



普通高等教育船舶类规划教材

计算机辅助船舶设计

陈宾康 董元胜 编著

国防工业出版社

457995

3 1 13 0

计算机辅助船舶设计

陈宾康 董元胜 编著



00457995



2

国防工业出版社

(京)新登字 106 号

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助船舶设计/陈宾康,董元胜编著. —北京:
国防工业出版社,1994
ISBN 7-118-01194-0

I. 计…

II. ①陈… ②董…

III. ①计算机辅助设计-船舶 ②船舶-计算机辅助设计

IV. U662.9

计算机辅助船舶设计

陈宾康 董元胜 编著

国防工业出版社出版

(北京市海淀区紫竹院南路23号)

(邮政编码 100044)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京怀柔王史山胶印厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 15¹/₂ 359千字

1994 第4月第1版 1994 年4月北京第1次印刷 印数:1—100册

ISBN 7-118-01194-0/U·97 定价:6.80 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

出版说明

根据国务院国发(1978)23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”,中国船舶工业总公司负责全国高等学校船舶类专业教材编审、出版的组织工作。

为了做好这一工作,中国船舶工业总公司相应地成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”、“水中兵器”五个教材小组,聘请了有关院校的教授、专家 60 余人参加工作。船舶类专业教材委员会(小组)是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的专家组织,其任务是做好高等学校船舶类专业教材的编审工作,为提高教材质量而努力。

在总结前三轮教材编审、出版工作的基础上,根据国家教委对“八五”规划教材要“抓好重点教材,全面提高质量,适当发展品种,力争系统配套,完善管理体制,加强组织领导”的要求,船舶总公司于 1991 年又制定了《1991~1995 年全国高等学校船舶类专业规划教材选题》。列入规划的选题共 107 种。

这批教材由各有关院校推荐,同行专家评阅,教材委员会(小组)评议,完稿后又经主审人审阅,教材委员会(小组)复审,然后分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及有关高等学校的出版社出版。

为了不断地提高教材质量,希望使用教材的单位和广大师生提出宝贵意见。

中国船舶工业总公司教材编审室

1992 年 5 月

前 言

造船是一项综合性的工业,一条新船的诞生要经过精心设计和工种繁多,工序复杂的生产过程,它不仅要投入大量的人力、物力和较高的技术力量,而且要耗费较长的生产时间。长期来降低造船成本,提高设计质量和缩短设计周期,是造船工程的一项重要任务,这也是应用计算机辅助船舶设计的主要目的。

自从计算机应用于船舶工业以来,世界各国投入了大量的经费和研究力量,开发船舶 CAD/CAM 系统。60 年代起包容设计、建造和生产管理的集成系统,如雨后春笋般地成长,从而实现了船舶设计与生产高度自动化。

随着微型机及微机工作站、图形交互技术的普遍使用 and 智能技术的迅速发展,专家系统蓬勃兴起,CIMS 系统正在竞争中拔地而起,船舶智能自动化设计与生产将以更大的步伐向前迈进。

由于计算机的容量大、计算速度快,在计算机辅助船舶设计过程中,各种新的计算方法和经验以及优化技术得到综合应用。

特别是在计算机系统业已成熟,快速绘图和高分辨率图象显示装置及光笔系统的使用,为交互设计自动生成船型曲面、各项性能计算、图形的绘制输出提供了强有力的工具,从而使船舶设计到生产建造形成一体化,开创了船舶工业发展的新时代。同时也促使了计算机辅助船舶设计学科的诞生与发展。

为了促使大学本科生及造船科技人员掌握和理解该学科领域内的基本内容、方法、理论基础以及在船舶 CAD 的关键技术、特点等方面有一个完整的概念和认识,并进一步把船舶自动设计工作推向前进,我们编著了本教材。

本书是按照船舶工程教材委员会关于本教材的教学基本要求,在借鉴了本院及国内外同类教材的基础上,并结合我们 10 多年来教学、科研工作中的体会和最新成果编著的,全书共分八章,内容广泛丰富,涉及了多门学科,交叉性强。

