奇异积分算子

〔阿根廷〕A. P. 卡尔台龙著　伍卓群譯

上海科学技术出版社

奇异积分算子
及其在
双曲微分方程上的应用

〔阿根廷〕A. P. 卡尔台龙 著

伍卓群 譯

谷超豪 校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

奇异积分算子是近年来发展起来的研究偏微分方程的有力的工具．本书叙述了奇异积分算子的基本性质和它对双曲型方程的应用．內容包括一維、n維 Hilbert 变换，Riesz 变换，具偶核的奇异积分，核的 Fourier 变换，n維球面調和函数，空間 L_k^p, β 型算子及完全双曲方程等．

本书可供理科大学数学、力学、物理等系师生参考，也供有关研究人員参考．

INTEGRALES SINGULARES Y SUS APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES HIPERBOLICAS

Alberto P. Calderón

Universidad de Buenos Aires. 1960

奇异积分算子

及其在

双曲微分方程上的应用

伍卓群 譯

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路 450 号）
上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

商务印书館上海厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32　印張 3 12/32　排版字数 88,000
1964 年11月第 1 版　1964 年11月第 1 次印刷
印数 1—5,500

統一书号 13119·618　定价（科六）0.55 元

譯 者 序

本书是 A. P. Calderón 用西班牙文写成的一个讲义. 由于很想学习这个讲义中所述的理論, 同时考虑到这个讲义的原文本在国内几乎是唯一的, 而感兴趣的人又很多, 在王柔怀先生的鼓励下,鼓起勇气进行了这个讲义的翻譯工作. 譯者初学西班牙文,虽然有心力求在大小地方都符合作者的原意, 但終难作到完完全全的直譯,翻譯上的错誤一定不少,希望讀者批評指正.

原书上一些記号的错落, 翻譯时凡发現到的都巳改正. 个别段落作了一点小的变动. 此外,还添加了少量的足注. 有不妥处,也請讀者指正.

伍 卓 群 1963年12月13日

目 录

引　言

記号　以 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 等表 n 維 Euclid 空間 E^n 中的点，并采用下面的記号：

$$|x|=(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{\frac{1}{2}},\ \lambda x=(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n),$$

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$

$$x\cdot y=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\ \Sigma=\{x; |x|=1\}.$$

E^n 中的体积元素記为 dx，Σ 上的面积元素記为 $d\sigma$。对 $f(t)$ $(t\in E^n)$，以 $Ff(x)$ 表 f 的 Fourier 变换：

$$Ff(x)=\int f(t)e^{2\pi ix\cdot t}dt=\hat{f}(x).$$

$\beta=[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$，$\alpha=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，$p=[p_1, p_2, \cdots, p_n]$ 等表 n 个非負整数的有序組.

其他記号：

$$|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i,\ \ x^\alpha=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i},\ \ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha=D^\alpha$$

$$=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},\ \ \alpha!=\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!.$$

以 C^∞ 表无穷次可微函数类，$\mathscr{D}$ 表 C^∞ 之具紧支集的子类，C^n 表 n 次連續可微函数类，$\mathscr{D}^n$ 表 C^n 之具紧支集的子类.

S 和 S' 分别表 C^∞ 中剧减子类和它的对偶，$\mathscr{D}'$ 表 $\mathscr{D}$ 的对偶，S' 和 $\mathscr{D}'$ 中的元素都是广义函数.

a) 任一在单位球面上的积分为零的 $-n$ 阶齐次函数 k (即对任一 $a>0$，$k(ax)=a^{-n}k(x)$)，定义一卷积形奇异积分算子：

$$Kf(x)=\int_{E^n}k(x-y)f(y)dy=(k*f)(x), \tag{1}$$

其中积分了解为取主值. 当 $n=1$ 时，这种形状的算子除常数因子

外是唯一的，它就是 Hilbert 变换.

