相对论流体力学

是长春 著

科学出版社

中国科学院科学出版基金资助项目

相对论流体力学

是长春 著

科学出版社

1992

（京）新登字092号

内 容 简 介

本书系统地介绍了相对论流体力学的基础知识并概括了迄今为止国内外的重要成果．主要内容包括狭义相对论基础、广义相对论基础、狭义相对论流体力学和广义相对论流体力学（包括电磁流体力学）．

本书可供天体物理工作者、流体力学和应用数学工作者阅读参考．

相对论流体力学

是长春 著

责任编辑 朴玉芬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1992年12月第一版 开本：850×1168 1/32

1992年12月第一次印刷 印张：10 3/4

印数：1—1700 字数：278000

ISBN 7-03-002983-6/O·552

定价：10.90元

序　　言

自从 Einstein 在本世纪初创立相对论学说以来，该学说在物理学、天文学等一些古老的科学领域中引起了革命性的变革。此后，随着测量技术的发展、理论研究的深入以及天体物理学等学科中一系列的重大发现，许多交叉学科逐渐形成，相对论流体力学就是其中之一，它在天体物理学、宇宙学、等离子体物理学等有关学科中有着重要的应用。

虽然有关相对论流体力学的科研工作在许多领域中不断涌现，但是系统论述相对论流体力学的专著却很少见。

本书作者多年从事流体力学和相对论流体力学方面的教学与科研工作。在此基础上作者参考了 Lichnerowicz, A., Weinberg, S., Landau, L. D., Lifschitz, E. M. 和 Taub, A. H. 等人有关相对论流体力学的专著并概括了相对论流体力学近年来的一些新成果，从而写成了这一本书。

本书取材广泛，论证详尽，是国内在相对论流体力学方面的第一本专著，也是一本入门书籍。它的出版，将有助于相对论流体力学这门交叉学科在我国得到进一步的发展。

中国科学院学部委员

谈镐生

1992 年 4 月

作 者 前 言

作者在1981年曾给北大地球物理系研究生讲授过“相对论流体力学”课程，本书部分内容取材于此讲稿。在写作此书过程中，作者适当删减了讲稿中有关相对论基础的内容，增添了相对论流体力学在近年来的发展。

虽然在天体物理学等许多学科中涉及相对论流体力学的内容，但除了散见于各种专门杂志的论文以及学术会议文集之外，Lichnerowicz 的“Relativistic Hydrodynamics and Magnetohydrodynamics”(1967)是作者迄今见到的唯一一本相对论流体力学书籍。为了给国内有关学术界介绍相对论流体力学这门交叉学科的基础及当前的发展，作者写了这本书，希望能起到铺路搭桥和抛砖引玉的作用。

读者只需对相对论和流体力学有一点起码知识，并具有一点线性代数和微积分的基础知识，就能阅读本书而不会有困难。

在本书的写作和出版过程中，作者曾得到中国科学院谈镐生教授、北京大学吴林襄教授、陈耀松教授等人的热情鼓励和大力支持；此外，在审校书稿中，北师大天文系曹盛林、北大地球物理系天文专业邓国祥、周道祺、周体健等诸位教授曾提出过许多宝贵意见，作者对他们谨表衷心的感谢。

作者本人水平有限，难免有不妥和谬误之处，恳望读者不吝指正。

作者

1992年4月

符 号 约 定

（一）时空间隔的平方及度规张量

$$(ds)^2 = -g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta.$$

（二）在 Minkowski 空间中，有

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= -\eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \\ &= (dt)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2,\end{aligned}$$

其中dx^1，dx^2，dx^3 是笛卡儿 Descartes 坐标系中的坐标微分。

（三）

$$\eta_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & +1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +\mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & 0 & +1\end{pmatrix}.$$

（四）曲率张量

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu}=\Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu}-\Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu}+\Gamma^\sigma_{\beta\nu}\Gamma^\alpha_{\sigma\mu}-\Gamma^\sigma_{\beta\mu}\Gamma^\alpha_{\sigma\nu}.$$

（五）Einstein 场方程

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}+\Lambda g_{\alpha\beta}=8\pi GT_{\alpha\beta}.$$