本书立足于叙述电子计算机在船舶辅助设计中的各个设计环节中具体应用的思路、方法和过程以及有关设计数学模型的构成,并且密切结合实例,重点阐明计算机辅助船舶设计的实质、特点与实施中的要点。力求把资料浩繁,内容交叉复杂的设计过程和方法叙述简洁清楚,推荐的程式和原理透明度高,便于自学。其次在内容和方法上考虑了通用性和特殊性,努力做到海、河兼顾,适应性强。以满足大、中、小企业的需求,意达既能为培养 CAD 开发人员作为工作的起点,又能作为使用者理解 CAD 的原理和方法的基础。

本书董元胜编写第一、二、三章,并负责全书的符号、公式、单位及插图工作,对其它章节也提出了许多宝贵意见;陈宾康编写第四、五、六、七、八章,并对全书进行了修改定稿和主持编写工作。

本书由大连理工大学纪卓尚教授主审;由教材委员会杨永谦教授复审。另外请中船总

701 研究所应文烨副总工程师、上海船舶运输研究所沈炎副研究员分别审阅了本书的内容,并提出了宝贵意见,在此一并致谢。

由于本书篇幅有限以及 CAD 内容日新月异,书中不够完善,疏漏和不尽令人满意之处在所难免,我们诚恳地期望得到广大行家和读者的批评指正,以便在教学与今后再版时得以改正。

作 者

457995

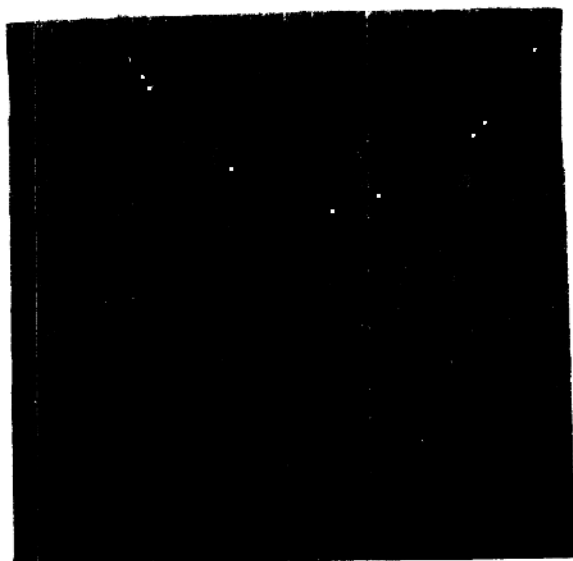
3 1 1 1 1



内 容 简 介

本书着重阐述了电子计算机辅助船舶设计的基础原理,优化设计方法,型线生成的数学描述函数,图形的交互技术,船舶 CAD 系统的特点和国内外发展概况,船舶设计专家系统的模式与知识的表达方法等。全书共分八章,内容选取和方法的引用考虑了海、河兼顾,通用性和特殊性要求,论述清楚,综合概括性强。对于船舶 CAD 中的概念、思路、优化设计过程和步骤,列举了应用实例。论述深入浅出,容易理解,便于自学,具有工程实用的特点。

