

諧波分析和 運算子方法

[蘇聯]T. H. 阿塔貝可夫著



國防工業出版社

内 容 简 介

本书研究非正弦周期过程(付里叶级数),非周期过程(付里叶积分)及应用运算子法研究瞬变过程(拉普拉斯变换)。本书特别着重地指出了付里叶变换及拉普拉斯变换的相似性,并把这些变换的特性加以对照。本书可作无线电和电机两专业在电工基础课程方面的教材。

本书可供高等院校有关专业的学生、研究人員等作参考。

DL30/04

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЙ

〔苏联〕И. Атабеков

ОБЩЕОБЩЕ 1958

谐波分析和运算子方法

蒋卡林、钟有能译

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可出字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张6 127千字

1958年10月第一版 1964年9月第二次印刷 印数: 2,001—5,150册

统一书号: 15034·224 定价: (科七) 0.85元

目 录

序.....	(5)
第一章 非正弦周期过程 (付里叶级数)	(7)
§ 1-1 周期函数.....	(7)
§ 1-2 付里叶级数的三角函数形式.....	(8)
§ 1-3 对称情形.....	(10)
§ 1-4 原点的移动.....	(16)
§ 1-5 付里叶级数的复数形式.....	(18)
§ 1-6 周期函数的频谱.....	(20)
§ 1-7 付里叶级数系数的递减度.....	(21)
§ 1-8 巴塞瓦等式.....	(23)
§ 1-9 非正弦周期函数的有效值.....	(24)
§ 1-10 非正弦周期函数的平均绝对值.....	(25)
§ 1-11 具有非正弦周期电气量电路中的 有效功率 (平均功率)	(25)
§ 1-12 表征非正弦周期函数的因数.....	(28)
§ 1-13 具有非正弦周期电压的线性电路的计算.....	(29)
§ 1-14 三相电路中的高次谐波.....	(33)
第二章 非周期过程 (付里叶积分)	(37)
§ 2-1 付里叶积分定理 (复数形式)	(37)
§ 2-2 频谱特性.....	(39)
§ 2-3 频谱特性和付里叶级数系数的包络之间的关系.....	(41)
§ 2-4 某些函数的频谱特性.....	(45)
§ 2-5 频谱特性的递减度.....	(51)
§ 2-6 付里叶积分的三角函数形式.....	(51)
§ 2-7 非周期函数的对称情形.....	(52)
§ 2-8 付里叶变换的基本特性.....	(54)
§ 2-9 付里叶积分的推广形式.....	(63)
§ 2-10 二端网络中的瞬变过程.....	(68)
§ 2-11 四端网络中的瞬变过程.....	(73)

第三章 应用运算子法研究瞬变过程

(拉普拉斯变换)	(78)
§ 3-1 概述	(78)
§ 3-2 拉普拉斯正变换和反变换	(79)
§ 3-3 原函数和象函数	(81)
§ 3-4 单位函数和指数函数的象函数	(83)
§ 3-5 拉普拉斯变换的基本性质	(85)
§ 3-6 应用拉普拉斯反变换由象函数求原函数	(106)
§ 3-7 分解定理	(109)
§ 3-8 象函数和原函数表	(113)
§ 3-9 应用拉普拉斯变换求解电路的微分方程 和微积方程	(114)
§ 3-10 瞬变过程计算的实数形式和复数形式	(124)
§ 3-11 用等值电源法关于非零初始条件的计算	(128)
§ 3-12 接通公式	(136)
§ 3-13 应用重迭公式计算瞬变过程 (丢阿度积分法)	(138)
§ 3-14 应用冲击函数关于非零初始条件的计算	(141)
§ 3-15 阶梯函数和周期函数的象函数	(148)
§ 3-16 应用拉普拉斯变换研究分布参数电路中的 瞬变过程	(155)
§ 3-17 谐波分析与拉普拉斯变换	(165)
§ 3-18 频谱特性实数部分与虚数部分之间的关系	(172)
参考文献	(177)
附 录	
表 I 付里叶变换的主要特性	(178)
表 II 某些函数的付里叶级数	(180)
表 III 主要的运算子变换	(184)
表 IV 原函数和拉普拉斯变换的象函数	(189)

