諧波分析和运算子方法

[苏联]Г. И. 阿塔贝可夫著

國防工業出版社

内 容 簡 介

本书研究非正弦周期过程(付里叶級数)，非周期过程（付里叶积分）及应用运算子法研究瞬变过程(拉普拉斯变换)。本书特别着重地指出了付里叶变换及拉普拉斯变换的相似性，并把这些变换的特性加以对照。本书可作无綫电和电机两专业在电工基础課程方面的教材。

本书可供高等学院有关专业的学生、研究人員等作参考。

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

〔苏联〕Г. И. Атабеков

ОБОРОНГИЗ 195[illegible]

諧波分析和运算子方法

蒋卡林、[illegible]譯

国防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/32　印張 6　127 千字

1958 年10月第一版　1964 年 9 月第二次印刷　印数：2,001—5,150 册

統一书号：15034·224　定价：(科七) 0.85 元

目　录

諧波分析和运算子方法

〔苏联〕Г. И. 阿塔貝可夫 著

蔣卡林　申石虎 譯

國防工業出版社

內容簡介

本书研究非正弦周期过程(付里叶級数)，非周期过程（付里叶积分）及应用运算子法研究瞬变过程(拉普拉斯变换)。本书特别着重地指出了付里叶变换及拉普拉斯变换的相似性，并把这些变换的特性加以对照。本书可作无綫电和电机两专业在电工基础課程方面的教材。

本书可供高等学院有关专业的学生、研究人員等作参考。

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

〔苏联〕Г. И. Атабеков

ОБОРОНГИЗ 1956

谐波分析和运算子方法

蔣卡林、申石虎譯

国防工業出版社 出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售

国防工业出版社印刷厂印装

787×1092 1/32　印張 6　127 千字

1958年10月第一版　1964年9月第二次印刷　印数：2,001—5,150册

統一书号：15034·224　定价：(科七) 0.85 元

目　录

序

本書是作者在以 Серго Орджоникидзе 命名，曾荣获列宁勛章的莫斯科航空学院任教时講授提綱的扩充。它曾作为莫斯科航空学院无綫电及电机两专业学生电工基础課程下列三章的教材：（1）非正弦周期过程（付里叶級数）；（2）非周期过程付里叶积分）；（3）应用运算子法研究瞬变过程（拉普拉斯变換）。

与現代譜波分析法相結合的电工基础課程的这三章內容对于扩大无綫电、航空电气自动学、航空电气設备及仪器制造等未来专家們的科学眼界具有重要的意义。

本書內容叙述中，認为学生們已具有高等数学教程相应章节的数学知識（即級数、付里叶积分以及留数理論）。

本書提綱較之作者在莫斯科航空学院对学生們所講授內容有了部分扩充，增添了下列各节，即§1-7、2-5、2-8、2-[illegible]、3-14、3-17、3-18，这些章节可供研究生学习用。

本書与最近出版的一些电工理論基础教本不同，在本書中对于付里叶积分及运算子法給以相当的重視，对它們加以相互紧密联系的叙述。

特别着重地指出了付里叶变換及拉普拉斯变換的相似性，并且把这些变換的特性加以对照。

运算子法的一些定理和法則（原函数及象函数的微分和积分，在实数域及复数域內的位移和折叠，分解定理等等），都可以扩充到付里叶积分的方法上去（时間函数及频譜函数

的微分和积分，在实数域及复数域內的位移和折叠，以及接通公式等等）。同时，对于非零初始条件的計算，以及瞬变过程計算的实数形式和复数形式，都給以相当大的注意。

这两种变换的相似性便于不满足絕对可积条件的函数进行諧波分析，而且使得在这門課程的理論叙述中充实着一定的物理意义。

本書中所叙述的一些基本理論和計算方法都用典型的例題加以說明。

付里叶积分法和运算子法的各个公式和定理都列在附录中的表Ⅰ及表Ⅲ中。由于有关电工及无綫电方面現有的一些文献中，用到拉普拉斯变换以及卡尔松变换，因此，在本書中，对于运算子法的各項定理和法則，如何由其中的一种形式变换为另一种形式，給以相当的注意。

