高等弹性理论

张　行　主编
方汝瑢　刘　森　崔德渝　参编
徐秉业　审

北京航空航天大学出版社

15

高等弹性理论

张 行 主编

方汝瑢 刘 森 崔德渝 参编

徐秉业 审

北京航空航天大学出版社

（京）新登字166号

内 容 简 介

本书是在作者多年从事这一方面教学与研究工作基础上编著的。它以张量方法推导和阐述基本方程、基本解法与基本定理，并通过坐标变换方法将正交直线坐标系下的张量表达式变换成正交曲线坐标系下的张量表达式。讲解了弹性理论问题的三类解法：解析方法、变分方法与主编创立的解析-变分方法。解析法以柱体扭转、柱体弯曲与平面问题以及轴对称问题为对象讲解多项式法、分离变量法与保角映射法等三种解法。变分法讲解了狭义与广义变分原理以及由此建立的近似解法。对解析变分法，介绍含孔洞有限大板应力集中系数与含裂纹有限大板应力强度因子的计算方法，并给出了系统的计算结果。

读者对象：固体力学、航空、航天、船舶、机械与结构等专业的研究生、高年级本科生、教师以及科技工作者。

高等弹性理论
GAODENG TANXING LILUN
张一行 主编
方淑容 刘 森 崔德渝 参编
徐秉业 审
责任编辑 郭维烈
北京航空航天大学出版社出版
新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销
密云华都印刷厂印装
787×1092 1/16 印张：25.25 字数：646千字
1994年6月第一版 1994年6月第一次印刷 印数：1000册
ISBN 7-81012-490-0/O·029 定价：16.90元

序　　言

本书属于应用数学弹性理论范畴，它是为工科院校固体力学、结构设计与机械设计专业研究生用的一本教材，它是在作者多年从事于这门课程教学工作的基础上写成的，并力图做到深入浅出。

这本教材以张量方法推导基本方程、基本解法与基本定理。在此基础上，通过坐标变换将正交直线坐标系的张量表达式变为正交曲线坐标系的张量表达式，以便教学工作的进行。同时为了便于在本科未曾学过初等弹性理论的研究生理解，在应力分析与应变分析这两章的起始部分采用了初等弹性理论的全写形式。

在弹性力学基本理论方面，我们以固体的任意部分为对象建立应力与外力的平衡关系，以任意线元为对象建立应变与位移的几何关系并从热力学第一定律与第二定律出，发引入内能、熵、自由能与热力势建立线弹性的各向异性与各向同性材料的本构关系。

在弹性理论通解建立方面，给出了位移法的加廖尔金（Галеркин）与帕普科维奇（Папкович）的通解表达式以及力法的以马克斯韦尔（Maxwell）与莫雷亚（Morea）应力函数表示的变形协调方程，解决了力法三维问题中方程与未知函数个数的矛盾、并介绍了由刘森与张行导出的力法三维位移一般表达式。

在弹性理论问题特解方面，本书介绍三类解法：解析方法、变分方法与本书主编创立的解析-变分方法。

在解析方法方面，本书以柱体扭转、柱体弯曲、平面问题与轴对称问题为对象，介绍了三种解法：多项式解法、分离变量解法与保角映射解法。

在变分方法方面，首先介绍变分原理，包括狭义变分原理以及钱伟长与胡海昌二位教授为之作出杰出贡献的广义变分原理。狭义变分原理的介绍是以虚功原理为基础的。广义变分原理的讲解是从拉氏乘子法出发的。然后在此基础上分别介绍了以势能原理作为基础的近似解法以及以余能原理为基础的近似解法。同时还介绍了胡海昌教授与本书作者张行和刘森根据余能原理独立导出的平面问题力法位移边界条件应变表达式以及张行和吴国勋导出的楔形杆能量法封闭解。

解析-变分方法是本书主编张行与崔德渝、孟庆春、傅东山等在研究断裂力学应力强度因子解法时所提出的行之有效的方法之一，并成功地用于孔边应力集中系数的计算。这个方法首先导出满足所有支配方程、裂纹表面边界条件与位移单值条件的应力与位移的函数项级数展开式，然后通过变分原理满足其它的边界条件，以确定级数中的系数并从而得到应力强度因子与应力集中系数。这个方法收敛迅速、正确。其适用范围比单纯解析方法宽得多，而其计算效率又比单纯数值方法高得多。有关这个方法的详细内容，请参阅本教材主编张行的专著《断裂力学中应力强度因子的解法》一书。