5362
335

諧波分析和运算子方法

[苏联] Г. И. 阿塔貝可夫 著

蔣卡林 申石虎 譯



國防工業出版社

内 容 简 介

本书研究非正弦周期过程(付里叶级数),非周期过程(付里叶积分)及应用运算子法研究瞬变过程(拉普拉斯变换)。本书特别着重地指出了付里叶变换及拉普拉斯变换的相似性,并把这些变换的特性加以对照。本书可作无线电和电机两专业在电工基础课程方面的教材。

本书可供高等院校有关专业的学生、研究人員等作参考。

ДТ30/04

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

[苏联] Г. И. Атабеков

ОБОРОНГИЗ 1956

谐波分析和运算子方法

蒋卡林、申石虎译

国防工业出版社 出版

北京市书刊出版业营业许可出字第074号

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 $\frac{1}{32}$ 印张6 127千字

1958年10月第一版 1964年9月第二次印刷 印数: 2,001—5,150册

统一书号: 15034·224 定价: (科七) 0.85元

目 录

序.....	(5)
第一章 非正弦周期过程 (付里叶级数)	(7)
§ 1-1 周期函数.....	(7)
§ 1-2 付里叶级数的三角函数形式.....	(8)
§ 1-3 对称情形.....	(10)
§ 1-4 原点的移动.....	(16)
§ 1-5 付里叶级数的复数形式.....	(18)
§ 1-6 周期函数的频谱.....	(20)
§ 1-7 付里叶级数系数的递减度.....	(21)
§ 1-8 巴塞瓦等式.....	(23)
§ 1-9 非正弦周期函数的有效值.....	(24)
§ 1-10 非正弦周期函数的平均绝对值.....	(25)
§ 1-11 具有非正弦周期电气量电路中的 有效功率 (平均功率)	(25)
§ 1-12 表征非正弦周期函数的因数.....	(28)
§ 1-13 具有非正弦周期电压的线性电路的计算.....	(29)
§ 1-14 三相电路中的高次谐波.....	(33)
第二章 非周期过程 (付里叶积分)	(37)
§ 2-1 付里叶积分定理 (复数形式)	(37)
§ 2-2 频谱特性.....	(39)
§ 2-3 频谱特性和付里叶级数系数的包络之间的关系.....	(41)
§ 2-4 某些函数的频谱特性.....	(45)
§ 2-5 频谱特性的递减度.....	(51)
§ 2-6 付里叶积分的三角函数形式.....	(51)
§ 2-7 非周期函数的对称情形.....	(52)
§ 2-8 付里叶变换的基本特性.....	(54)
§ 2-9 付里叶积分的推广形式.....	(63)
§ 2-10 二端网络中的瞬变过程.....	(68)
§ 2-11 四端网络中的瞬变过程.....	(73)

第三章 应用运算符法研究瞬变过程

(拉普拉斯变换)	(78)
§ 3-1 概述	(78)
§ 3-2 拉普拉斯正变换和反变换	(79)
§ 3-3 原函数和象函数	(81)
§ 3-4 单位函数和指数函数的象函数	(83)
§ 3-5 拉普拉斯变换的基本性质	(85)
§ 3-6 应用拉普拉斯反变换由象函数求原函数	(106)
§ 3-7 分解定理	(109)
§ 3-8 象函数和原函数表	(113)
§ 3-9 应用拉普拉斯变换求解电路的微分方程 和微积方程	(114)
§ 3-10 瞬变过程计算的实数形式和复数形式	(124)
§ 3-11 用等值电源法关于非零初始条件的计算	(128)
§ 3-12 接通公式	(136)
§ 3-13 应用重迭公式计算瞬变过程 (丢阿瓦积术法)	(138)
§ 3-14 应用冲击函数关于非零初始条件的计算	(141)
§ 3-15 阶梯函数和周期函数的象函数	(148)
§ 3-16 应用拉普拉斯变换研究分布参数电路中的 瞬变过程	(155)
§ 3-17 谐波分析与拉普拉斯变换	(165)
§ 3-18 频谱特性实数部分与虚数部分之间的关系	(172)
参考文献	(177)
附 录	
表 I 付里叶变换的主要特性	(178)
表 II 某些函数的付里叶级数	(180)
表 III 主要的运算符变换	(184)
表 IV 原函数和拉普拉斯变换的象函数	(189)