（六）c 为真空中的光速如无特殊需要，在本书中一般令 $c=1$。

目　录

第一章 绪 论

§1.1 相对论流体力学的背景

相对论流体力学是一门交叉学科，它和天体物理学、宇宙学、等离子体物理学、核物理学中的重离子反应等多种学科关系密切，并随着这些学科的发展而发展起来。

超新星（Supernova）爆炸及由此产生的相对论激波的传播是相对论流体力学研究的一个重要课题。著名的"蟹状星云"，就是古代一次超新星爆发直到今天遗留下来的残迹，我国古代史书中对这一事件有着详细的记载：北宋至和元年五月己丑（公元1054年7月4日），中国的司天监在"天关星"附近发现一颗"客星"，即短时间内突然出现的亮星，它光芒四射，在此后23天内，象太白金星那样明亮，人们在白天都能看到，而在夜间则在6个月之内都可以观察到，一直过了643天之后，才逐渐消失。

1987年2月23日，从大麦哲伦星云（离地球约16万光年）中，天文学家观察到又一次巨大的超新星爆发，并将其命名为SN1987A[55]，这是自从有了现代化天文仪器以来观测到的离地球最近的也是最强烈的一次超新星爆发，其亮度很高，便于研究其爆炸过程的细节。

研究表明：超新星爆炸主要有两种不同类型，即I型和II型，I型爆炸其质量在3—8 $M_\odot$ 之间，是碳球核爆燃所致，其特点是光谱中缺乏氢线；II型超新星爆炸其星体质量大于 $8M_\odot$，是铁球核心，当外层核反应熄灭时，外层塌缩物质的能量使铁球物质解离成中子和质子并发射出大量中微子，当塌缩使核心部分形成中子简并态物质后，很难进一步压缩了，便产生反弹激波，到外层引起爆炸，其特点是富有氢谱线，激波传播速度很高，可与光速比

拟。

相对论流体力学感兴趣的另一天体物理现象是"吸积"(accretion)[34] 及由此形成的"吸积盘"的运动，例如黑洞，能从其周围的星际空间中吸引气体或尘埃，使其下落到接近表面，当质点下落到接近表面时，物质流的速度接近光速。在双星系统中，也可能出现其中一颗子星的物质通过第一 Lagrange 点而流向另一颗致密子星，由于角动量守恒，物质流绕该子星旋转而形成吸积盘。

另一个重要例子是类星体 (quasar)[34]，自从 Maarten Schmidt 于 1963 年发现类星体的射电发射源以来，引起了天体物理学家们的广泛兴趣。它的巨大的能量来源及机制至今仍是一个谜，它具有磁场，有热的等离子体，相对论性质点运动等复杂现象相互作用，需要用相对论(磁) 流体力学对这些现象进行深入的研究。

在天体物理学实际问题中，常有多种复杂因素相互作用，如磁场、旋转、粘性、热传导、辐射、引力场等等在 Einstein 场方程、Maxwell 方程、重子守恒律等规律的作用下相互作用。考虑全部这些因素的严格解很难得到，但如果抓住问题中一个或几个主要起影响的因素，利用简化模型，利用经典流体力学中及相对论中行之有效的处理方法进行研究，常能给问题以定性的甚至一定程度上定量的结果。

在理论方面，从 Einstein 建立相对论的早期开始，研究相对论流体力学运动规律的任务就已经提出来了，例如 Einstein 在其"广义相对论基础"[47]一文中就曾指出：可根据场方程建立无摩擦绝热流体的 Euler 方程。其后随着相对论本身的深入研究和天体物理学等的发展，相对论流体力学的研究也得到了相应的发展。L. D. Landau, E. M. Lifshitz 在其《连续介质力学》[38]一书中用专门一章篇幅来阐述相对论流体力学的基础。

A. Lichnerowicz[15] 于 1967 年出版了他的专著《相对论流体力学和磁流体力学》一书，这本书系统地论述了相对论流体力学的理论基础。诺贝尔奖金获得者 S. Weinberg 在他的名著《引力论和宇宙论》[37]一书中也有不少地方叙述相对论流体力学。A. H.