这种算子与平移可交换，即，若令 $t_a f(x)=f(x-a)$，則

$$K t_a f=t_a K f.$$

形式地可得（以后会証明这个結果）

$$F(Kf)=F(k)F(f). \tag{2}$$

式中 $F(k)$ 为一零阶齐次函数；这是因为，若記 $k_\lambda=k(\lambda t)$，則有

$$(Fk_\lambda)(y)=\lambda^{-n}(Fk)\left(\frac{y}{\lambda}\right).$$

而按假設，k 是 $-n$ 阶齐次函数.

若核 k 在 $E^n-\{0\}$ 中还属于 C^∞，則 $F(k)$ 也属于 C^∞，且其在 Σ 上的平均值为零. 反之，任一在 Σ 上的平均值为零且属于 C^∞ 的零阶齐次函数都是某一在 Σ 上的平均值为零且属于 C^∞ 的 $-n$ 阶齐次函数的 Fourier 变换.

具有这种性质的核所产生的由 (1) 定义的算子，对普通乘法运算并不封閉；事实上

$$F(K_1K_2f)=F(k_1)F(K_2f)=F(k_1)F(k_2)F(f), \tag{3}$$

虽然 $F(k_1)F(k_2)$ 是零阶齐次的，且属于 C^∞，但其在 Σ 上的平均值不一定为零.

然而，$F(k_1)F(k_2)-(F(k_1)F(k_2)$ 在 Σ 上的平均值)，如上面所指出，却是某一 k_3 的 Fourier 变换 $F(k_3)$.

因此，$F(k_1)F(k_2)=F(k_3)+c$. 取 Fourier 反变换便得

$$K_1K_2f=(c+K_3)f.$$

这暗示我們更一般地去定义算子 K：

$$Kf(x)=cf(x)+\int_{E^n}k(x-y)f(y)dy, \tag{4}$$

这种算子显然构成一个代数.

定义 K 的符号为 $\sigma(K)=c+F(k)$. 于是由 (4) 知 $F(Kf)=\sigma(K)F(f)$，因而按前所指出，符号与算子之間存在一个一一对应.

b) 因为 $F(k)\in C^\infty$，并且是零阶的，所以它在 E^n 中有界，因

此对于$f\in L^2(E^n)$，根据(4)并运用 Parseval 等式可得

$$\|Kf\|_2\leqslant(\|F(k)\|_\infty+|c|)\|f\|_2.$$

以后将証明对所有$p\in(1,\infty)$，Kf 是(p,p)型的．这个結果对$p=1,\infty$不成立．

算子 K 的連續性在熟知的 Orlicz 空間中也可証明．

若f满足阶为α的 Hölder 条件：

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha,$$

則对$0<\alpha<1$，K 关于f的熟知模是連續的．但对$\alpha=1$这个結果不成立．

c）下面进行一些形式运算，它們对$\mathscr{D}$中函数当然是可行的．根据公式

$$\left(F\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)(x)=-2\pi i x_h(Ff)(x), \tag{5}$$

并按

$$F(\Lambda f)=2\pi|x|F(f) \tag{6}$$

定义算子Λ，我們有：

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial x_h}\right)(x)=-ix_h|x|^{-1}(F\Lambda f)(x).$$

連續运用Λ，得到：

$$F(\Lambda\Lambda f)=2\pi|x|F(\Lambda f)=4\pi^2|x|^2F(f)=-F(\Delta f),$$

故

$$\Lambda=(-\Delta)^{\frac{1}{2}};$$

此外，由(5)和(6)知算子Λ与$\dfrac{\partial}{\partial x_h}$可交換：$\Lambda\dfrac{\partial}{\partial x_h}=\dfrac{\partial}{\partial x_h}\Lambda$．連續应用(5)可得：

$$F(D^pf)=(-i)^{|p|}x^p|x|^{-|p|}F(\Lambda^{|p|}f), \tag{7}$$

因为$x^p|x|^{-|p|}$是零阶齐次函数，在$E^n-\{0\}$中属于C^∞，故由 a）中所述，

$$D^pf=(-i)^{|p|}K\Lambda^{|p|}f, \tag{8}$$

其中K形如(4)，$\sigma(K)=c+F(k)=x^p|x|^{-|p|}$.