由于篇幅原因，本教材不包括数值解法、有限变形与弹性动力学等方面的问题。对这些方面有兴趣的读者请参考有关专著。

本书专门设置了思考问题集。本思考问题集是本书所介绍理论与方法的发展，拓宽了它

们的应用范围。现扼要介绍如下：

1．在基本理论方面，发展了坐标变换的方法，在正交直线坐标系的基础上，建立了柱坐标系与球坐标系下的平衡方程、几何方程和各种程度各向异性线弹性体的本构关系以及由此而产生的支配方程；

2．在扭转、弯曲与平面问题中扩大了多项式解法、分离变量解法以及保角映射解法的应用范围，建立了各向异性柱体的支配方程，同时在轴对称问题中引入了球坐标系下的分离变量解法；

3．在变分原理方面，分别从势能原理与余能原理出发，引入了扭转、弯曲、平面问题以及三维问题的位移法与力法支配方程和相应边界条件的推导，同时还引入了扭转、弯曲与轴对称问题在无裂纹及有裂纹情况下的解析-变分解法。

作者水平有限，本书不足之处在所难免。尚希读者及专家批评、指正。

清华大学教材委员会副主任、工程力学系教授徐秉业博士对本书进行了认真、仔细的审阅，给予了充分的肯定，并提出了若干宝贵的建设性意见。作者在此向徐秉业教授表示由衷的感谢。

本书全部插图均由我校五系张瑞年工程师绘制，作者在此表示衷心感谢。

本书得到北京航空航天大学教材基金的资助与北京航空航天大学出版社的大力支持，特致诚挚的谢意。

作　者

一九九三年十二月

目　录

第一章　绪　论

§1-1　弹性理论的作用 ……………………………………………………………………（1）
§1-2　弹性理论的任务 ……………………………………………………………………（1）
§1-3　初等弹性理论与高等弹性理论 ……………………………………………………（2）

第二章　应力分析

§2-1　外力分量与应力分量 ………………………………………………………………（3）
§2-2　平衡方程(一) ………………………………………………………………………（5）
§2-3　静力边界条件 ………………………………………………………………………（7）
§2-4　应力分析的张量形式 ………………………………………………………………（8）
§2-5　平衡方程(二) ………………………………………………………………………（10）
§2-6　应力的坐标变换 ……………………………………………………………………（11）
§2-7　主方向和主应力・应力不变量 ……………………………………………………（12）
§2-8　主应力体元应力分析 ………………………………………………………………（15）
§2-9　应力球张量与应力偏张量 …………………………………………………………（16）

第三章　应变分析

§3-1　位移分量……………………………………………………………………………（17）
§3-2　应变分量及其与位移分量的关系—几何方程(一)………………………………（19）
§3-3　转动分量及其与位移分量的关系—几何方程(二)………………………………（23）
§3-4　应变分析的张量形式………………………………………………………………（27）
§3-5　协调方程……………………………………………………………………………（29）
§3-6　应变的坐标变换……………………………………………………………………（30）
§3-7　主方向和主应变・应变不变量……………………………………………………（31）
§3-8　主应变体元应变分析………………………………………………………………（32）
§3-9　应变球张量与应变偏张量 …………………………………………………………（33）
§3-10　任意方向线元的长度变化…………………………………………………………（33）
§3-11　任意两个线元的角度变化…………………………………………………………（34）
§3-12　体积变化……………………………………………………………………………（36）

第四章　本构关系

§4-1　功率原理 ……………………………………………………………………………（38）

§ 4-2 比自由能 ……………………………………………………………………(40)
§ 4-3 线弹性体本构关系 ……………………………………………………………(41)
§ 4-4 比热力势与线弹性体本构关系 ………………………………………………(48)

第五章 弹性理论的基本方程与解法

§ 5-1 基本方程与边界条件 …………………………………………………………(51)
§ 5-2 位移法基本方程 ……………………………………………………………(52)
§ 5-3 位移法一般解 ………………………………………………………………(53)
§ 5-4 力法基本方程 ………………………………………………………………(57)
§ 5-5 弹性理论中的应力函数 ……………………………………………………(59)
§ 5-6* 力法中位移的确定…………………………………………………………(62)