当选擇諧波分析及运算子法这一部分教材时，我們已經考虑下面一些情况：对于电机各专业的学生不講授无綫电理論基础課程，所以他們必須在电工基础課程內进行这些問題的研究。至于无綫电各专业的学生，根据莫斯科航空学院电工教研組及无綫电教研組长期合作的經驗証明：在电工基础課程內进行諧波分析及运算子法的講授，可以使得后續的无綫电理論基础課程非常容易进行，并使得在无綫电理論基础課程中，有可能以最大的注意来研究无綫电电路中的瞬变过程。为避免重复，关于信号在选擇系統中如何傳送的問題，將在后續的各专业課程中詳細研究，本書不加叙述。

本書內所采用的符号基本上与哥諾洛夫斯基教授所著“无綫电电路中的信号和瞬变过程”(苏联电信出版社，1954)書中的符号相同。

第 一 章

非正弦周期过程（付里叶級数）

§1-1 周期函数

設所研究的函数 $f(t)$ 为时間 t 的周期函数，其周期为 T，即对于任何正値或負値的 t 都能滿足下列等式

$$f(t+T)=f(t)。\tag{1-1}$$

它的几何意义就是：在 $f(t)$ 的图形上，横坐标相差为 T 的任何两点的縱坐标是相同的。条件（1-1）表示一种現象，作无限的周期重复。

周期函数最簡单的例子就是：任何一个物理量，譬如：电流或电压，随时間作簡諧的变化：

$$y=A\sin(\omega t+\psi),$$

其周期为

$$T=\frac{2\pi}{\omega}。$$

无限周期重复的現象事实上是不存在的。因此，严格来說，以（1-1）式为定义的周期函数应該看作为应用于实际計算中的某种抽象的数学概念。

依照（1-1）式的周期函数 $f(t)$ 在一般的情况下并不是正弦函数，可以在以 T 为长度的任何时間間隔內对它进行研究的。任何一瞬間 t_0 都可以选作为这一时間間隔的起点，而

間隔的終点则为瞬間 t_0+T。例如：設

$$t_0=0 \text{ 或 } t_0=-\frac{T}{2},$$

则可得到間隔 $(0,\ T)$ 或 $\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$。

在以 T 为长度的时間間隔內，函数 $f(t)$ 可以是連續的，也可以具有間断点。我們認为所有这些間断点都具有下列的特性：如果函数 $f(t)$ 在 $t=t_1$ 那一点是間断的（图1-1），则函数 $f(t)$ 无論从右（从数值 $t>t_1$）或从左（从数值 $t<t_1$）向間断点趋近时，都必須具有极限。这些极限由符号 $f(t_1+0)$ 及 $f(t_1-0)$ 或 $f(t_1+)$ 及 $f(t_1-)$ 来表示。大家知道，这样的間断点叫作第一类的間断点。我們还認为：在长

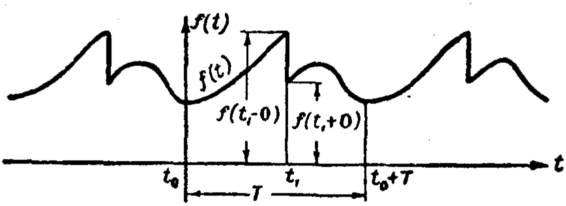

图 1-1 时間的周期函数

度为 T 的时間間隔內，函数 $f(t)$ 的第一类間断点的数目，以及它的极大值和极小值的数目，都是有限的。

这样，我們来研究滿足于狄里赫列条件的函数，这种函数在实际上是常常遇到的。

§1-2 付里叶級数的三角函数形式

滿足狄里赫列条件的非正弦周期函数可以用无限的簡諧級数——付里叶級数的形式来表示。对于函数 $f(t)$ 的所有的

連續点，这一級数的总和与該函数的数值相符合，而在各个間断点，則等于 $f(t)$ 的左极限值和右极限值的算术平均值，即 $\frac{1}{2}[f(t-)+f(t+)]$。

設 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$，并称 ω_1 为基本的角频率。

簡諧級数若表示成三角函数形状則具有下一形式：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t), \qquad (1\text{-}2)$$

式中

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\cos n\omega_1 t\,dt; \qquad (1\text{-}3)$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)\sin n\omega_1 t\,dt。 \qquad (1\text{-}4)$$

此处 $\frac{a_0}{2}$ 为恒定分量；a_n 及 b_n 則为級数中各余弦項及各正弦項的振幅。

恒定分量 $a_0/2$ 可以用 (1-3) 式設 $n=0$ 来确定，它是函数 $f(t)$ 在一周期內的平均值。当 $f(t)$ 的正值面积与負值面积相等时（图1-2），这恒定分量是等于零的。