这样一来，算子D^p就分解成先用同一“不好”的算子Λ(Λ无

界，它定义在一稠密集合上）連續作用，然后用一連續算子 K 作用.

d）現在考虑常系数齐次微分算子，我們有：

$$Lf=\sum_{|p|=m}a_pD^pf=\Big(\sum_{|p|=m}a_p(-i)^mK_p\Big)\Lambda^mf=(-i)^mK\Lambda^mf, \quad (9)$$

其中 K 是符号为 $\sigma(K)=\sum_{|p|=m}a_px^p|x|^{-m}=P_L(x)|x|^{-m}$ 的算子，而 $P_L(x)=\sum_{|p|=m}a_px^p$ 是 L 的特征多項式.

如果 $P_L(x)=0$ 当且仅当 $x=0$ 时成立，微分算子 L 是椭圓的. 在这种情形下，$(\sigma(K))^{-1}$ 是一零阶齐次函数，在 $E^n-\{0\}$ 中属于 C^∞，因而它是某一算子 K^{-1} 的符号.

显然，$KK^{-1}=K^{-1}K=I$；事实上，

$$\sigma(KK^{-1})=\sigma(K)\sigma(K^{-1})=\sigma(K)(\sigma(K))^{-1}=1=\sigma(I).$$

对于具实系数的椭圓算子 L，易見 $P_L(x)$ 是偶次的：$m=2r$. 因此，$Lf=K\Delta^rf$，而方程 $Lf=g$ 可化成 $\Delta^rf=K^{-1}g$，或者說归結为解方程 $\Delta f=h$.

e）現在将 d）推广到变系数的情形，这里提供的方法是很有兴趣的. 設 $L=\sum_{|p|=m}a_p(x)D^p$，于是

$$Lf=\Big(\sum_{|p|=m}(-i)^ma_p(x)K_p\Big)\Lambda^mf=(-i)^mK\Lambda^mf. \quad (10)$$

Kg 中每一項都形如：

$$a_p(x)K_pg=a_p(x)C_pg(x)+\int a_p(x)k_p(x-y)g(y)dy. \quad (11)$$

这暗示我們将由(4)所給出的 K 的定义推广成

$$Kg=b(x)g+\int k(x, x-y)g(y)dy, \quad (12)$$

其中 $b(x)$ 有界且具有以后我們会指出的某些性质，$k(x, z)$对 z 是 $-n$ 阶齐次的，对每一 z，关于 x 是有界的，而对每一 x，在球面 $|z|=1$ 上的积分为零.

K 的符号为 $\sigma(K)=\sigma(K(x, t))=b(x)+F_z(k(x, z))(t)=b(x)+(k(x, z)$关于 z 的 Fourier 变换$)(t)$. 因为 σ 对仅依賴于 x 的因子是綫性的，(10)中的 K 的符号是 $\sigma(K)=\sum a_p(x)t^p|t|^{-|p|}$，換言之，$K$ 的符号就是 L 的特征多項式除以 $|t|^{-m}$.

若 $k(x, z)$ 对 z 是属于 C^∞ 的，并且还满足其他一些条件，则 K 具有如 b) 中所述的連續性.

应該指出，普通乘积一般不是同型算子，并且一般不可交换. 此外，因为 K 在 L^2 中有界，我們可由

$$(Kf, g) = (f, K^* g), \quad f, g \in L^2$$

定义 K 的共軛，但是一般說来，K^* 不是 K 的同型算子（当 K 由 (4) 定义时，K^* 与 K 同型）.