第六章 弹性理论的一般定理

§ 6-1 应变能定理 …………………………………………………………………(68)
§ 6-2 叠加原理 ……………………………………………………………………(68)
§ 6-3 唯一性定理 …………………………………………………………………(69)
§ 6-4 功的互等定理 ………………………………………………………………(70)
§ 6-5 虚功原理 ……………………………………………………………………(72)
§ 6-6 局部效应原理 ………………………………………………………………(73)

第七章 弹性柱体扭转问题

§ 7-1 柱体扭转问题位移法基本方程和边界条件 …………………………………(78)
§ 7-2 椭圆截面杆扭转-多项式解法…………………………………………………(84)
§ 7-3 等边三角形截面杆的扭转-多项式解法………………………………………(87)
§ 7-4 带圆键槽的圆截面杆扭转-多项式解法………………………………………(89)
§ 7-5 矩形截面杆的扭转-分离变量解法……………………………………………(91)
§ 7-6 扭转问题的保角映射解法 ……………………………………………………(94)

第八章 弹性柱体弯曲问题

§ 8-1 柱体弯曲问题力法基本方程与边界条件 ……………………………………(101)
§ 8-2 弯曲中心 ……………………………………………………………………(106)
§ 8-3 载荷平行于主形心轴的情况 …………………………………………………(107)
§ 8-4 圆截面杆弯曲-多项式解法……………………………………………………(109)
§ 8-5 椭圆截面杆弯曲-多项式解法…………………………………………………(110)
§ 8-6 矩形截面杆弯曲-分离变量解法………………………………………………(111)
§ 8-7 圆管弯曲-多项式解法…………………………………………………………(113)
§ 8-8 弯曲问题的保角映射解法 ……………………………………………………(114)

第九章　平面问题的直角坐标解法

§9-1　平面应变问题 ……(125)
§9-2　平面应力问题 ……(129)
§9-3　广义平面应力问题 ……(131)
§9-4　平面问题的边界条件 ……(133)
§9-5　平面问题的基本解法 ……(136)
§9-6　位移的确定 ……(139)
§9-7　平面应力解答的近似性 ……(140)
§9-8　各向异性平面问题基本方程 ……(143)
§9-9　平面问题的直角坐标系分离变量解法 ……(144)

第十章　平面问题的极坐标解法

§10-1　平衡方程……(150)
§10-2　几何方程……(151)
§10-3　物理方程……(152)
§10-4　位移法基本方程……(152)
§10-5　力法基本方程……(153)
§10-6　位移的确定……(154)
§10-7　平面问题极坐标系分离变量解法……(156)
§10-8　受任意载荷的圆环……(161)
§10-9　受任意载荷的楔形体……(168)

第十一章　平面问题的复变函数解法

§11-1　应力函数的复变函数表达式……(172)
§11-2　应力分量的复变函数表达式……(173)
§11-3　位移分量的复变函数表达式……(174)
§11-4　复应力函数的确定程度……(176)
§11-5　边界条件的复变函数表达式……(177)
§11-6　单连通与复连通域中应力函数的结构……(178)
§11-7　含圆孔的无限大板问题……(182)
§11-8　含裂纹的无限大板问题……(186)
§11-9　平面问题的保角映射解法……(198)
§11-10　含椭圆孔的无限大板问题 ……(204)
§11-11　含正方孔的无限大板问题 ……(209)
§11-12　含孔无限大板的一般解 ……(213)
§11-13　各向异性平面问题通解求法 ……(215)

第十二章　轴对称问题

§12-1　柱坐标系中轴对称物体受轴对称载荷的一般解……(218)
§12-2　圆柱体侧面受载情况……(220)
§12-3　变直径圆轴的扭转……(227)
§12-4　变直径圆轴的简单问题……(230)
§12-5　变直径圆轴的直角坐标系解法……(232)
§12-6　圆环段的扭转……(235)