本书可作为高等院校船舶设计与制造专业的教材,也可供从事船舶 CAD 系统开发与应用的工程技术人员参考。



目 录

第一章 船舶 CAD 的基础知识 (1)	第五章 船体型线的数学表达方 法..... (122)
§ 1-1 插值法 (1)	§ 5-1 概述 (122)
§ 1-2 曲线拟合法 (7)	§ 5-2 船体曲面的几何特征 (124)
§ 1-3 数值积分 (12)	§ 5-3 表征船体几何形状的主要 参数 (126)
§ 1-4 数值计算方法在船舶设计中 的应用 (16)	§ 5-4 标准系列法 (128)
第二章 最优化方法 (39)	§ 5-5 用计算机进行母型船改造 ... (129)
§ 2-1 最优化设计的基本概念 (39)	§ 5-6 根据设计参数用计算机生 成船体型线的设计方法 (137)
§ 2-2 单变量函数的寻优方法(一维 搜索) (43)	§ 5-7 船体外形曲面的数学表示 方法 (148)
§ 2-3 无约束条件下多变量函数的寻 优方法 (48)	第六章 计算机辅助设计系统..... (163)
§ 2-4 等式约束条件下多变量函数的 寻优方法 (57)	§ 6-1 概述 (163)
§ 2-5 不等式约束条件下多变量函数 的寻优方法 (60)	§ 6-2 CAD 系统 (164)
§ 2-6 多目标系统的优化方法 (64)	§ 6-3 CAD 系统的数据库 (166)
第三章 正交优化设计法 (75)	§ 6-4 船舶 CAD 系统的开发与 应用 (176)
§ 3-1 用于正交设计的正交表 (75)	第七章 计算机图形处理系统..... (192)
§ 3-2 正交设计中船型系数的选 择 (76)	§ 7-1 概述 (192)
§ 3-3 正交优化设计的方差分析 (77)	§ 7-2 自动绘图机简介 (193)
第四章 船舶优化设计 (83)	§ 7-3 图形显示装置 (198)
§ 4-1 船舶优化设计的要点 (83)	§ 7-4 计算机绘图系统 (199)
§ 4-2 把船舶设计问题归纳成最优 化设计模型 (84)	§ 7-5 图形的数学处理 (200)
§ 4-3 计算机辅助船舶初步设计中 主尺度、营运要求及经济计 算分析 (87)	§ 7-6 图形处理语言 (205)
§ 4-4 船舶初步设计的方案优化 (98)	§ 7-7 图形技术在船舶辅助设计 中的作用 (210)
§ 4-5 内河船舶技术经济论证 (103)	第八章 专家系统..... (217)
§ 4-6 计算机辅助总布置设计 (CAAD) (111)	§ 8-1 概述 (217)
	§ 8-2 船舶设计专家系统 (223)
	§ 8-3 船舶基本设计专家系统的 建立 (229)
	参考文献 (240)

第一章 船舶 CAD 的基础知识

在船舶设计中,描述船舶各种曲线的函数 $y = f(x)$ 通常是比较复杂和困难的,虽然可以确定这个函数在某个范围内有定义,然而很难找到它的具体表达形式。在许多场合,函数的数值是根据经验或实验,用图解法或表格法给出的一些离散点。那么如何应用计算机方法求取函数任意点的坐标值呢?通常采用二种方法。

第一种方法为插值法。即设法构造一个简单的函数 $y = p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式,使 $p(x)$ 点点通过给出的已知点,然后计算 $p(x)$ 的值以求得 $f(x)$ 的近似值。

第二种方法为拟合法。即保留给出已知点的一般特性,对曲线进行光顺处理,但不必要求一定通过所有已知点,然后计算 $p(x)$ 的值以求得 $f(x)$ 的近似值。

§ 1-1 插 值 法

插值法来自生产实践。在船舶设计中,往往遇到函数关系没有明显的解析表达式,不便于计算和处理(例如求积分、求中间值、求交点)。需要根据实验观测或其它方法来确定与自变量的某些值相对应的函数值。有时候,虽然所遇到的函数有明显的解析表达式,但使用起来费工费时,在实际问题中又允许对计算的结果有一定程度上的误差。因此,人们希望对函数的计算能有一个简单的、同时又能达到精度要求的近似表达式。插值法就是建立在这种近似公式上的一种基本方法。

一、线性插值(一次插值)法

已知函数 $y = f(x)$ 在点 x_1, x_2 上的函数值为 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 要求构造一多项式 $y = p(x)$, 使其满足 $p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2)$ 。其几何意义,就是通过两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的一条直线,如图 1-1 所示。通过 A, B 两点的直线方程为

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) = p(x) \quad (1-1)$$

$p(x)$ 是 x 的一次函数,称为一次插值多项式。这种通过两点的一次插值称为线性插值。

利用式(1-1)在区间 $[x_1, x_2]$ 内任何一点的函数值 $p(x)$ 即可算出,并作为 $y = f(x)$ 的近似值。在区间 $[x_1, x_2]$ 内的插值称为内插值。

当 x 在 $[x_1, x_2]$ 之外,又离 x_1, x_2 不远,以 $p(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值,称为外插值。