如在 a) 中所指出的一样，在算子与符号之間存在一个一一对应. 因此我們可以这样定义 K_1 和 K_2 的准乘积 $K_1 \circ K_2$，它的符号为 $\sigma(K_1 \circ K_2) = \sigma(K_1)\sigma(K_2)$. 对于这种运算，算子 K 的集合构成一可交换代数.

类似地，K 的准共軛 $K^\#$ 定义作以 $\sigma(K^\#) = \overline{\sigma(K)}$ 为符号的算子. 显然，若 $|(\sigma(K))(x, z)| > \varepsilon > 0$，則存在 K 的准逆 ${}^{-1}K$，它由 $\sigma({}^{-1}K) = (\sigma(K))^{-1}$ 所定义，并且显然 $K \circ {}^{-1}K = {}^{-1}K \circ K = I$.

記 $L_h^p = \{f;\ D^\alpha f \in L^p \text{ 当 } 0 \leqslant \alpha \leqslant h \text{ 时}\}$，这里的微商了解为广义函数意义下的微商. 在 L_h^p 中定义适当的模. 将 L_h^p 变到 L_{h+1}^p 的算子 R 称为正規的.

可以証明 $P = K_1 \circ K_2 - K_1 K_2$ 和 $A = K^* - K^\#$ 是正規的. 事实上，因为 ΛA, ΛP 和 $A\Lambda$, $P\Lambda$ 在所有 L^p $(1 < p < \infty)$ 中是有界的，故

$$\frac{\partial}{\partial x_h} Pf = -i[K_{(h)}\Lambda] Pf = -iK_{(h)}(\Lambda P) f$$

有界，作为例子，这就証明了 P 变 L^p 到 L_1^p.

因此，将乘积换成准乘积，共軛换成准共軛，而引出的“誤差”是一正規算子；换言之，mod 一正規算子，$P \equiv 0$, $K^* \equiv K^\#$.

至于在普通乘积意义下的逆，可以說当 $\sigma(K) \neq 0$ 时，如果 K 沒有逆，則存在一正規算子 R 使得 $K + R$ 有逆.

§ 1. 一維 Hilbert 变换

以 H_ε $(\varepsilon > 0)$ 表由

$$H_\varepsilon f=\tilde{f}_\varepsilon=\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt$$

給出的算子. 运用Hölder不等式就知它对任意$f\in L^p, 1\leqslant p<\infty$,有定义.

定理 若$f\in L^p$, $1<p<\infty$, 則

a) $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$, 其中常数 A_p 与 ε 和 f 无关;

b) 当 $\varepsilon\to0$ 时, $\tilde{f}_\varepsilon$ 于 L^p 中存在极限,記作$\tilde{f}$;

c) $\|\tilde{f}\|_p\leqslant A_p\|f\|_p$, 其中 A_p 是 a) 中的相同常数.

[証明]

a) 因为 H_ε 是綫性的,故只須对非負函数去証明 a).

設$f\geqslant0$, $f_n(x)$在 $|x|\leqslant n$ 上等于$f(x)$,而在其他部分为零;显然在每点,$\tilde{f}_{n,\varepsilon}(x)\to\tilde{f}_\varepsilon(x)$. 据 Fatou 定理,

$$\int|\tilde{f}_\varepsilon|^pdx=\int\varliminf_n|\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^p dx\leqslant\varliminf_n\int|\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^pdx,$$

因而,若能对具紧支集的函数証明 a), 則由此推出:

$$\int|\tilde{f}_\varepsilon|^pdx\leqslant\varliminf_n\int|\tilde{f}_{n,\varepsilon}|^pdx\leqslant\lim_n A_p\int|f_n|^pdx=A_p\|f\|^p.$$

設$f\geqslant0$, $f\in L^p$, f 具紧支集且其积分不为零($f=0$的情形是不足道的), $1<p<\infty$. Hilbert 变换的核与 Cauchy 型积分的核形状相似,这启示我們研究下面的积分:

$$F(z)=i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{z-t}dt,$$

其中 $\Im(z)>0$①. 在积分号下求微商就知在域$\Im(z)>0$内 $F(z)$是解析的.