第十三章　弹性理论中的变分原理

§13-1　运动许可场、静力许可场与虚功原理……(241)
§13-2　虚功原理的证明(一)……(242)
§13-3　虚位移原理……(242)
§13-4　势能原理……(243)
§13-5　以势能原理为基础的近似解法……(245)
§13-6　虚功原理的证明(二)……(247)
§13-7　虚应力原理(一)……(248)
§13-8　余能原理(一)……(249)
§13-9　虚应力原理与余能原理(二)……(251)
§13-10　以余能原理为基础的近似解法……(256)
§13-11　广义势能原理……(257)
§13-12　广义余能原理……(260)
§13-13　分区广义势能原理……(262)
§13-14　等厚度楔形板应力分析——余能原理的具体应用……(265)

第十四章　解析变分解法

§14-1　各向同性材料平面问题的孔边应力集中……(272)
§14-2　各向异性材料平面问题边缘裂纹的应力强度因子……(280)
§14-3　各向异性材料平面问题内部孔边裂纹的应力强度因子……(291)
§14-4　各向异性材料平面问题中双侧边缘裂纹应力强度因子的广义变分解法……(303)
§14-5　各向异性材料平面问题中双侧边缘裂纹应力强度因子的分区广义变分解法……(307)

第十五章　弹性理论问题曲线坐标解法

§15-1　曲线坐标系……(314)
§15-2　曲线坐标系中的平衡方程(一)……(327)
§15-3　曲线坐标系中的变形几何方程(一)……(330)
§15-4　曲线坐标系中的平衡方程(二)……(335)
§15-5　曲线坐标系中的变形几何方程(二)……(337)

§15-6　平面问题的曲线坐标解法举例……………………………………………………(339)
§15-7　变直径圆轴的曲线坐标系解法……………………………………………………(345)
§15-8　球坐标系中的解答……………………………………………………………………(347)

结束语……………………………………………………………………………………………(351)

高等弹性理论思考问题集…………………………………………………………………(353)

第二章　应力分析　……………………………………………………………………………(353)
第三章　应变分析　……………………………………………………………………………(355)
第四章　本构关系　……………………………………………………………………………(356)
第五章　弹性理论的基本方程与解法　………………………………………………………(357)
第七章　弹性柱体扭转问题　…………………………………………………………………(357)
第八章　弹性柱体弯曲问题　…………………………………………………………………(362)
第九章　平面问题的直角坐标解法　…………………………………………………………(364)
第十章　平面问题的极坐标解法　……………………………………………………………(368)
第十一章　平面问题的复变函数解法　………………………………………………………(371)
第十二章　轴对称问题　………………………………………………………………………(377)
第十三章　弹性理论中的变分原理　…………………………………………………………(383)
第十四章　解析变分解法　……………………………………………………………………(387)

参考文献…………………………………………………………………………………………(392)

附：本书各章内容与参考文献编号的对应关系　…………………………………………(394)