线性插值法应用时比较简单,但是它用通过两点的直线函数 $p(x)$ 值作为曲线函数

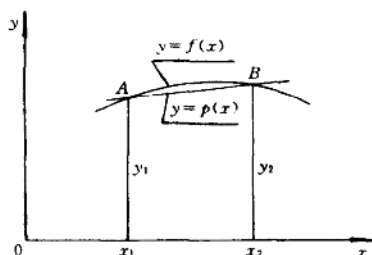


图 1-1 线性插值法

$f(x)$ 的近似值,误差较大。

二、一元三点插值(二次插值)法

已知函数 $y = f(x)$, 在点 x_1, x_2, x_3 的值为 y_1, y_2, y_3 。需要构造一多项式 $y = p(x)$, 使其函数值 $p(x_i) = y_i (i = 1, 2, 3)$ 。即: $p(x_1) = f(x_1), p(x_2) = f(x_2), p(x_3) = f(x_3)$ 。其几何意义为通过三点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 作一曲线, 若三点不在一直线上, 通过三点的曲线就是二次抛物线, 以此曲线逼近 $y = f(x)$, 如图 1-2 所示。它是一个二次方程, 其一般形式为

$$p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$$

式中 a_1, a_2, a_3 为待定系数, 可由曲线 $y = p(x)$ 通过三点 A, B, C 的三元一次方程组

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 \\ y_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 \\ y_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 \end{cases}$$

联立求得。将所求得的待定系数 a_1, a_2, a_3 的值代入表达式 $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$, 整理后得:

$$p(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_2}(x - x_1)(x - x_2) \quad (1-2)$$

$p(x)$ 是 x 的二次函数, 称为二次插值多项式, 这种通过已知三点的插值称为二次插值或者抛物线插值(也称为一元三点插值)。

上述插值方法在船舶设计中运用较多。

例: 某渔政船在阻力模型试验中测得如下数据:

航速(kn)	$v_1 = 14$	$v_2 = 15$	$v_3 = 15.5$
阻力(kW)	$P_{E1} = 444$	$P_{E2} = 643$	$P_{E3} = 822$

求当航速 $v = 14.5$ kn、总推进效率 $QPC = 0.6$ 时所需主机功率。

解: $v = 14.5$ kn 时, 其阻力用一元三点插值得:

$$P_E = P_{E1} + \frac{P_{E2} - P_{E1}}{v_2 - v_1}(v - v_1) + \frac{\frac{P_{E3} - P_{E1}}{v_3 - v_1} - \frac{P_{E2} - P_{E1}}{v_2 - v_1}}{v_3 - v_2}(v - v_1)(v - v_2)$$

将各对应值代入上式, 则得

$$P_E = 517 \text{ kW}$$

在 $v = 14.5$ kn 时其所需主机功率为

$$P = \frac{P_E}{QPC} = 861.7 \text{ kW}$$

三、拉格朗日插值(Lagrange)法

在上面所述的一元三点插值, 仅用二次抛物线近似代替实际曲线, 其精度还是有限的。对一些精度要求比较高的问题是不能满足的。如果采用更高次的曲线逼近实际曲线,

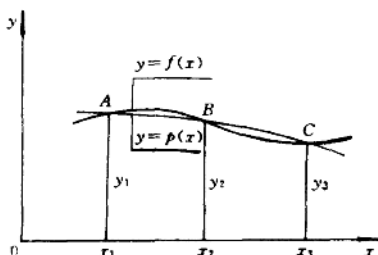


图 1-2 一元三点插值法

其精度将得到进一步提高。为了推导高次表达式,我们进一步研究二次曲线表达式。

已知函数 $y = f(x)$ 在点 x_1, x_2, x_3 上的函数值为 y_1, y_2, y_3 。需要构造一函数 $P(x)$, 使其函数值为 $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, p(x_3) = y_3$ 。首先建立一个关于 $p(x)$ 的线性组合插值多项式

$$\begin{aligned} p(x) &= A_1(x)y_1 + A_2(x)y_2 + A_3(x)y_3 \\ &= \sum_{k=1}^3 A_k(x)y_k \quad (k=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中 x_1, x_2, x_3 ——节点;

