（一）广义算术平均值和权的概念……203
（二）单位权方差和广义算术平均值的方差……206
（三）非等精密度的组合测量……210
六、曲线拟合……213
（一）曲线拟合的原理与公式……213
（二）直线拟合……215
（三）曲线拟合的线性化……218
（四）多项式（抛物线）拟合……225
第七章 随机过程的误差……229
一、随机过程及其特征……229

（一）随机过程的基本概念……229
（二）随机过程的特征量……230
（三）随机过程特征量的实验估计……231
二、平稳随机过程……236
（一）平稳随机过程的特点……236
（二）平稳随机过程的各态历经性质……238
（三）平稳随机过程的谱……243
三、线性测量系统动态误差的估计……253
（一）线性测量系统的响应特性……253
（二）线性测量系统输出的特征量……256
参考文献……260

第一章 误差概念

一、测量的定义和分类

测量是人类认识物质世界和改造物质世界的重要手段之一。因此，无论从事生产斗争，还是进行科学实验，都离不开测量。所谓测量，就是通过物理实验的方法，把被测量与作为标准的同种类单位量进行比较的过程。

根据获得测量结果的不同方式，可将测量分为直接测量、间接测量和组合测量三类。

（一）直接测量

这种测量，其测量结果可直接从实验数据中获得。例如，用尺测量长度，用电流表测量电流，用温度计测量温度等等，均属于直接测量。

直接测量广泛用于工程技术测量中。

（二）间接测量

这种测量的结果，是在直接测量几个与被测量具有一定关系的数量基础之上得到的。电阻系数ρ'的测量可作为间接测量的例子。众所周知，导体的电阻R与它的长度l及截面积S之间具有下述关系

$$R=\rho'\frac{l}{S}$$

因此，可以先直接测量电阻R、长度l及截面积S，然后按下式求出电阻系数

$$\rho'=R\frac{S}{l}$$

当被测量不能直接测量，或测量很复杂，或用间接测量比直接测量能获得更准确的结果时，多采用间接测量。

在计量学中，常常把通过直接测量长度、质量和时间以求得未知参量数值的间接测量，称为绝对测量。例如，用电流天平测量电流即属于绝对测量。

（三）组合测量

对于组合测量，其测量结果是在一系列直接测量的基础上，通过求解方程组获得的。这种测量的一个典型实例是电阻温度系数的确定。例如，标准电阻线圈的电阻与温度之间的关系，可用下述多项式表示

$$\begin{aligned} R_t &= R_{20}[1+\alpha'(t-20)+\beta'(t-20)^2] \\ &\approx R_{20}+R(t-20)\alpha+R(t-20)^2\beta' \end{aligned} \quad (1\text{-}1)$$

式中　R_t——在 t ℃时的电阻实际值；

R_{20}——在20℃时的电阻实际值；

R——标准电阻的标称值或名义值；

α'和β'——温度系数。

从式（1-1）可以看出，为了确定α'、β'和R_{20}，至少需要给出三种温度状态t_1、t_2和t_3，并分别测出相应的电阻R_{t_1}、R_{t_2}和R_{t_3}，可得

$$R_{t_1}=R_{20}+R(t_1-20)\alpha'+R(t_1-20)^2\beta'$$
$$R_{t_2}=R_{20}+R(t_2-20)\alpha'+R(t_2-20)^2\beta'$$
$$R_{t_3}=R_{20}+R(t_3-20)\alpha'+R(t_3-20)^2\beta'$$

解上述方程组，即可求出α'、β'和R_{20}。

组合测量多用于精密计量和科学实验中。

二、误差表示法

在进行测量时，由于测量工具不准确，测量方法的不完善，各种外界因素对测量的影响，实验者感觉器官和认识能力的局限性，加上被测量与测量单位的比值在多数情况下的不可通约性，都会使测量结果失真，其失真程度即测得值与其真值之间的差异称作误差。

实践证明，一切测量结果都具有误差，误差自始至终存在于所有科学实验的过程之中。因此，在进行测量时，我们的目标并

不是使误差为零（因为这是办不到的）而是设法把误差控制在我们所需要的范围之内，并通过数学处理来估算误差的大小。

为了定量研究误差，按误差的表示方法可分成绝对误差和相对误差两种。

（一）绝对误差

绝对误差等于给出值与其真值的差，即

绝对误差＝给出值—真值[1]

或用符号表示成

$$\Delta X = X - X_0 \tag{1-2}$$

式中的给出值 X 是指：在检定指示电表时，它为被检刻度点的示值；在检定量具（度量器）时，它为被检定量具的标称值或名义值；在测量时它为测出值；而在近似计算中，它为近似值等等。式（1-2）中的真值 X_0 是指：在规定的时间、空间或状态下，被测参量 X 的客观存在值。真值有如下几种：