第一章 绪 论

§1-1 弹性理论的作用

在工程中进行结构与机构设计时，特别是在进行飞行器设计时，需要满足如下两方面的要求：

1．保证结构与机械在给定的使用周期内与给定的工作条件下具有足够的强度与刚度；

2．保证结构与机械在满足强度与刚度要求的前提下具有最小的重量。

为了满足以上两方面的要求，必须为设计对象合理地选择材料与确定尺寸，这就是结构与机械设计的一项重要内容。弹性理论的作用就是为这一设计任务提供必要的力学基础。

§1-2 弹性理论的任务

弹性理论是在将材料假设为连续介质这一前提下，在小变形与线弹性的条件下研究固体在外界因素(如载荷与温度等)作用下的应力场、应变场与位移场的一门科学。

弹性理论引入以下三类十五个未知函数：

1．三个位移分量的分布函数—位移场；

2．六个应变分量的分布函数—应变场；

3．六个应力分量的分布函数—应力场。

弹性理论的首要任务是建立这十五个未知函数所应满足的十五个支配方程，它们也分为以下三类：

1．小变形条件下的三个力学方程；

2．小变形条件下的六个几何方程；

3．线弹性条件下的六个物理方程。

前两类属于微分方程，后一类属于代数方程。在小变形与线弹性的条件下，这三类方程都是线性的。

为了确定在给定约束情况与加载方式下的位移、应变与应力场，弹性理论还需给出以下两类边界条件：

1．取决于约束情况的位移边界条件；

2．取决于加载方式的面力边界条件。

弹性理论的核心任务是提出在给定的边界条件下求解以上支配方程的方法，从而给出位移场、应变场与应力场。求解的方法大体可分为以下四类：

1．解析方法　给出精确满足所有支配方程与所有边界条件的函数或级数形式的解答；

2．数值方法　给出精确满足部分支配方程与部分边界条件而近似满足其它控制方程以及其它边界条件的数值形式的解答；

3．半解析半数值方法　给出精确满足所有支配方程与部分边界条件而近似满足其它边界条件的函数或级数形式的解答。给出近似满足部分支配方程与边界条件的函数以及级数形式解答的方法也可纳入这一方法的范畴。

4．实验方法　全部通过实验测试给出解答或者采用实验测试与理论计算互相结合的方法给出解答。

§1-3　初等弹性理论与高等弹性理论

初等弹性理论具有如下两个方面的特点：

1．以直观方法与全写形式建立支配方程与边界条件；

2．以反逆方法给出解答并验证其正确性。

高等弹性理论与初等弹性理论的主要区别表现在如下两个方面：

1．以一般方法与张量形式建立支配方程与边界条件；

2．以上述四种方法之一为主，深入地讨论弹性理论求解的问题。

由于采用的解法不同，高等弹性理论又可分为以下四类：

1．数学弹性理论　采用解析方法解决弹性理论问题；

2．计算固体力学　采用数值方法解决弹性理论问题；

3．实验固体力学　采用实验方法解决弹性理论问题；

4．应用数学弹性理论　采用半解析半数值的方法解决弹性理论问题。

本书属于高等弹性理论范畴，并兼有数学弹性理论以及应用数学弹性理论的特点。

第二章 应力分析

本章研究物体外力与内力之间的平衡关系以及内力与内力之间的平衡关系。这些关系是在物体变形以后达到的，在众多的工程结构中，变形的大小远小于结构的尺寸。这种情况被称为小变形。因此在建立平衡关系时，我们以结构变形前的几何形状为准。

§2-1 外力分量与应力分量

外界作用在给定物体上的力统称外力。作用在物体表面的外力(如压力)，称为面力，单位面积上的面力称为面力集度或简称面力$\vec{p}$。故

$$\vec{p}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}S} \tag{a}$$

式中，$\Delta\vec{P}$是作用在物体表面ΔS上的面力。面力显然是一个矢量。于是，

$$\vec{p}=p_x\vec{i}+p_y\vec{j}+p_z\vec{k} \tag{b}$$

其中，p_x、p_y、p_z分别为$\vec{p}$在x、y、z方向的三个分量。集中面力可被看作是作用在无限小面积上而集度为无限大的面力。作用在物体内部的外力(如重力)，称为体力。单位体积上的外力称为体力集度或简称体力$\vec{F}$。故

$$\vec{F}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{f}}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}V} \tag{c}$$

式中，$\Delta\vec{f}$是作用在物体内部ΔV上的体力。体力显然也是一个矢量。于是，

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k} \tag{d}$$

其中，F_x、F_y、F_z分别为$\vec{F}$在x、y、z方向的三个分量。集中体力可被看作是作用在无限小体积上而集度为无限大的体力。

物体内部彼此之间的相互作用力称为内力。为了显示内力，我们采用截面法。用截面N-N将物体截开，保留一部分，如图2-1所示。设作用在被保留部分截面ΔS上的内力为$\Delta\vec{t}$，作用在单位面积上的内力称为应力$\vec{T}$。故

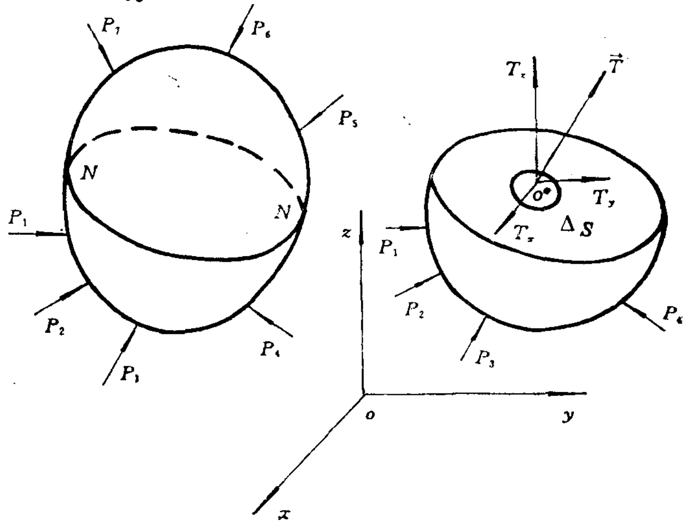

图 2-1

$$\vec{T}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta S}=\frac{d\vec{t}}{dS} \tag{e}$$