$A_k(x)$ ——基本插值多项式。

在式(1-3)中可以看出,要使表达式成立,关键在于合适地求出基本插值多项式 $A_1(x)$ 、 $A_2(x)$ 、 $A_3(x)$ 的表达式。现以 $A_1(x)$ 为例:

为了满足假定条件 $p(x_1) = y_1, p(x_2) = y_2, p(x_3) = y_3$, 在式(1-3)中必须满足:

$$A_1(x_1) = 1, \quad A_1(x_2) = 0, \quad A_1(x_3) = 0$$

下列基本插值多项式则完全满足这些条件。

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ A_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ A_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

这样就得出了三个基本插值多项式。将此三式代入式(1-3):

$$p(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \quad (1-4)$$

此式即为一元三点插值的另一种表达形式。

同理, 对一个三次插值表达式必为:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}y_2 \\ &+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}y_3 + \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}y_4 \end{aligned}$$

对于一个 n 次插值表达式则为:

$$p(x) = \sum_{k=1}^n y_k \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1-5)$$

式(1-5)即拉格朗日插值公式。

拉格朗日插值 FORTRAN 语言程序

```

READ(*,*) N,XO                                IF(I,EQ,K)GO TO 100
DIMENSION X(N),Y(N),P(N)                        P1 = P1 * (XO - X(K))
READ(*,*) (X(K),K = 1,N)                        P2 = P2 * (X(I) - X(K))
READ(*,*) (Y(K),K = 1,N)                        100 CONTINUE
DO 200 I = 1,N                                  Y = Y + Y(I) * P1/P2
P1 = 1                                           200 CONTINUE

```

P2 = 1

DO 100 K = 1, N

计算框图如图 1-3 所示。

四、样条理论及样条插值

上述的拉格朗日公式给出了函数插值曲线的函数表达式。问题在于插值节点增多时,得到的插值曲线是高次的。这种高次插值曲线在实际应用中是困难的。为了降低插值曲线的次数,通常采用分段插值的办法。但分段插值也有缺点。尽管插值曲线的各个分段是衔接的,但在连接点处不能保证曲线的光滑性。为了解决这个问题,人们从生产实践中得到启示,提出了“样条”插值的理论。

“样条”是绘图员用来描绘光滑曲线的一种简单工具。例如在船体手工放样中,为了把船型曲线(水线、纵剖面、肋骨线、甲板边线、首柱线、尾柱线、船底线、折角线、舷弧线等)的离散型值点连成光滑和顺的曲线条,往往是用一根富有弹性的细长木条(即样条)把各点连接起来,使它们在连接处也是光滑的。这样就把所有的点连成一条光滑曲线。并使其在连接处也具有连续曲率。

人们对这种生产实践中的现象进行数学模拟,得到一种函数称为样条函数。近年来,样条函数的理论和应用发展很快,其中三次样条函数最为常用。同时双圆弧样条、B样条、贝塞尔(Bezier)样条理论及应用也逐渐引人注目。B样条及贝塞尔样条将在后几章予以介绍。

1. 三次样条插值函数的描述

设在区间 (a, b) 上给定一组节点 X :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$$

和一组相对应的函数值 Y :

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$$

函数 $S(x)$ 如果具有以下性质:

- (1) 在每个子区间 $[x_{k-1}, x_k], k = 1, 2, \dots, N$ 上 $S(x)$ 是一个不超过三次的多项式;
- (2) $S(x_k) = y_k, k = 1, 2, \dots, N$;
- (3) $S(x) \in C^2[a, b]$, 即 $S(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上为二次连续可微, 则称 $S(x)$ 为在节点 X 上插值于 Y 的三次样条函数。