設 $z=x+iy$ $(y>0)$, $\Re F(z)=R(x,y)$, $\Im F(z)=I(x,y)$,

$$|F(z)|=M(x,y),\ \phi=\operatorname{Arg}F(z).$$

于是 $R(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)y}{(x-t)^2+y^2}dt=f*\frac{y}{x^2+y^2}$; 据 Young 不等式,对固定 y:

$$\|R(x,y)\|_p\leqslant\|y(x^2+y^2)^{-1}\|_1\cdot\|f\|_p=\pi\|f\|_p. \qquad (1)$$

① $\Re(z)$与$\Im(z)$分别表 z 的实数部分与虚数部分. ——譯者注

此外 $R(x, y)>0$，因而 $-\frac{\pi}{2}<\phi<\frac{\pi}{2}$.

现在用 $\|R(x, y)\|_p$ 来估計 $\|I(x, y)\|_p$.

有 $F(z)^p=M^p \exp ip\phi$. 按关于 f 的假設，当 $z\to\infty$ 时，

$$|F(z)|\sim|z|^{-1},$$

从而 $|F(z)^p|\sim|z|^{-p}$. 令 $L=\{z;\ |\Re(z)|\leqslant a,\ \Im(z)=y\}$，$C=\{z=(u, v);\ v>y,\ u^2+(v-y)^2=a^2\}$. 因为 $F(z)^p$ 解析，故

$$\int_{C\cup L} F(z)^p dz=0,$$

又由于当 $a\to\infty$ 时，

$$\left|\int_C F(z)^p dz\right|\leqslant \text{const. } a^{-p+1}\to 0,$$

故

$$\int_{-\infty+iy}^{+\infty+iy} F(z)^p dz=0,$$

即

$$0=\int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x, y)\cos p\phi\, dx=\int_{-\infty}^{+\infty} M^p(x, y)\sin p\phi\, dx. \qquad (2)$$

設 p 不是奇数，于是存在 $b>0$ 以及 $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$ 的半徑为 d 的小邻域，使得在其上，$|\cos p\phi|>b$，并且存在 $c>0$，使得

$$\text{在}\left(-\frac{\pi}{2}+d,\ \frac{\pi}{2}-d\right)\text{上，}\ \cos\phi>c.$$

于是有

$$|\sin\phi|^p<b^{-1}\left(sg\cos\frac{p\pi}{2}\right)\cos p\phi+(b^{-1}+1)c^{-p}\cos^p\phi$$

$$=A\cos p\phi+B\cos^p\phi.$$

故当 y 固定时，

$$\int_{-\infty}^{\infty}|I(x, y)|^p dx=\int_{-\infty}^{\infty} M^p|\sin\phi|^p dx$$

$$\leqslant A\int_{-\infty}^{\infty} M^p\cos p\phi dx+B\int_{-\infty}^{\infty} R^p dx,$$

从而根据(2)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}|I(x,\ y)|^p\,dx\leqslant B\int_{-\infty}^{\infty}R^p dx. \tag{3}$$

$I(x,\ \varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x-t)f(t)}{(x-t)^2+\varepsilon^2}dt$ 与 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 之差为下述核与 f 之卷积:

$$g_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2}-\dfrac{1}{x} & \text{当}\ |x|>\varepsilon\ \text{时},\\[2ex] \dfrac{x}{x^2+\varepsilon^2} & \text{当}\ |x|\leqslant\varepsilon\ \text{时}.\end{cases}$$

据 Young 不等式,并注意 $\|g_\varepsilon\|_1<\pi$ 得

$$\|g_\varepsilon * f\|_p\leqslant\pi\|f\|_p. \tag{4}$$

据(3),(4),于是有

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant\|I(x,\ \varepsilon)\|_p+\|I(x,\ \varepsilon)-\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant B^{\frac{1}{p}}\|R(x,\ \varepsilon)\|_p+\pi\|f\|_p,$$