显然，对于一定方位的截面而言，应力是一个矢量。于是，

$$\vec{T}=T_x\vec{i}+T_y\vec{j}+T_z\vec{k} \tag{f}$$

其中，T_x、T_y、T_z分别为$\vec{T}$在 x、y、z 方向的分量。应力矢量在作用面外法线n方向的分量称为正应力，以σ表示之；应力矢量在作用面切向的分量称为剪应力，以τ表示之，如图2-2所示。于是，

$$|\vec{T}|=\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \tag{g}$$

显然，如果以Δt_σ与Δt_τ分别表示$\Delta\vec{t}$在作用面法向与切向的分量，则

$$\sigma=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta t_\sigma}{\Delta S}=\frac{dt_\sigma}{dS} \tag{2-1-1}$$

$$\tau=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta t_\tau}{\Delta S}=\frac{dt_\tau}{dS} \tag{2-1-2}$$

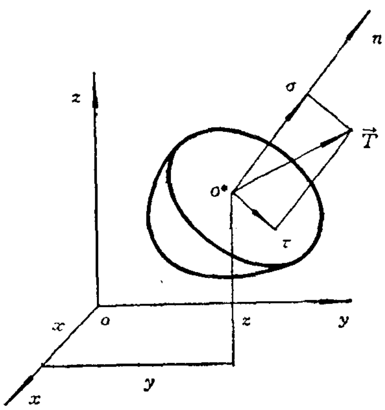

图 2-2

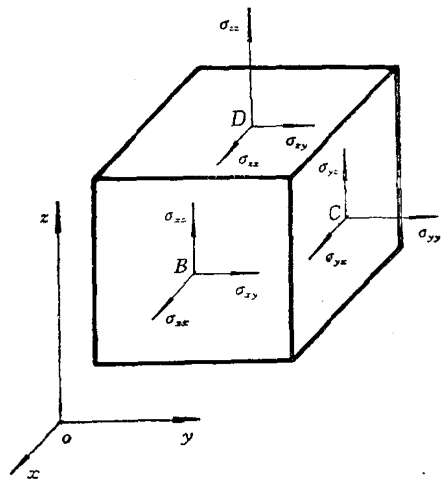

图 2-3

一般而言，对于具有一定坐标的点，应力分量随截面的方向不同而不同。为此，我们选取一直角坐标系并以平行于坐标面的截面切取一个无限小正交六面体体元，如图 2-3 所示。将该体元每个侧面上的应力分解为沿坐标轴方向的分量。以双足标形式表示应力。第一个足标表示截面外法线方向，第二个足标表示应力分量方向。具有重复足标的应力表示正应力；具有不重复足标的应力表示剪应力。现对体元各侧面上的应力分量的正负作如下规定：如果截面外法线方向与坐标正方向相同，则应力分量以与坐标正方向相同为正，相反为负；如果截面外法线方向与坐标正方向相反，则应力分量以与坐标正方向相反为正，相同为负。图2-3画出了外法线与坐标正方向相同的三个侧面上的应力分量，按照上述规定，它们均是正的。

显然，体元的应力状态由它的三个正交截面上的应力矢量表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\vec{T}_x&=\sigma_{xx}\vec{i}+\sigma_{xy}\vec{j}+\sigma_{xz}\vec{k}\\ \vec{T}_y&=\sigma_{yx}\vec{i}+\sigma_{yy}\vec{j}+\sigma_{yz}\vec{k}\\ \vec{T}_z&=\sigma_{zx}\vec{i}+\sigma_{zy}\vec{j}+\sigma_{zz}\vec{k}\end{aligned}\right\} \tag{2-1-3}$$