理论真值，例如理想电容和电感，其上的电压与电流的相位差角应为90°。

约定真值，例如时间单位——秒是铯 133 原子基态的两个超精细能级之间跃迁的辐射周期的9 192 631 770 倍的持续时间。凡按上述条件复现出的量值，称为约定真值。

相对真值，在实际检定工作中，为了确定被检对象的误差，通常将被检对象与它的标准进行比对，这时如果标准的误差可略（可略的条件，参看第五章第一节），则由标准所确定的值，即可作为被检对象的相对真值，即被测量的实际值。

例 1　今测得某电容器的电流与电压的相位差角为89°50′，则电容器的角误差为

$$\Delta\varphi = 89°50' - 90° = -10'$$

例 2　检定某电流表，若被检表的示值为10安，标准表对应该示值的读数为10.1安，则被检表在示值10安处的绝对误差为

$$\Delta I = 10 - 10.1 = -0.1\text{A}$$

例 3　标准电阻的标称值为100欧，其实际值为99.98欧，则

该电阻的阻值误差为

$$\Delta R=100-99.98=0.02\Omega$$

通过上面例子可见，绝对误差是个代数量且为名数，并以被测量的单位表示。

在实际测量中，除绝对误差外还会用到修正值C_x，它与绝对误差等值反号，即

$$C_x=-\Delta X=X_0-X \tag{1-3}$$

例如，上面例1中电容器的相角修正值为$C_\varphi=10'$；例2中电流表在示值10安处的修正值为$C_I=0.1$安；例3中标准电阻的修正值为$C_R=-0.02$欧。

通过检定，可以确定被检仪器的修正值。知道修正值以后，利用式（1-3）的关系，可以求得被检仪器的实际值为

$$X_0=X+C_x \tag{1-4}$$

例如，用某电压表去测量电压，若电压表的示值为10.6伏，该示值的修正值为－0.1伏，则被测电压的实际值为

$$U_0=U+C_U=10.6-0.1=10.5\text{V}$$

从上例可见，当引入修正值以后，即可消除仪器误差的影响，从而保证了量值的准确传递。

根据不同仪器的特点，修正值常以曲线、表格或公式等形式给出。在某些自动测量仪器中，可预先把修正值贮存起来，并在测量中进行自动修正。

（二）相对误差

上面所讲的绝对误差，其不足之处是不能反映测量的准确程度。例如，今测量两个电压得：$U_1=10$伏，$\Delta U_1=1$毫伏；$U_2=10$毫伏，$\Delta U_2=0.1$毫伏。这里，虽然$\Delta U_1\gg\Delta U_2$，但绝不能说测量U_2比测量U_1准。因为前者是测量10伏时差了1毫伏，而后者是测量10毫伏时差了0.1毫伏，它们的误差在被测量中所占的比重不同。为了便于比较测量的准确程度，又提出了相对误差的概念。

在相对误差的表达式中，分子均为绝对误差，主要区别在于分母。根据分母所采用的量值不同，相对误差分为实际相对误差、

标称或示值相对误差及引用或满度误差三种。

（1）实际相对误差

这种误差被定义为绝对误差与真值或实际值的比，通常用百分数表示，其表达式为

$$\gamma'_x = \frac{\Delta X}{X_0} = \frac{\Delta X}{X_0}100\% \qquad (1\text{–}5)$$

上式多用于理论分析或精密测量中。

（2）标称或示值相对误差

该误差被定义为绝对误差与仪器示值或量具标称值的比，即

$$\gamma'_x = \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta X}{X}100\% \qquad (1\text{–}6)$$

上述表达式多用在检定工作和工程测量中。

（3）引用或满度误差

前述的标称或示值相对误差，虽然可用来表征仪器或量具的准确度，但是如用它来表征指示仪表的准确度时，则有许多不便之处。其原因是，指示仪表是用来测量其量限内的某一被测量。这样一来，在仪表刻度的绝对误差已定的情况下，如用它来测量不同大小的被测量时，由于分母取值不同，其示值相对误差也在改变。为了克服这一缺点，可采用仪表的测量上限值即满度值X_n作分母，其表达式为

$$\gamma_n = \frac{\Delta X}{X_n} = \frac{\Delta X}{X_n}100\% \qquad (1\text{–}7)$$