由此可见,样条函数的基本思想就是把插值函数逐段多项式化,使整个函数成为“装配式”的,同时又保证在接缝处具有一定的光滑性。因此,它既保留了低次多项式在表达

WRITE(*,*)'Y = ', Y
END

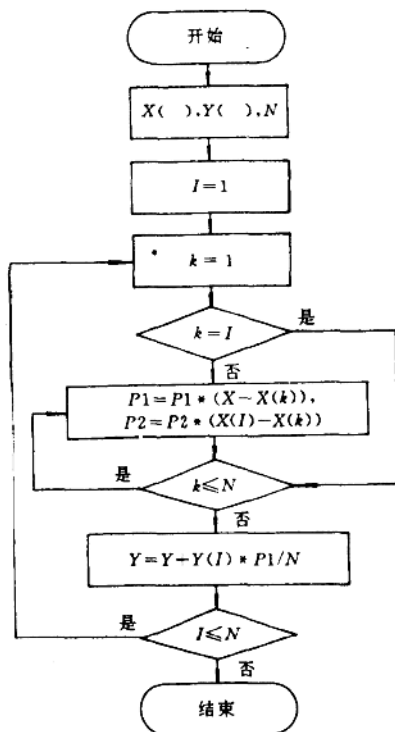


图 1-3 计算框图

式上的简便性,又克服了它的不灵活性、不稳定性等缺点,适合于数值计算的要求。

2. 三次样条函数 $S(x)$ 的表达式

由三次样条函数的定义可知,在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 中 $S(x)$ 是一个不超过三次的多项式,且在 $[a, b]$ 中二次连续可微,则 $S(x)$ 的二阶导数 $S''(x)$ 必是一线性函数。用 M_k 表达 $S''(x)$ 在 x_k 点处的二阶导数值:

$$S''(x_k) = M_k \quad k = 1, 2, \dots, N$$

则在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的二阶导数 $S''(x)$ 可以写成:

$$S''(x) = M_{k-1} \frac{x_k - x}{e_k} + M_k \frac{x - x_{k-1}}{e_k} \quad (1-6)$$

式中 $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ (图 1-4)

$$e_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

对 $S''(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上积分二次并要求 $S(x_k) = y_k$, 则在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上可得

$$S'(x) = -\frac{M_{k-1}(x_k - x)^2}{2e_k} + \frac{M_k(x - x_{k-1})^2}{2e_k} + \frac{y_k - y_{k-1}}{e_k} - \frac{M_k - M_{k-1}}{6}e_k \quad (1-7)$$

$$S(x) = \frac{M_{k-1}(x_k - x)^3}{6e_k} + \frac{M_k(x - x_{k-1})^3}{6e_k} + \left(\frac{y_k}{e_k} - \frac{e_k M_k}{6}\right)(x - x_{k-1}) + \left(\frac{y_{k-1}}{e_k} - \frac{e_k M_{k-1}}{6}\right)(x_k - x) \quad (1-8)$$

式(1-8)即为三次样条函数 $S(x)$ 的表达式。该式中只需求出各节点的 M_k 值,表达式即可解。而 M_k 值又与各连接点处的连续有关。

由于要求 $S'(x)$ 在连接点处连续,也就是说要求

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$$

$$\left. \begin{aligned} S'(x_k^-) &= \frac{l_k}{6}M_{k-1} + \frac{l_k}{3}M_k + \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} \\ S'(x_k^+) &= -\frac{l_{k+1}}{3}M_k - \frac{l_{k+1}}{6}M_{k+1} + \frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

得出:

$$\frac{l_k}{6}M_{k-1} + \frac{l_k + l_{k+1}}{3}M_k + \frac{l_{k+1}}{6}M_{k+1} = \frac{y_{k+1} - y_k}{-l_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k} \quad (k = 2, 3, \dots, N-1) \quad (1-10)$$

尽管有 N 个节点 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 但由于(1-10)式中的参数下标存在着 $k+1$ 和 $k-1$ 的形式, 因此该式只能对 $x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$ 可行, 即(1-10)只能列出 $N-2$ 个方程。为了求得 N 个未知数 $M_1, M_2, \dots, M_N$, 还必需添加两个条件, 即所谓的边界条件。例如假设两端点 x_1, x_N 的切线斜率已知, 即:

$$S'(x_1^+) = y'_1, S'(x_N^-) = y'_N$$

则由(1-9)式可得

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= \frac{6}{l_2} \left(\frac{y_2 - y_1}{l_2} - y'_1 \right) \\ M_{N-1} + 2M_N &= \frac{6}{l_N} \left(y'_N - \frac{y_N - y_{N-1}}{l_N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