再按(1)便得

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant A_p\|f\|_p ①.$$

为完成定理的証明,只須証明 b),因为 c) 乃是 a),b)的直接推論.

b) 設 $g(x)$,$h(x)\in\mathscr{D}$,$h(x)$是偶函数且 $h(0)=1$;于是

$$\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{h(x-t)}{x-t}dt=0.$$

注意到 $|g(t)-g(x)h(x-t)|<M|x-t|$,M 不依賴于 x,t,我們得

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{g(t)}{x-t}\,dt=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{g(t)-g(x)h(x-t)}{x-t}\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)-g(x)h(x-t)}{x-t}\,dt.$$

由此易見 $|\tilde{g}_\varepsilon(x)|<\dfrac{N}{|x|+1}$. 因 $\dfrac{N}{|x|+1}$ 为 p 可积,$1<p<\infty$,故

---

① 若 p 是奇数,則共軛指数 $q\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 就不是奇数. 对任一 $f\in\mathscr{D}$, $g\in L^q$,

$(\tilde{f}_\varepsilon,\ g)=\int\tilde{f}_\varepsilon(x)g(x)dx=\int\left(\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt\right)g(x)dx=\int\left(\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{g(x)}{x-t}dx\right)f(t)dt.$

故 $|(\tilde{f}_\varepsilon,\ g)|\leqslant\|\tilde{g}_\varepsilon\|_q\|f\|_p\leqslant A_q\|g\|_q\|f\|_p$. 取 $g=\tilde{f}_\varepsilon^{p-1}$,因此得 $\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant A_q\|f\|_p$.

——譯者注

按 Lebesgue 关于积分号下求极限的定理知 $\{\tilde{g}_\varepsilon(x)\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 序列.

設 $f\in L^p$, $\|f-g\|_p<\delta$, $g\in\mathscr{D}$. 据 a) 和 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\|\tilde{f}_\varepsilon-\tilde{f}_\eta\|_p&\leqslant\|\tilde{f}_\varepsilon-\tilde{g}_\varepsilon\|_p+\|\tilde{g}_\varepsilon-\tilde{g}_\eta\|_p+\|\tilde{g}_\eta-\tilde{f}_\eta\|_p\\&\leqslant 2A_p\delta+\|\tilde{g}_\varepsilon-\tilde{g}_\eta\|_p,\end{aligned}$$

这表明 $\{\tilde{f}_\varepsilon\}$ 是 L^p 中的 Cauchy 序列,因而收斂于某一 $\tilde{f}\in L^p$.

§2. n 維 Hilbert 变换(奇核)

設 $k(x)$ 是一个 $-n$ 阶齐次函数,在单位球面上属于 L^1,且 $k(x)=-k(-x)$.

因为 k 在任一不含原点的緊致部分上絕对可积,故对 $f\in\mathscr{D}$ 可定义如下的算子:

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=(K_\varepsilon f)(x)=\int_{|x-y|>\varepsilon}k(x-y)f(y)dy.$$

定理 設 $k(x)$ 为具上述性质的函数. 于是:若

$$f\in L^p,\quad 1<p<\infty,$$

则

a) $\|K_\varepsilon f\|_p\leqslant\frac{1}{2}A_p\|f\|_p\int_{|x|=1}|k(x)|d\sigma$ (A_p 为 §1 定理中同样的常数);

b) 存在一函数 $\tilde{f}=Kf\in L^p$, 使得 $\tilde{f}_\varepsilon$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时 p 平均收斂于 $\tilde{f}$;

c) $\|Kf\|\leqslant\frac{1}{2}A_p\|f\|_p\int_{|x|=1}|k(x)|d\sigma$.