序

本書是作者在以 Серго Орджонакидзе 命名，曾榮獲列寧勳章的莫斯科航空學院任教時講授提綱的擴充。它曾作為莫斯科航空學院無線電及電機兩專業學生電工基礎課程下列三章的教材：（1）非正弦周期過程（付里葉級數）；（2）非周期過程付里葉積分）；（3）應用運算子法研究瞬變過程（拉普拉斯變換）。

與現代諧波分析法相結合的電工基礎課程的這三章內容對於擴大無線電、航空電氣自動學、航空電氣設備及儀器製造等未來專家們的科學眼界具有重要的意義。

本書內容敘述中，認為學生們已具有高等數學教程相應章節的數學知識（即級數、付里葉積分以及留數理論）。

本書提綱較之作者在莫斯科航空學院對學生們所講授內容有大部分擴充，增加了下列各節，即 §1-7、2-5、2-8、2-14、3-17、3-18，這些章節可供研究生學習用。

本書最近版的一些電工理論基礎教本不同，在本書中對於付里葉積分及運算子法給以相當的重視，對它們加以相互緊密聯繫的敘述。

特別着重地指出了付里葉變換及拉普拉斯變換的相似性，並且把這些變換的特性加以對照。

運算子法的一些定理和法則（原函數及象函數的微分和積分，在實數域及復數域內的位移和摺疊，分解定理等等），都可以擴充到付里葉積分的方法上去（時間函數及頻譜函數

的微分和积分，在实数域及复数域內的位移和折叠，以及接通公式等等）。同时，对于非零初始条件的計算，以及瞬变过程計算的实数形式和复数形式，都給以相当大的注意。

这两种变换的相似性便于不滿足绝对可积条件的函数进行諧波分析，而且使得在这門課程的理論叙述中充实着一定的物理意义。

本書中所叙述的一些基本理論和計算方法都用典型的例題加以說明。

付里叶积分法和运算子法的各个公式和定理都列在附录中的表 I 及表 III 中。由于有关电工及无綫电方面現有的一些文献中，用到拉普拉斯变换以及卡尔松变换，因此，在本書中，对于运算子法的各項定理和法則，如何由其中的一种形式变换为另一种形式，給以相当的注意。

当选择諧波分析及运算子法这一部分教材时，我們已經考虑下面一些情况：对于电机各专业的学生不講授无綫电理論基础課程，所以他們必須在电工基础課程內进行这些問題的研究。至于无綫电各专业的学生，根据莫斯科航空学院电工教研組及无綫电教研組长期合作的經驗証明：在电工基础課程內进行諧波分析及运算子法的講授，可以使得后續的无綫电理論基础課程非常容易进行，并使得在无綫电理論基础課程中，有可能以最大的注意来研究无綫电电路中的瞬变过程。为避免重复，关于信号在选择系統中如何傳送的問題，将在后續的各专业課程中詳細研究，本書不加叙述。