由于引用误差的分母是固定的，故用它表征指示仪表的准确度级就比较简便了。

有了相对误差，就可以利用它来比较测量不同大小被测量之间的准确程度了。

例如，对上面测量两个电压的例子来讲，测量U_1与U_2的示值相对误差分别为

$$\gamma'_1 = \frac{\Delta U_1}{U_1}100\% = \frac{1\times10^{-3}}{10} = 0.01\%$$

$$\gamma_2''=\frac{\Delta U_2}{U_2}100\%=\frac{0.1\times10^{-3}}{10\times10^{-3}}=1\%$$

可见，虽然$\Delta U_1\gg\Delta U_2$，但测量U_1反而比U_2来得准确。

再如，今检定一只量限$I_n=5$安的电流表，数据如表1-1所示。试求仪表各示值的绝对误差、修正值、实际相对误差、示值相对误差和引用误差，并确定仪表的准确度级。

计算结果见表1-1。

表1-1 某电流表的检定数据

I(A)	I_0(A)	ΔI(A)	C_I(A)	γ'(%)	γ''(%)	γ_n(%)
1	1.01	−0.01	0.01	−0.99	−1.0	−0.2
2	1.98	0.02	−0.02	1.01	1.0	0.4
3	3.01	−0.01	0.01	−0.33	−0.3	−0.2
4	4.08	−0.08	0.08	−1.96	−2.0	−1.6
5	5.02	−0.02	0.02	−0.40	−0.4	−0.4

从表1-1中可以看出，由于仪表各示值的绝对误差的大小和符号均不相同，故与其相对应的引用误差也不一样。为了使仪表在工作时不超差，在确定其准确度级时，应以最大引用误差（又称允许误差或误差限）为准。考虑到电工仪表的准确度级a，根据国家标准GB 776-76《电气测量指示仪表通用技术条件》的规定，共分：0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5和5.0等七级。它表明仪表在正常工作条件下，其最大引用误差的绝对值γ_{nm}不能超过的界限，即

$$\gamma_{nm}=\frac{\Delta X_m}{X_n}100\%\leqslant a\% \tag{1-8}$$

对本例来讲，由于仪表的最大引用误差为

$$1.5\%<1.6\%<2.5\%$$

故仪表的准确度级应定为2.5级，即$a=2.5$。

这里应当指出，仪表的允许误差只能作为判断仪表是否合格的一个尺度，但是从使用仪表的角度出发，在应用仪表进行测量时

所产生的测量误差，可能超过仪表的准确度级别。

由式（1-8）可知，在应用仪表进行测量时所能产生的最大绝对误差（简称误差限）为

$$\Delta X_m \leqslant a\% X_n \tag{1-9}$$

而用仪表测量X的最大示值相对误差（简称相对误差限）为

$$\gamma_m = \frac{\Delta X_m}{X} \leqslant a\% \frac{X_n}{X} \tag{1-10}$$

由上式可以看出，用指示仪表测量某一被测量所能产生的最大示值相对误差，不会超过仪表允许误差$a\%$乘以仪表测量上限X_n与测量值X的比。在实际测量中为可靠起见，可用下式对仪表的测量误差进行估计，即

$$\gamma_m = a\% \frac{X_n}{X} \tag{1-11}$$

例 用量限为5安，准确度级为0.5级的电流表，分别测量两个电流，得值$I_1=5$安，$I_2=2.5$安，试求测量I_1和I_2的相对误差限为多少？

解 由式（1-11）得

$$\gamma_{m1} = a\% \frac{I_n}{I_1} = 0.5\% \times \frac{5}{5} = 0.5\%$$

$$\gamma_{m2} = a\% \frac{I_n}{I_2} = 0.5\% \times \frac{5}{2.5} = 1.0\%$$

可见，当仪表的准确度级选定时，如所选仪表的测量上限越接近被测量的值，则测量误差的绝对值越小。

再如，某被测电压约为95伏，现有0.5级量限为300伏和1.0级量限100伏的电压表各一只，试问选用哪只电压表进行测量为好？

解 用第一只表和第二只表进行测量时的误差分别为

$$\gamma_{m1} = a_1\% \frac{U_{n1}}{U} = 0.5\% \times \frac{300}{95} = 1.6\%$$

$$\gamma_{m2} = a_2\% \frac{U_{n2}}{U} = 1.0\% \times \frac{100}{95} = 1.1\%$$

由上例可见，如量限选择得当，用1.0级仪表进行测量反而比用

0.5级表来得准。因此，在选用指示仪表时，要纠正那种单纯追求准确度级“越高越好”的错误倾向。实际选表时，应根据被测量的大小，并兼顾仪表的准确度级别和测量上限进行合理选择。为充分发挥仪表的准确度起见，被测量的大小应大于所选仪表测量上限的三分之二，即$X>2X_n/3$。换句话说，在测量时，仪表的指针应工作于从零标算起的三分之二以上部分，这时仪表的测量误差为

$$\gamma_m < a\% \frac{X_n}{\frac{2}{3}X_n} = 1.5a\%$$

即最大测量误差不会超过仪表允许误差的1.5倍。

根据同样理由，在用指示法检定仪表时，标准表的量限和被校表的量限，应尽可能相等。

应当指出，在使用带有指针的万用电表测量电阻时，仪表的指针应尽量工作在标尺的中间部分，即所选量限的中心电阻值应尽可能地接近被测电阻的大小，这时仪表的测量误差最小（参看第五章第三节）。