[証明] 为了得到这一定理,只須就 $\mathscr{D}$ 中函数証明 a),b),这是因为一族在稠密集上强收斂的一致有界算子,能定义出一个作用于全空間的算子,在我們所論情形下这算子記作 K. 首先,对 $f\in L^p$, $K_\varepsilon f$ 可作为 $\mathscr{D}$ 中同一算子的連續扩張而得到,这样便按卷积在 L^p 中定义了 K_ε; 进而定义 K 为 K_ε 的极限.

証明的方法是将 n 維情形化成一維情形. 設 $f\in\mathscr{D}$.

a）固定 $t'\in\Sigma$，以 L 表正交于向量 t' 的子空間．記

$$g(\rho)=f(y+\rho t'),$$

$g(\rho)$ 就是 f 在过点 y 而平行于向量 t' 的直綫上的限制．

注意到 $k(x)$ 是奇函数，运用 Hölder 不等式，得到

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p=\left[\int_{E^n}\left|\int_\Sigma\frac{k(t')}{2}d\sigma\int_{|\rho|>\varepsilon}\frac{f(x-\rho t')}{\rho}d\rho\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\left(\int_\Sigma\frac{|k(t')|}{2}d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}\left[\int_\Sigma\frac{|k(t')|}{2}\right.$$

$$\left.\left(\int_{E^n}\left|\int_{|\rho|>\varepsilon}\frac{f(x-\rho t')}{\rho}d\rho\right|^p dx\right)d\sigma\right]^{\frac{1}{p}}.$$

令 $x=y+st'$，$y\in L$，則

$$\int_{E^n}\left|\int_{|\rho|>\varepsilon}\frac{f(x-\rho t')}{\rho}d\rho\right|^p dx$$

$$=\int_L dy\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{|\rho|>\varepsilon}\frac{f(y+(s-\rho)t')}{\rho}d\rho\right|^p ds$$

$$=\int_L dy\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{g}(s)|^p ds\leqslant A_p^p\int_L dy\int_{-\infty}^{\infty}|g(s)|^p ds$$

$$=A_p^p\int_L dy\int_{-\infty}^{\infty}|f(y+st')|^p ds=A_p^p\|f\|_p^p.$$

故

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_p\leqslant\left(\int_\Sigma\frac{|k(t')|}{2}d\sigma\right)^{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}A_p\|f\|_p=\frac{A_p}{2}\|f\|_p\int_\Sigma|k(t')|d\sigma.$$

b）在 a）的証明中已經注意到

$$\tilde{f}_\varepsilon(x)=\frac{1}{2}\int_\Sigma k(t')\left[\int_{|\rho|>\varepsilon}\frac{f(x-\rho t')}{\rho}d\rho\right]d\sigma.$$

括号內的积分为 $g(\rho)=f(x-\rho t')$ 的 Hilbert 变换在 $\rho=0$ 之值：

$$H_\varepsilon g(0)=\tilde{g}_\varepsilon(0).$$

从 § 1 定理中 a）的証明就知 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时逐点收斂．因为 $f\in\mathscr{D}$，故 $\tilde{g}_\varepsilon(x)$ 一致地以常数 M 为界，此界仅依賴于 f．因此

$$|\tilde{f}_\varepsilon(x)|\leqslant\frac{M}{2}\int_\Sigma|k(t')|d\sigma.$$

以 I 表 $f(x)$ 之支集，記 $\underline{X}=\{x;\ d(x,I)>1\}$．若 $x\in\underline{X}$，$\varepsilon<1$，

则 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 不依赖于 ε: $\tilde{f}_\varepsilon=\tilde{f}(x)$. 因为 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 有界，又逐点收斂，故 $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ 是 L^p 中一 Cauchy 序列.

[附注]

1) a) 的証明中用到了 $g(\rho)\in L^p(E^1)$. 但由 $f\in L^p(E^n)$ 仅知，对几乎所有 $y\in L$, $g(\rho)\in L^p(E^1)$. 不过这并不影响証明.