本書內所采用的符号基本上与哥諾洛夫斯基教授所著“无綫电电路中的信号和瞬变过程”（苏联电信出版社，1954）書中的符号相同。

第一章

非正弦周期过程（付里叶級数）

§ 1-1 周期函数

設所研究的函数 $f(t)$ 为時間 t 的周期函数，其周期为 T ，即对于任何正值或負值的 t 都能滿足下列等式

$$f(t+T) = f(t). \quad (1-1)$$

它的几何意义就是：在 $f(t)$ 的图形上，横坐标相差为 T 的任何两点的縱坐标是相同的。条件 (1-1) 表示一种現象，作无限的周期重复。

周期函数最简单的例子就是：任何一个物理量，譬如：电流或电压，随時間作簡諧的变化：

$$y = A \sin(\omega t + \psi),$$

其周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

无限周期重复的現象事实上是不存在的。因此，严格来說，以 (1-1) 式为定义的周期函数应该看作为应用于实际計算中的某种抽象的数学概念。

依照 (1-1) 式的周期函数 $f(t)$ 在一般的情况下并不是正弦函数，可以在以 T 为长度的任何時間間隔內对它进行研究的。任何一瞬間 t_0 都可以选作为这一時間間隔的起点，而

間隔的終点則为瞬間 $t_0 + T$ 。例如：設

$$t_0 = 0 \text{ 或 } t_0 = -\frac{T}{2},$$

則可得到間隔 $(0, T)$ 或 $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ 。

在以 T 为长度的時間間隔內，函数 $f(t)$ 可以是連續的，也可以具有間断点。我們認為所有这些間断点都具有下列的特性：如果函数 $f(t)$ 在 $t=t_1$ 那一点是間断的（图1-1），則函数 $f(t)$ 無論从右（从数值 $t > t_1$ ）或从左（从数值 $t < t_1$ ）向間断点趋近时，都必須具有极限。这些极限由符号 $f(t_1+0)$ 及 $f(t_1-0)$ 或 $f(t_1+)$ 及 $f(t_1-)$ 来表示。大家知道，这样的間断点叫作第一类的間断点。我們还認為：在长

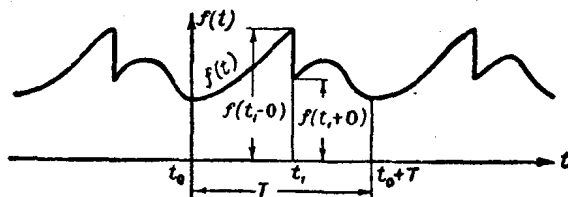


图 1-1 時間的周期函数

度为 T 的時間間隔內，函数 $f(t)$ 的第一类間断点的数目，以及它的极大值和极小值的数目，都是有限的。

这样，我們来研究滿足于狄里赫列条件的函数，这种函数在实际上是常常遇到的。

§ 1-2 付里叶級数的三角函数形式

滿足狄里赫列条件的非正弦周期函数可以用无限的簡諧級数——付里叶級数的形式来表示。对于函数 $f(t)$ 的所有的

連續点,这一級数的总和与該函数的数值相符合,而在各个間断点,則等于 $f(t)$ 的左极限值和右极限值的算术平均值,即 $\frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)]$ 。

設 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, 并称 ω_1 为基本的角頻率。

簡諧級数若表示成三角函数形状則具有下一形式:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t), \quad (1-2)$$

式中

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_1 t dt; \quad (1-3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_1 t dt. \quad (1-4)$$

此处 $\frac{a_0}{2}$ 为恒定分量; a_n 及 b_n 則为級数中各余弦項及各正弦項的振幅。

恒定分量 $a_0/2$ 可以用 (1-3) 式設 $n=0$ 来确定, 它是函数 $f(t)$ 在一周期內的平均值。当 $f(t)$ 的正值面积与負值面积相等时 (图1-2), 这恒定分量是等于零的。

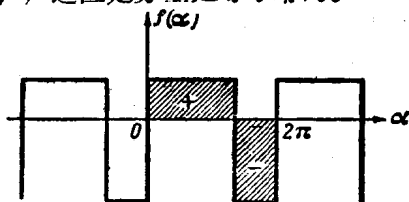


图 1-2 一周期內的平均值为零的函数

数值 t_0 可以任意地选择。通常取 $t_0=0$ 或 $t_0 = -\frac{T}{2}$ 。

設 $\omega_1 t = \alpha$ 及 $t_0 = 0$ (并考慮 $\omega_1 T = 2\pi$ 及 $d\alpha = \omega_1 dt$) , 可得