总之，对于一个面元而言，应力应由三个分量表示，即为矢量；对于一个体元而言，应力应由九个分量表示，这种量被称为二阶应力张量。

§2-2　平衡方程(一)

当物体受到外力作用时，内部各点均有应力存在，而且一般说来，应力分量随点的位置不同而不同。根据连续性假设，应力是点的坐标的单值连续函数，即

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \sigma_{xx}(x,y,z)\\
\sigma_{xy} &= \sigma_{xy}(x,y,z)\\
\sigma_{xz} &= \sigma_{xz}(x,y,z)\\
\sigma_{yx} &= \sigma_{yx}(x,y,z)\\
\sigma_{yy} &= \sigma_{yy}(x,y,z)\\
\sigma_{yz} &= \sigma_{yz}(x,y,z)\\
\sigma_{zx} &= \sigma_{zx}(x,y,z)\\
\sigma_{zy} &= \sigma_{zy}(x,y,z)\\
\sigma_{zz} &= \sigma_{zz}(x,y,z)
\end{aligned}\right\}\qquad (a)
$$

如果点$A(x,y,z)$的应力分量已知，则与之相距无限近的另一点$B(x+dx,y+dy,z+dz)$的应力分量在略去高阶无穷小量的前提下可以表示成如下形式

$$
\left.\begin{aligned}
(\sigma_{xx})_B &= \sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial z}dz\\
(\sigma_{xy})_B &= \sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial z}dz\\
&\ \vdots\\
(\sigma_{zz})_B &= \sigma_{zz} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial x}dx + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial y}dy + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}dz
\end{aligned}\right\}\qquad (b)
$$

其中，σ_{xx}、σ_{xy}、σ_{xz}……σ_{zz}为A点的应力分量。

取物体内任一点$A(x,y,z)$为体心作出正交六面体体元，并标出各侧面的应力分量，如图2-4所示。若A点应力分量为σ_{xx}、σ_{xy}…σ_{zz}，则由于体元前后面上x坐标与A点不同，前后面中心B与B'上的应力分量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xxB} &= \sigma_{xx} + \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}, & \sigma_{xxB'} &= \sigma_{xx} - \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\\
\sigma_{xyB} &= \sigma_{xy} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2}, & \sigma_{xyB'} &= \sigma_{xy} - \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2}\\
\sigma_{xzB} &= \sigma_{xz} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}\frac{dx}{2}, & \sigma_{xzB'} &= \sigma_{xz} - \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}\frac{dx}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad (c)
$$

同理，左右、上下各侧面中心C、C'、D、D'上的应力分量分别为

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{yxC} &= \sigma_{yx} + \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}, & \sigma_{yxC'} &= \sigma_{yx} - \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\\
\sigma_{yyC} &= \sigma_{yy} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2}, & \sigma_{yyC'} &= \sigma_{yy} - \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2}\\
\sigma_{yzC} &= \sigma_{yz} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}\frac{dy}{2}, & \sigma_{yzC'} &= \sigma_{yz} - \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}\frac{dy}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad (d)
$$