Taub[31] 在《流体力学年鉴》(1978)中给相对论流体力学的发展作了一个简要的概括和总结。

1987 年在意大利召开了相对论流体力学的国际学术会议[1]，对相对论流体力学中某些重大理论课题，如耗散过程进行了探讨。

相对论流体力学涉及多种理论和应用领域，国际国内至今尚无相对论流体力学方面的专门期刊，但科研成果却不断涌现，多散见于各种不同学术领域的期刊之中，如引力论、天体物理学、宇宙学、高能核物理、等离子体物理、流体力学、磁流体力学（MHD)、应用数学、纯粹数学等。

随着各门有关学科的不断发展，它们之间的共同领域——相对论流体力学，也将会有一个大的发展。

§1.2 Lorentz 变换和流动元的四维矢量[41]

经典（Newton）力学是建立在 Galileo 变换下的不变性的基础之上的，它认为时空是绝对的而光速是相对的。狭义相对论是建立在 Lorentz 变换(下面简称 LT）不变性(协变性）的基础之上的，它认为时空是相对的而真空中的光速是绝对的。实验测量证明后者是正确的而前者只是后者在低速（速度 v 大大低于真空中光速 c）条件下的近似。

四维时空中任意一点（ct,x,y,z）或(x^0,x^1,x^2,x^3)称为一个"事件"(event)。设有两个惯性坐标系 S 和 S'(图 1.1)，在某一瞬间两者重合，S' 系相对于 S 系以匀速 v 运动着，同一事件在这两个坐标系中分别用 $x^\alpha=(ct,x,y,z)$ 和 $x'^\alpha=(ct',x',y',z')$描写。则 LT 可用下式表示

$$dx'^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta dx^\beta, \quad (1.2.1)$$

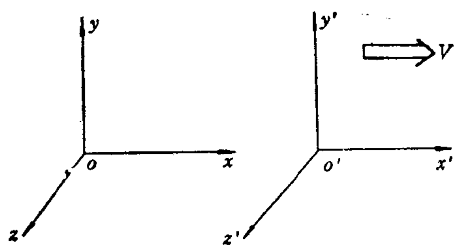

图 1.1 坐标系的相对运动

其中

$$
\begin{cases}
\Lambda^0{}_0 = \gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}, \\
\Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\gamma \dfrac{v^i}{c}, \\
\Lambda^j{}_k = \Lambda^k{}_j = (\gamma-1)\dfrac{v^j v^k}{v^2} + \delta_{jk},
\end{cases} \tag{1.2.2}
$$

$$
\boldsymbol{v} = (v^1, v^2, v^3),
$$

$$
\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k, \\ 0 & j \neq k. \end{cases}
$$

定义："时空间隔" ds 及"原时间隔" $d\tau$ 由下式决定

$$
\begin{aligned}
(c\,d\tau)^2 = (ds)^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\
&= c^2(dt)^2 - (d\boldsymbol{r})^2.
\end{aligned} \tag{1.2.3}
$$

容易证明 $(ds)^2$ 是 LT 不变量.

设质点相对于惯性系 S' 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动，S' 系相对于 S 系以匀速 $\boldsymbol{u}$ 运动,则由 LT 可知质点相对于 S 系的相对速度 $\boldsymbol{w}$ 是

$$
\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + (\gamma - 1)\dfrac{1}{u^2}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) + u^2]\boldsymbol{u}}{\gamma\left(1 + \dfrac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)}. \tag{1.2.4}
$$

两个事件之间的关系根据其间隔的性质不同可作原则性划分.

令

$$
(\delta s)^2 = (c\delta t)^2 - (\delta \boldsymbol{r})^2, \tag{1.2.5}
$$

（一）类时事件

$$
(c\delta t)^2 - (\delta \boldsymbol{r})^2 > 0, \tag{1.2.6}
$$

（二）类空事件

$$
(c\delta t)^2 - (\delta \boldsymbol{r})^2 < 0, \tag{1.2.7}
$$

（三）类光事件

$$(c\delta t)^2 - (\delta \boldsymbol{r})^2 = 0. \tag{1.2.8}$$

因 $(\delta s)^2$ 保持 LT 不变性，故三类事件均保持 LT 不变性。

由超曲面

$$(ds)^2 = 0$$

形成的四维空间里的锥面，称为"光锥"（图 1.2），光锥以 x^0 为其轴，设锥的顶点为 P，锥内任意一点为 Q_i，锥外任意一点为 Q_0，锥面任意一点为 P'，则 (P, Q_i) 为类时事件，(P, Q_0) 为类空事件，(P, P') 为类光事件。类时事件之间可以有因果联系而类空事件则否。流体质点的运动轨迹在四维空间形成一条曲线，称为世界线 (world line)，世界线上任意两点总是类时的。图 1.2 是光锥示意图，为了直观方便，它是在 (x^0, x^1, x^2) 三维时空中画出来的。