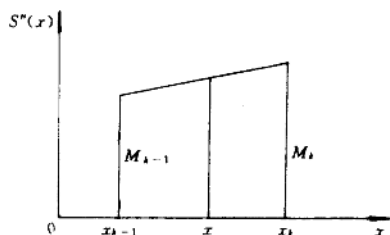


图 1-4 二阶导数插值

整理得

$$M_2 = \frac{d_2 - u_2 Z_1 - \lambda_2 M_3}{u_2 r_1 + 2} = \frac{d_2 - u_2 Z_1}{u_2 r_1 + 2} - \frac{\lambda_2 M_3}{u_2 r_1 + 2}$$

根据(1-15)式 $M_2 = Z_2 + r_2 M_3$

如此逐个“追”下去即可逐次消去 $M_1, M_2, \dots, M_{N-1}$, 最后“追”到

$$M_N = \frac{d_N - u_N Z_{N-1}}{2 + u_N r_{N-1}}$$

即可出 M_N 。以上这个过程称为“追”的过程。

“追”的过程结束, 求出 M_N 后, 便可“赶”回去, 将上述过程反过来, 逐个求出 $M_{N-1}, M_{N-2}, \dots, M_1$, 这个过程称为“赶”的过程。

求出 M_k 后, 将 M_k 代回样条函数的分段表达式(1-8), 即可求出任一点的函数值。

计算框图如图 1-5 所示。

§ 1-2 曲线拟合法

在生产实践和科学实验中, 我们时常需要从一组测定的数据中去求自变量 x 和因变量 y 的一个近似的函数关系式 $y = f(x)$ 。从图形上看, 就是曲线 $y = f(x)$ 上给定的 N 个点 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, N)$ 求作该曲线的近似图形。这个问题与前面所研究的插值问题类似。但是在插值方法中, 要求所得的函数 $y = f(x)$, 在插值节点 x_i 上, 确实满足 $f(x_i) = y_i$, 也就是说, 要求所求的曲线必须严格地通过所给定的所有的点 (x_i, y_i) 。但一般科学实验所给出的数据常常带有测试误差, 要求所求的曲线通过所有的点 (x_i, y_i) , 就会使曲线保留着一切测试误差 ϵ_i , 而这并不是我们所希望的结果。如果个别数据精度很差, 那么插值效果是不理想的。为此人们考虑放弃曲线严格通过所有节点 (x_i, y_i) 这一要求, 采用其它方法去构造近似曲线, 尽量反映所给数据的一般趋势, 尽可能不要出现局部波动。这种方法称作曲线拟合法。最小二乘法原理和方法是用来实现这一目标的。