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha), \quad (1-5)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha; \quad (1-6)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha. \quad (1-7)$$

付里叶級数可以用另一形式写出。若取

$$a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha = F_n \cos(n\alpha - \psi_n),$$

式中

$$F_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ 及 } \psi_n = \arctg \frac{b_n}{a_n}, \quad (1-8)$$

則可得

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos(n\alpha - \psi_n).$$

这样的形式在某些情况下是比较方便的, 例如, 当需要知道所含每一諧波的百分数 (F_n 即第 n 次諧波的振幅)。

§ 1-3 对 称 情 形

表示电磁数量的非正弦周期函数, 通常都具有某种对称的形式, 这就使它們便于展成付里叶級数。

看一看下列的一些对称情形。

1. 函数 $f(\alpha)$ 对称于纵轴 (图1-3), 即 $f(\alpha) = f(-\alpha)$ 。这样的函数叫作偶函数。

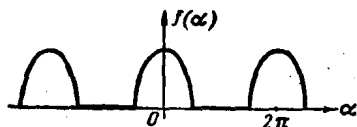


图 1-3 对称于纵轴的函数 $f(\alpha)$

按照 (1-5) 式

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha] = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(-n\alpha) + b_n \sin(-n\alpha)], \end{aligned}$$

并考虑 $\cos(-n\alpha) = \cos n\alpha$ 及 $\sin(-n\alpha) = -\sin n\alpha$, 便得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha = 0. \quad (1-9)$$

n 为任意值时, 仅在 $b_n = 0$ 的情况下, 方程式 (1-9), 才能满足于任意的 α 值。因此, 在这种的对称情况下

$$f(\alpha) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha, \quad (1-10)$$

即, 凡偶函数仅含有诸余弦项及一恒定分量。

偶函数具有下列重要特性: 要确定系数 a_n , 利用半个周期的曲线 $f(\alpha)$ 就已足够, 即

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha. \quad (1-11)$$

可应用公式 (1-6) 加以証明。将 $-\pi$ 到 $+\pi$ 的积分分成两項

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha.$$

用 $-\alpha$ 代替第一項的积分变量 α ，便得到

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \cos n\alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

2. 函数 $f(\alpha)$ 对称于坐标原点 (图1-4)，即 $f(\alpha) =$

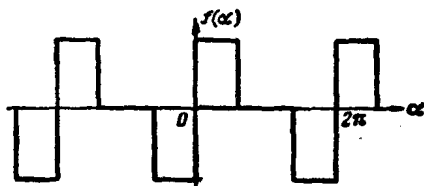


图 1-4 对称于原点的函数 $f(\alpha)$

$-f(-\alpha)$ 。这样的函数叫作奇函数。若考虑这一特性，则 (1-5) 式可写成为

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha) = \\ &= -\frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(-n\alpha) + b_n \sin(-n\alpha)], \end{aligned}$$

于是

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha = 0. \quad (1-12)$$

n 为任意值时, 仅在 $a_n = 0$ 的情况下, 方程式 (1-12) 才能满足于任意的 α 值。

所以, 在这样的对称情况下

$$f(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\alpha, \quad (1-13)$$

即, 凡奇函数仅含有正弦项。

在这种情况下, 如同前面所述, 为了确定系数 b_n , 利用半个周期的曲线 $f(\alpha)$ 就已足够, 即

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \quad (1-14)$$

可应用公式 (1-7) 加以证明

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$

用 $-\alpha$ 代替第一项的积分变量 α , 便得到

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha) \sin n\alpha \, d\alpha. \end{aligned}$$