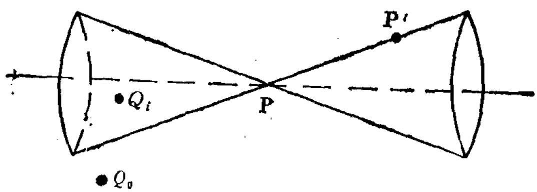

图 1.2 光锥

纯平动的坐标变换称为"推动"（boost），可以证明：推动可以看成是四维空间中的一种"旋转"变换。

设在经典力学范围内有一绕 z 轴旋转的坐标变换(图 1.3)，新

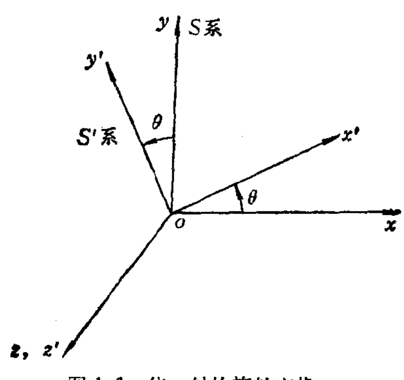

图 1.3 绕 z 轴的旋转变换

旧坐标之间由下式联系

$$\begin{cases} t' = t, \\ x' = x\cos\theta + y\sin\theta, \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta, \\ z' = z. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

从

$$(ids)^2 = (icdt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2, \tag{1.2.10}$$

不难看出，在四维空间中，$icdt$ 与 x, y, z 处于同等地位，用 (ict,x,y,z) 表示的空间在没有引力场条件下也称为 Minkowski 空间,试将(9)式中的坐标和旋转角作如下变换

$$\begin{cases} (t,x,y,z) \to (y,ict,x,z), \\ (t',x',y',z') \to (y',ict',x',z'), \\ \theta \to -i\varphi, \end{cases} \tag{1.2.11}$$

其中

$$\varphi = \mathrm{th}^{-1}\left(\frac{v}{c}\right), \tag{1.2.12}$$

则得

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \tag{1.2.13}$$

$$y' = y, \quad z' = z.$$

而上式即表示坐标系 S' 相对于坐标系 S 沿 x 轴方向作匀速 v 推动时的 LT。

为将矢量概念推广到相对论中去,要求四维矢量具有 LT 协变性，在两个坐标系中测量到的时间和长度也应满足 LT 协变性. 即变换

$$(ct,x) \to (ct',x'), \tag{1.2.14}$$

满足

$$
\begin{cases}
d\boldsymbol{x}' = \gamma\left[d\boldsymbol{x}^{+} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}(c\,dt)\right], \\
c\,dt' = \gamma\left[c\,dt - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot d\boldsymbol{x}\right],
\end{cases}
\tag{1.2.15}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{g}^{+} \equiv \dfrac{1}{\gamma}\left[\boldsymbol{g} + \dfrac{\gamma - 1}{v^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{v}\right], \\
\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}}.
\end{cases}
\tag{1.2.16}
$$

一般来说，任何由标量 f 和矢量 $\boldsymbol{g}$ 组成的集合（$f,\boldsymbol{g}$）如果满足(15)[1] 形式的变换

$$
\begin{cases}
(f,\boldsymbol{g}) \equiv (f, g^1, g^2, g^3), \\
(f,\boldsymbol{g}) \to (f', \boldsymbol{g}'),
\end{cases}
\tag{1.2.17}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{g}' = \gamma\left(\boldsymbol{g}^{+} - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c} f\right), \\
f' = \gamma\left(f - \dfrac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\boldsymbol{g}\right),
\end{cases}
\tag{1.2.18}
$$

则称（$f,\boldsymbol{g}$）是一个“四维矢量”。

可见“四维速度”应具有以下形式

$$
u^{\alpha} = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\right),
\tag{1.2.19}
$$

将上式写成分量形式

$$
u^{\alpha} = (\gamma c, \gamma u_x, \gamma u_y, \gamma u_z),
\tag{1.2.20}
$$

其中

$$
\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z).
$$

同样地可以定义“四维加速度”矢量

1）引用本节中的公式只取末尾数字，如(15)式代表(1.2.15)式。——编者注