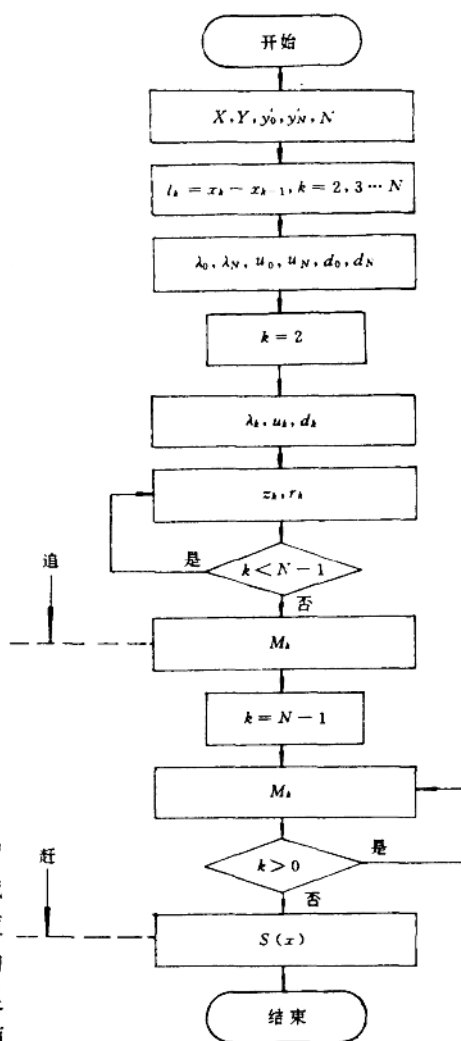


图 1-5 “追”、“赶”法程序框图

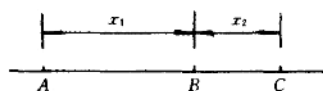


图 1-6 直线测量

一、最小二乘法原理

在绘制船舶线型图时,对设计水线长度的量取,多采用比例尺分段量取的办法。例如在水线上量取两个线段,如图 1-6 所示。其结果为: $AB = 30.325\text{m}$, $BC = 25.675\text{m}$ 。为了控制测量的准确性,也量了全线段 AC 的长度, $AC = 55.998\text{m}$ 。这三个量得的长度显然是互相矛盾的,因为在测量中不可避免地存在着误差。所以用进行多次或重复的测量来确定未知量。上例用三次测量来确定两个未知量 x_1 和 x_2 的长度。这种矛盾总会发生的。这就产生了一个问题,怎样来找到这两个线段 AB 和 BC 的长度,使它们最好地拟合这三个测量的结果呢?根据测量的结果,则有:

$$\begin{aligned}x_1 - 30.325 &= 0 \\x_2 - 25.675 &= 0 \\x_1 + x_2 - 55.998 &= 0\end{aligned}$$

但由于每次测量所得的值均有误差,未知量 x_1 和 x_2 无论取什么值都不会使以上每个方程的右边都为零。为了解决这个矛盾,可把方程写成:

$$\left. \begin{aligned}x_1 - 30.325 &= r_1 \\x_2 - 25.675 &= r_2 \\x_1 + x_2 - 55.998 &= r_3\end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

这里 r_1, r_2, r_3 是误差,或称为剩余量。方程(1-16)是近似问题中的误差方程,那么现在的问题就是怎样求出 x_1, x_2 来拟合这三个测量的结果,使误差本身的绝对值尽可能地小。

最小二乘法原理是解决这类问题的一种常用准则。所谓最小二乘法原理,用于上例就是说:从一组等精度量得的结果 $30.325, 25.675, 55.998\text{m}$, 去求得测量长度 x_1, x_2 的最好值,也就是能使误差 r_1, r_2, r_3 的平方和为最小的那些值。这个原理符合一般推论,因为误差都是实数,它们的平方就是正数,要求这些实数的平方和尽可能地小,以便保证这些误差本身的绝对值尽可能地小。

我们可以用几何图形来作出这个原理解释。以方程(1-16)为例,三个独立的误差量 r_1, r_2, r_3 可用三维空间直角坐标系中一点 R 的三个坐标来表示,从图 1-7 中容易看出,点 R 越接近坐标系的原点 O , 误差 r_1, r_2, r_3 变得越小。正是由于这个缘故,我们通过适当的选择 x_1, x_2 要使距离

$$OR = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$$

为最小。按照求最小值的问题来运算,这也就是要使距离的平方

$$\overline{OR}^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \quad (1-17)$$

为最小。即使误差的平方和为最小值。

在这个准则下,为了求出 x_1, x_2 的最好值,先把(1-16)式代入(1-17)式得:

$$\begin{aligned}r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 &= (x_1 - 30.325)^2 + (x_2 - 25.675)^2 \\&\quad + (x_1 + x_2 - 55.998)^2 = \varphi(x_1, x_2)\end{aligned} \quad (1-18)$$

那么,问题就在于选择适当的 x_1, x_2 , 使得 $\varphi(x_1, x_2)$ 达到最小值。根据通常求极值的方法,求出 $\varphi(x_1, x_2)$ 对于 x_1, x_2 的偏导数,并使这两个偏导数等于零。于是有:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 2(x_1 - 30.325) + 2(x_1 + x_2 - 55.998) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 2(x_2 - 25.675) + 2(x_1 + x_2 - 55.998) = 0 \end{cases}$$