2) 已經指出，若在 $\mathscr{D}$ 中 $\{K_\varepsilon\}$ 是一致有界算子族，且 $\{K_\varepsilon f\}$ 是 Cauchy 序列，則可以連續地扩張每一 K_ε 使之成为 L^p 中的連續算子(一致有界)，且对任意 $f\in L^p$, $K_\varepsilon f$ 是 Cauchy 序列.

現在証明，对任意 $\varepsilon>0$, $\int_{|x-y|>\varepsilon}|k(x-y)||f(y)|dy$ 几乎处处为有限，从而不难証明 $\int_{|x-y|>\varepsilon}k(x-y)f(y)dy=\tilde{f}_\varepsilon$ 与經扩張而来的 $K_\varepsilon f$ 几乎处处相等.

因此，$\int k(x-y)f(y)dy$ 是当 $\varepsilon\to 0$ 时卷积

$$\int_{|x-y|>\varepsilon}k(x-y)f(y)dy$$

的平均极限.

引理 設 k 为 $-n$ 阶齐次函数，$k(x)\geqslant 0$ 于 Σ 上 $q\geqslant 1$ 可积，$f\geqslant 0, f\in L^p$, $1<p<\infty$, $y=\rho y'$, $|y'|=1$, 則

$$g(x)=\int_{|x|>\varepsilon}k(y)f(x-y)dy=\int_\Sigma k(y')d\sigma\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-\rho y')}{\rho}d\rho$$

几乎处处存在.

[証明] 积分 $p.p.$ 有限，如果它在每一球 S 內 $p.p.$ 有限，特别，如果此积分在每一球 S 上可积. 先看积分

$$\int_\Sigma k(y')d\sigma\int_S dx\int_\varepsilon^\infty\frac{f(x-\rho y')}{\rho}d\rho. \tag{1}$$

最里边的积分，因为 $\frac{1}{\rho}$ 在离开原点的地方，$1<p<\infty$ 可积，故若不計因子，此积分不超过

$$\left[\int_{-\infty}^\infty f^p(x-\rho y')d\rho\right]^{\frac{1}{p}}.$$

对(1)中里边的重积分应用 Hölder 不等式,不計因子,则这积分不超过

$$|S|^{\frac{p}{p-1}}\left[\int_S dx\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x-\rho y')\,d\rho\right]^{\frac{1}{p}}.$$

采用上述定理 a) 的証明中的計算方法，就知 (1) 不超过 Const. $\|f\|_p$. 从而 $\int_S g(x)\,dx<\infty$.

§ 3. 特殊情形. Riesz 变换

因为 $\frac{x_m}{|x|^{n+1}}$(x_m——x 的第 m 个分量)是满足 § 2 定理中要求的核,故算子

$$R_m f=\gamma_n\int\frac{x_m-y_m}{|x-y|^{n+1}}f(y)\,dy,\quad \gamma_n=-i\pi^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

具有这定理中所述性质.

本节下面将証:对 $f\in\mathscr{D}$

$$F(R_m f)=F(f)\frac{x_m}{|x|}. \tag{1}$$

这个結果包含下列推論:

i) 对任意 $f\in L^2$, (1)成立,因为 R_m 和 Fourier 变换都是 L^2 到 L^2 的連續算子.

ii) $\sum\limits_{m=1}^{n}R_m^2=I$ 在 $L^p(1<p<\infty)$上成立.

事实上,按(1)并注意,于 $f\in L^2$ 有 $R_m f\in L^2$, 就知

$$F(R_m^2 f)=\frac{x_m}{|x|}F(R_m f)=\frac{x_m^2}{|x|^2}F(f),$$

从而

$$F\left(\sum_{m=1}^{n}R_m^2 f\right)=F(f),$$

这表明在 L^2 中, $\sum\limits_{m=1}^{n}R_m^2=I$. 注意 R_m 在 L^p 中連續, 而 $L^2\cap L^p$ 稠密,就知等式在 L^p 中成立.