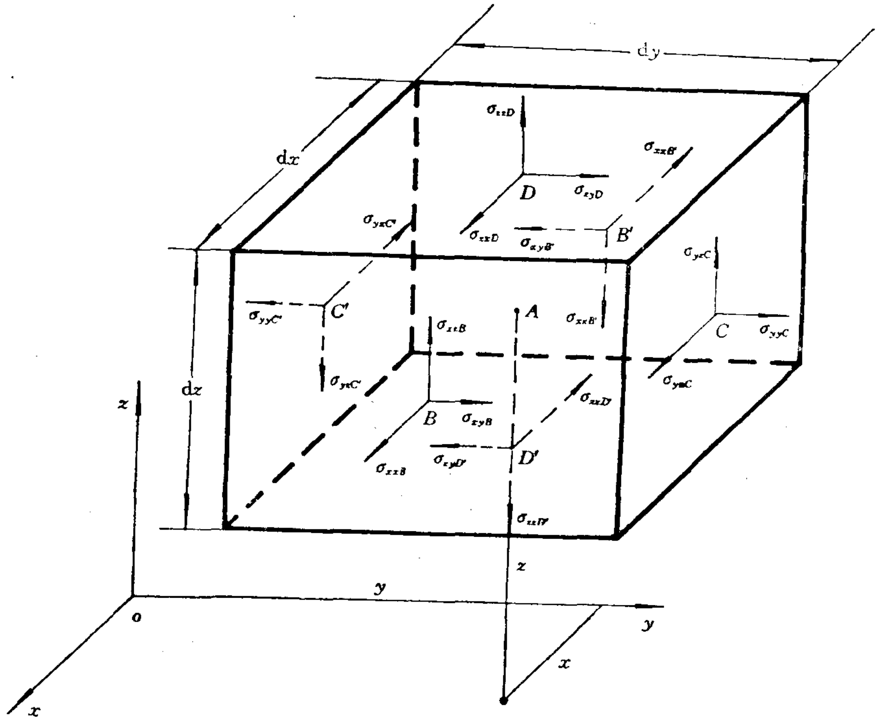

图 2-4

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{zxD} &= \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}, & \sigma_{zxD'} &= \sigma_{zx} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2} \\
\sigma_{zyD} &= \sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}, & \sigma_{zyD'} &= \sigma_{zy} - \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2} \\
\sigma_{zzD} &= \sigma_{zz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}, & \sigma_{zzD'} &= \sigma_{zz} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}
\end{aligned}\right\} \qquad (e)
$$

设作用于点A上的体力为F_x、F_y、F_z。体元平衡方程为$\Sigma X=0, \Sigma Y=0, \Sigma Z=0, \Sigma M_x=0, \Sigma M_y=0, \Sigma M_z=0$。

由$\Sigma X=0$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&+\left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \left(\sigma_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&+\left(\sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \left(\sigma_{zx} - \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\,\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + F_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0
\end{aligned}
$$

上式经过整理后变成

$$
\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0
$$

同理，由$\Sigma Y=0$、$\Sigma Z=0$，可以得到另外两个平衡方程。于是，我们得到如下的三个平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+F_x=0\\
&\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}+F_y=0\\
&\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}2\text{-}1)$$

以过点A平行于坐标轴x的直线为矩轴，应用力矩方程$\Sigma M_x=0$，我们有

$$\left(\sigma_{yz}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\left(\sigma_{yz}-\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}$$

$$-\left(\sigma_{zy}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}z}{2}-\left(\sigma_{zy}-\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}z}{2}=0$$

由此可得 $$\sigma_{yz}=\sigma_{zy}$$

同理，由$\Sigma M_y=0$、$\Sigma M_z=0$，可得另外两个平衡方程。于是，我们又得到如下的平衡方程

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{zy}&=\sigma_{yz}\\
\sigma_{xz}&=\sigma_{zx}\\
\sigma_{yx}&=\sigma_{xy}
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}2\text{-}2)$$

式(2-2-2)给出了剪应力互等定理。

式(2-2-1)与式(2-2-2)统称为平衡方程。

综上所述，有三个平衡微分方程式(2-2-1)以及六个独立的应力分量σ_{xx}、σ_{yy}、σ_{zz}、σ_{yz}、σ_{zx}、σ_{xy}。上述三个平衡微分方程表示物体平衡时，内部应力分量所服从的规律。显然这三个方程不足以完全确定六个独立的应力分量，尚需建立必要的补充方程。这些补充方程将由变形几何方程与物理方程给出。

若物体在外力作用下并不处于静平衡状态，体元运动方程可根据牛顿第二定律推出如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}+F_x=\rho\frac{\partial^2u_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}+F_y=\rho\frac{\partial^2u_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=\rho\frac{\partial^2u_z}{\partial t^2}
\end{aligned}\right|\qquad(2\text{-}2\text{-}3)$$

式中，ρ为材料密度，u_x、u_y、u_z为A点的三个位移分量。以上三式可被看成动平衡微分方程。

§2-3 静力边界条件

当物体平衡时，应力分布应该满足平衡方程，同时还应满足静力边界条件。我们在物体表面附近以平行于坐标面的平面截取一个包含表面的四面体体元。四面体的底面$\triangle ABC$为物体表面的一部分，如图2-5所示。

假定作用在四面体底面上面力分量为p_x、p_y、p_z；表面外法线N的方向余弦为