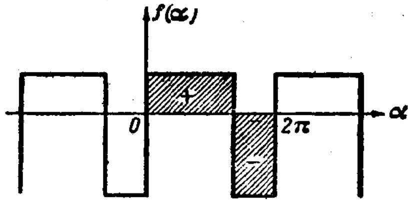

图 1-2　一周期內的平均值为零的函数

数值 t_0 可以任意地选擇。通常取 $t_0=0$ 或 $t_0=-\frac{T}{2}$。

設 $\omega_1 t=\alpha$ 及 $t_0=0$（并考虑$\omega_1 T=2\pi$ 及$d\alpha=\omega_1 dt$），可得

$$f(\alpha)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha), \qquad (1\text{-}5)$$

式中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha; \qquad (1\text{-}6)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\, d\alpha。 \qquad (1\text{-}7)$$

付里叶級数可以用另一形式写出。若取

$$a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha=F_n\cos(n\alpha-\psi_n),$$

式中

$$F_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ \text{及}\ \psi_n=\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n}, \qquad (1\text{-}8)$$

則可得

$$f(\alpha)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cos(n\alpha-\psi_n)。$$

这样的形式在某些情况下是比較方便的，例如，当需要知道所含每一諧波的百分数（F_n 即第 n 次諧波的振幅）。

§1-3 对 称 情 形

表示电磁数量的非正弦周期函数，通常都具有某种对称的形式，这就使它們便于展成付里叶級数。

看一看下列的一些对称情形。

1．函数 $f(\alpha)$ 对称于縱軸（图1-3），即 $f(\alpha)=f(-\alpha)$。这样的函数叫作偶函数。

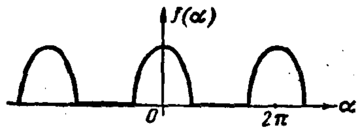

图 1-3　对称于縱軸的函数 $f(\alpha)$

按照（1-5）式

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha]=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(-n\alpha)+b_n\sin(-n\alpha)],$$

并考虑 $\cos(-n\alpha)=\cos n\alpha$ 及 $\sin(-n\alpha)=-\sin n\alpha$，便得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\alpha=0\text{。}\tag{1-9}$$

n 为任意值时，仅在 $b_n=0$ 的情况下，方程式（1-9），才能满足于任意的 α 值。因此，在这种的对称情况下

$$f(\alpha)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\alpha,\tag{1-10}$$

即，凡偶函数仅含有諸余弦項及一恒定分量。

偶函数具有下列重要特性：要确定系数 a_n，利用半个周期的曲綫 $f(\alpha)$ 就已足够，即

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\alpha)\cos n\alpha\,d\alpha\text{。}\tag{1-11}$$

可应用公式（1-6）加以証明。将$-\pi$到$+\pi$的积分分成两項

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha。$$

用$-\alpha$代替第一項的积分变量α，便得到

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha\, d\alpha。$$

2．函数$f(\alpha)$对称于坐标原点（图1-4），即$f(\alpha)=$

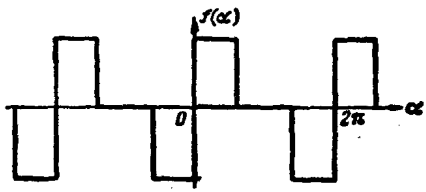

图 1-4　对称于原点的函数$f(\alpha)$

$-f(-\alpha)$。这样的函数叫作奇函数。若考虑这一特性，则(1-5)式可写成为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\alpha\right]=$$

$$=-\frac{a_0}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(-n\alpha)+b_n\sin(-n\alpha)\right],$$

于是

$$a_0+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\alpha=0。\tag{1-12}$$

n 为任意值时，仅在 $a_n=0$ 的情况下，方程式(1-12)才能满足于任意的 α 值。

所以，在这样的对称情况下

$$f(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\alpha,\tag{1-13}$$

即，凡奇函数仅含有正弦項。

在这种情况下，如同前面所述，为了确定系数 b_n，利用半个周期的曲綫 $f(\alpha)$ 就已足够，即

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha。\tag{1-14}$$

可应用公式（1-7）加以証明

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha。$$

用 $-\alpha$ 代替第一項的积分变量 α，便得到

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\alpha)\sin n\alpha\,d\alpha。$$