考虑到，当ΔX很小时，$X \approx X_0$，则有

$$\gamma_x' \approx \gamma_x' = \gamma_x \qquad (1\text{-}12)$$

这时实际相对误差与示值相对误差基本相同。为了讨论方便起见，今后对这两种误差统称相对误差并用符号γ表示，而不再加以区别。

三、函数误差的计算

上节讨论了自变量或直接测量误差的计算，下面接着介绍一下函数或间接测量的误差计算问题。

（一）误差传递的一般公式

现在推导一般函数的误差传递公式。

设Y是N个自变量$X_1, X_2, \cdots, X_N$的函数，即

$$Y = F(X_1, X_2, \cdots, X_N) \qquad (1\text{-}13)$$

若已知 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 的误差分别为 $\Delta X_1, \Delta X_2, \cdots, \Delta X_N$，那么应如何计算函数$Y$的绝对误差$\Delta Y$呢？解决这个问题的通常办法是，将式（1-13）的非线性函数加以线性化。考虑到在一般情况下，物理量Y是随X_1，X_2，…，X_N连续变化的，且误差是个微小量，因此可将函数Y在真值$(X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{N0})$附近展成台劳级数，并略去二次以上的高阶误差项，于是Y可近似地表示成X_j的线性函数，即

$$Y = F(X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{N0}) + \sum_{j=1}^{N} F'_{xj}(X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{N0})(X_j - X_{j0}) \tag{1-14}$$

根据绝对误差的定义，并考虑到

$$F'_{xj}(X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{N0}) = \frac{\partial F}{\partial X_j}$$

于是上式可改写成

$$\Delta Y = Y - Y_0 = Y - F(X_{10}, X_{20}, \cdots, X_{N0}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial X_j} \Delta X_j \tag{1-15}$$

式中 $\frac{\partial F}{\partial X_j}$——误差传递系数。

上式为函数的绝对误差表达式，如将等式两边除以Y_0，可得函数的相对误差表达式，即

$$\gamma_Y = \frac{\Delta Y}{Y_0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_j} \Delta X_j \tag{1-16}$$

根据微分学原理，有

$$\frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial X_j} = \frac{\partial \ln F}{\partial X_j}$$

式中 $\ln F$——函数F的自然对数。

将上式代入式（1-16）得

$$\gamma_Y = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \ln F}{\partial X_j} \Delta X_j = \sum_{j=1}^{N} X_j \frac{\partial \ln F}{\partial X_j} \gamma_{xj} \tag{1-17}$$

上面导出的式（1-15）和式（1-17）是求函数误差的基本公式，在误差计算中极为重要，必须熟练掌握。现利用上述公式，推导几个在测量中常用的公式。

若线性函数

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_NX_N$$
$$=a_0+\sum_{j=1}^{N}a_jX_j$$

则由式（1-15）得

$$\Delta Y=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F}{\partial X_j}\Delta X_j$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(a_0+\sum_{j=1}^{N}a_jX_j\right)\Delta X_j$$
$$=\sum_{j=1}^{N}a_j\Delta X_j \tag{1-18}$$

若函数$Y=aX_1^{m_1}X_2^{m_2}\cdots\cdot X_N^{m_N}=a\prod_{j=1}^{N}X_j^{m_j}$

则由式（1-17）得

$$\gamma_Y=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial \ln F}{\partial X_j}\Delta X_j=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial X_j}\left(\ln a+\sum_{j=1}^{N}m_j\ln X_j\right)\Delta X_j$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\frac{m_j}{X_{j0}}\Delta X_j=\sum_{j=1}^{N}m_j\gamma_{xj} \tag{1-19}$$

通过上面推导可以看出，在计算线性函数的误差时，先算绝对误差比较方便；而在计算幂函数的误差时，则先算相对误差较为简便。

在计算交流电参量的误差时，还常常会遇到三角函数误差的计算。

若函数

$$\sin\varphi=f_1(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_N)$$